Theoretisch-praktische

Geometrische Constructionslehre

und

Algebraische Geometrie.

Theoretisch-praktische

Geometrische Constructionslehre

und

Algebraische Geometrie,

enthaltend

mehr als 300 planimetrische, mit vollständigen geometrischen und algebraischen Auflösungen versehene Aufgaben.

Von

Wilhelm Adam.

Mit 234 Figuren in Holzschnitt.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1863.

Vorwort.

Soll der Unterricht in der Mathematik ein recht fruchtbringender sein, so darf sich derselbe nicht darauf beschränken, Lehrsatz nach Lehrsatz zu absolviren, sondern es müssen zeitweilig, und zwar am besten zu Ende jedes Lehrabschnitts, Aufgaben gegeben werden, zu deren Lösung die bereits erworbenen Kenntnisse hinlänglich befähigen. Die zu treffende Auswahl der eben zweckdienlichen Elemente nöthigt den Schüler, sich die Reihe der angeschauten Wahrheiten nochmals prüfend vorzuführen und dieselben auf die Forderungen der ihm gestellten Aufgabe zu beziehen. Eine solche Selbstthätigkeit aber ist in hohem Grade geeignet, den Verstand zu schärfen und das bereits durchschrittene Gebiet noch mehr zu erhellen. Zu diesem Zwecke enthalten die meisten Lehrbücher der Geometrie, theils bei einzelnen Lehrsätzen, theils zu Ende jedes Abschnitts, Constructionsaufgaben, die sich im Ganzen genommen auf das Vorhergegangene stützen. Da jedoch hierbei nur selten die Lösung gegeben oder angedeutet ist, so tritt häufig eine gänzliche Rathlosigkeit des suchenden Schülers ein, der nur zu sehr geneigt ist, Naheliegendes zu übersehen und Hülfe vom unrechten Orte herzuholen.

Es dürfte daher, wie auch die Erfahrungen der vieljährigen Lehrthätigkeit des Verfassers bestätigen, nicht unzweckmäßig sein, an einer Reihe verschiedenartiger Constructionsaufgaben praktisch darzuthun, wie man in diesen und ähnlichen Fällen zu verfahren habe. Auch der minder Begabte wird dadurch befähigt, ohne weitere Hülfe Probleme ähnlicher Art zu lösen, bis er nach und nach so weit gefördert ist, daß er selbst

neue Wege findet. Namentlich ist eine Nachhülfe, wie sie das vorliegende Buch zu leisten bezweckt, dringendes Bedürfniß des Autodidakten, dem der persönliche Lehrer durch das geschriebene Wort ersetzt werden muß; und mit Bezug hierauf dürfte wol die größere oder geringere Ausführlichkeit der Erläuterungen und Entwickelungen gerechtfertigt erscheinen.

Hinsichtlich der Eintheilung des dargebotenen Materials hat der Verfasser zu bemerken, daß es ihm, um das Nachschlagen zu erleichtern, lediglich darauf ankam, die Aufgaben möglichst übersichtlich zusammenzustellen. Die Beispielsammlung ist nämlich weniger dazu bestimmt, der Reihe nach durchgenommen zu werden. Es liegt vielmehr in der Absicht des Verfassers, daß man je nach Bedürfniß passende Aufgaben daraus wähle und bei den einzelnen Abschnitten des in der Hand des Schülers befindlichen geometrischen Leitfadens einschalte; auf diese Weise würde das Werkchen sich als eine ersprießliche, im Anschluß an jedes Compendium der Geometrie zu benutzende Hülfsleistung bewähren.

So bequem übrigens in vielen Fällen die algebraische Lösungsmethode unstreitig ist, so muß doch dem Anfänger empfohlen werden, zu seiner Uebung auch das rein geometrische Verfahren einzuschlagen, wo dies nicht schon in unserm Buche geschieht; denn die Analysis erfindet, die Synthesis begründet, und nur durch Verbindung beider Methoden wird ein gründliches und vollständiges Wissen erreicht werden können.

Strasburg i. d. U. im Juli 1863.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung.

Anweisung zum Auflösen geometrischer Constructionsaufgaben. Erläuterung der geometrischen und der algebraischen Methode. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

I. Die geometrischen Aufgaben, die zur selbstthätigen Anwendung der erlernten Elemente der Geometrie nöthigen, gehen entweder unmittelbar auf einen einzelnen Satz zurück, oder sie beruhen auf mehreren verschiedenartigen Lehrsätzen. Im ersten Falle können sie leicht sofort mit Hülfe des Zirkels und Lineals gelöst werden, im letztern aber verlangen sie meistens ein complicirteres Verfahren, welches zweifacher Art sein kann, nämlich: analytisch und algebraisch.

II. Die analytische Methode besteht in der Beobachtung folgender Regeln:

1. Man nehme die Aufgabe als gelöst an und zeichne eine ihren Bedingungen etwa entsprechende Figur.
2. Man suche diejenigen Eigenschaften der Figur auf, welche sich auf die gegebenen Stücke und auf die verlangten Eigenschaften beziehen.
3. Mittelst dieser Eigenschaften bestimme man für jeden Punkt der verlangten Figur den geometrischen Ort, d. h. man verschaffe sich zwei Linien, die gerade oder Kreislinien sein können und in denen dieser Punkt liegen muß. Der Durchschnittspunkt dieser mit Hülfe der gegebenen Stücke gefundenen Linien ist ein Punkt der gesuchten Figur.

4. Sind alle Punkte der Figur auf diesem Wege gefunden, so kann ohne weiteres die Figur construirt werden.

III. Die algebraische Methode ist nichts weiter als die Anwendung der Algebra auf geometrische Aufgaben. Die gesuchten Größen bezeichnet man gewöhnlich mit den letzten, die gegebenen mit den ersten Buchstaben des Alphabets. Die Eigenschaften der geometrischen Figur müssen so viele Gleichungen ergeben, als Unbekannte zu finden sind. Löst man diese Gleichungen auf, so erhält man die verlangten einzelnen Stücke der Figur. Dies algebraische Verfahren erweist sich selbst dann als sehr zweckmäßig, wenn die bekannten Bestimmungen der Aufgabe nicht in Zahlen, sondern durch Zeichnung gegeben sind. Soll aber in diesem Falle das Resultat ebenfalls durch Zeichnung dargestellt werden, so muß man erst die durch Rechnung gewonnenen algebraischen Ausdrücke construiren. Zu diesem Zwecke muß die gefundene Formel derartig zerlegt werden, daß die jedesmal zu zeichnende Linie als Summe oder Differenz zweier Linien, als vierte Proportionale zu drei gegebenen, als dritte Proportionale zu zwei gegebenen oder als mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen auftritt, oder auch daß sie die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten bekannt sind, oder daß sie als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks erscheint, von welchem die Hypotenuse und die andere Kathete gegeben sind. Es hätten demnach zwischen der zu zeichnenden Linie x und den gegebenen geraden Linien a, b und c folgende Gleichungen stattzufinden:

$$x = a + b;\ x = a - b;\ x = \frac{ab}{c};\ x = \frac{a^2}{b};$$

$$x = \sqrt{ab};\ x = \sqrt{a^2 + b^2};\ x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Zuweilen ergeben sich complicirtere Ausdrücke, deren Construction mit weit mehr Umständlichkeit verknüpft ist. Sollen jedoch Zirkel und Lineal noch ausreichen, so dürfen die zu zeichnenden geraden Linien nicht durch cubische oder wol gar durch höhere Gleichungen gegeben sein.

IV. Wie irgendeine für die Linie x gefundene Formel zu construiren sei, werden folgende vier Beispiele veranschaulichen.

Erstes Beispiel.

Es sind vier gerade Linien a, b, c, d gegeben und man hat für die zu zeichnende gerade Linie x die Formel gefunden:

$$x = \frac{(a + b)\ c \cdot d}{a \cdot b}.$$

1. Man zeichne die Linie z, welche die Summe von a + b ist, zu welchem Zwecke die beiden Geraden a und b nur aneinander getragen zu werden brauchen.
2. Dann zeichne man eine Linie y, welche gleich $\frac{z \cdot c}{a}$, d. h. die vierte Proportionale zu z, a und c ist.
3. Die zu zeichnende Gerade x ist dann gleich $\frac{y \cdot d}{b}$, d. h. die vierte Proportionale zu y, b und d.

Zweites Beispiel.

Es sind wieder vier gerade Linien a, b, c und d gegeben und für die zu zeichnende Gerade x ist die Formel gefunden worden:

$$x = \sqrt{\frac{(a + b) \cdot c \cdot d \cdot (c - d)}{a \cdot b}}.$$

1. Hier muß man zuerst zwei Linien zeichnen, p und q, von denen p = a + b und q = c — d ist.
2. Alsdann zeichne man eine Linie

   $$z = \frac{p \cdot c}{a},$$

   d. h. die vierte Proportionale zu p, a und c.
3. Hierauf suche man die vierte Proportionale y zu z, b und d, d. h. man mache

   $$y = \frac{z\ d}{b}.$$

4. Dann ist $x = \sqrt{y \cdot q}$, d. h. die mittlere Proportionale zu den beiden Geraden y und q.

Drittes Beispiel.

Man soll eine gerade Linie x zeichnen, welche durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$x = f. \frac{-b + \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) \cdot c \cdot (c^2 - d^2)}{(a^2 - b^2) \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}}}{b - c},$$

wo a, b, c, d, f ebenfalls gerade Linien vorstellen.

1. Zunächst vereinfache man erwähnte Formel dadurch, daß man mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes vier Linien u, v, w und z findet, die durch die Gleichungen
$u^2 = a^2 + b^2$; $v^2 = c^2 - d^2$; $w^2 = a^2 - b^2$ u. $z^2 = c^2 + d^2$
gegeben sind. Demgemäß ist nun
$$x = f. \frac{-b + \sqrt{\frac{u^2 \cdot c \cdot v^2}{w^2 \cdot z}}}{b - c} = f. \frac{-b + \left(\frac{u}{w} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot v^2}{z}}\right)}{b - c}.$$

2. Zeichnet man jetzt noch eine Linie $p = \frac{v^2}{z}$, und eine Linie $q = \sqrt{c \cdot p}$, so ergibt sich $x = f. \frac{-b + \frac{u \cdot q}{w}}{b - c}$.

3. Alsdann findet man leicht eine Linie $s = \frac{u \cdot q}{w}$, also auch eine Linie $t = s - b$, während die Differenz $b - c = y$ ist.

4. Daraus ergibt sich endlich
$$x = \frac{f \cdot t}{y}$$
als vierte Proportionale zu den zuletzt gefundenen Linien f, y und t.

Viertes Beispiel.

Man habe durch Rechnung gefunden

$$x = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}.$$

1. Man zeichne vier Linien, von denen
$s = a + b + c$; $t = a + b - c$; $u = a - b + c$ und $v = -a + b + c$ ist. Daraus ergibt sich
$$x = \tfrac{1}{4} \sqrt{s \cdot t \cdot u \cdot v} = \tfrac{1}{4} \sqrt{s \cdot t} \cdot \sqrt{u \cdot v}.$$

2. Nun suche man die mittlere Proportionale w zu den Linien s und t, sowie die mittlere Proportionale z zu den Linien u und v, sodaß

$$w = \sqrt{s \cdot t} \text{ und } z = \sqrt{u \cdot v} \text{ wird.}$$

3. Demgemäß hat man nun gefunden

$$x = \frac{w \cdot z}{4};$$

d. h. der vierte Theil des Rechtecks, dessen Seiten w und z sind, ist die für x gesuchte Größe und x selbst eine Fläche.

V. Um geometrische Aufgaben auf die einfachste Weise zu lösen, muß man sich bald der einen, bald der andern der oben angegebenen Methoden bedienen. Zwar beruht die rein geometrische Lösung der Aufgaben in vielen Fällen auf denselben Constructionen, welche auch mit Hülfe des algebraischen Rechnens gefunden worden sind; aber sehr oft erfordert die besondere Beschaffenheit des gerade vorliegenden Problems, daß man ausschließlich geometrisch, oder ausschließlich algebraisch verfahre. Es gibt nämlich Aufgaben, denen man es bald ansieht, daß sie sich auf rein geometrische Weise sehr bequem und leicht lösen lassen, während bei andern diese Art der Lösung, wenn nicht bisjetzt erfolglos versucht, so doch höchst schwierig ist. In diesem letztern Falle gewährt die algebraische Methode große Vortheile und überdies nicht zu selten die einzig sichtbare Aushülfe.

Erster Abschnitt.

Vorbereitende Aufgaben der geometrischen Zeichenkunst,

bei denen die Lösung als schon bekannt vorausgesetzt, oder, weil sehr leicht, nur angedeutet ist.

1. Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu legen, oder auch diese Punkte durch eine Gerade miteinander zu verbinden.
2. Von einer geraden Linie ein gegebenes Stück abzuschneiden.

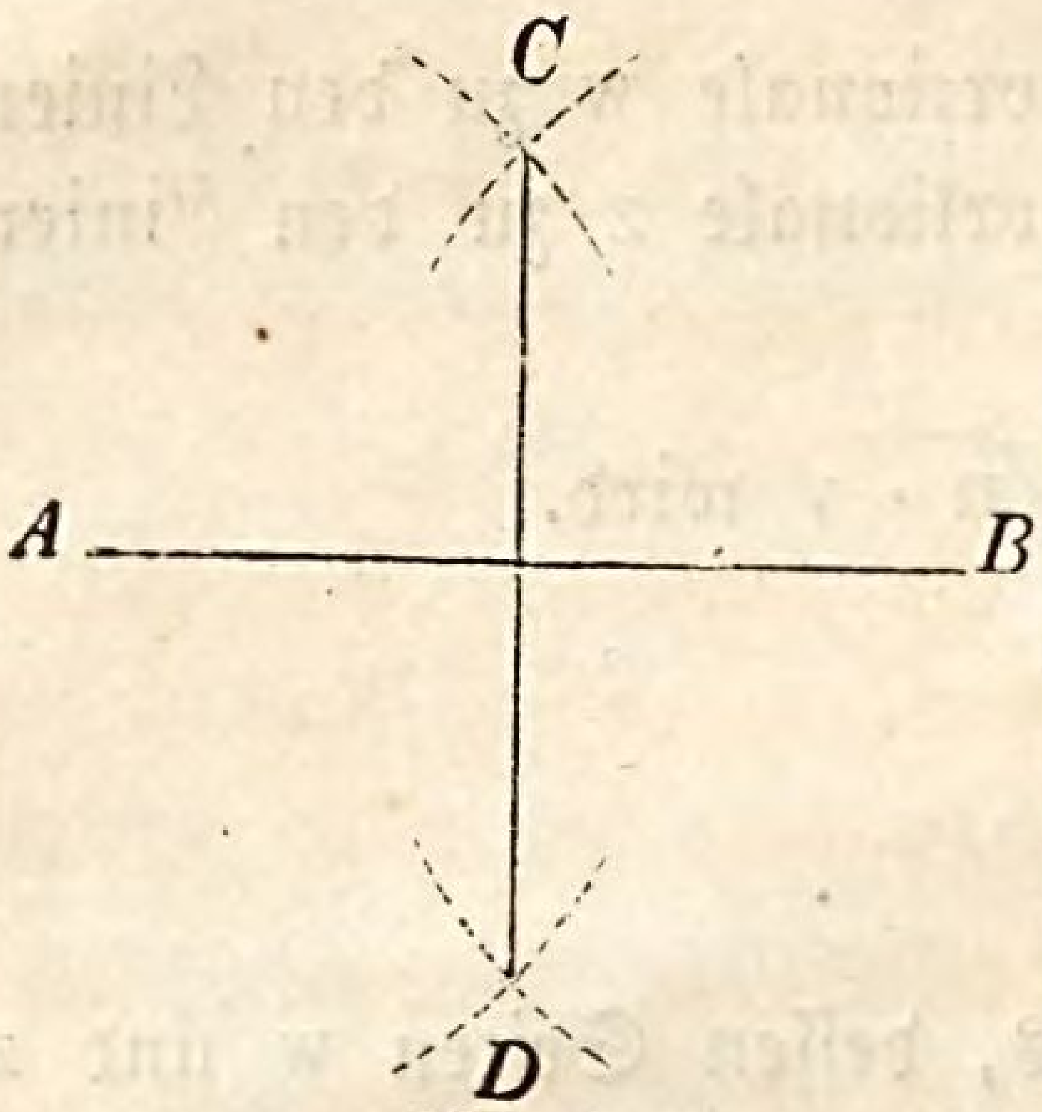


Fig. 1.

3. Eine gegebene gerade Linie A B zu halbiren.

Am bequemsten ist es, wenn man von A und B aus mit derselben Zirkelöffnung (welche größer als die Hälfte der gegebenen Geraden sein muß) oberhalb und unterhalb der A B Bogen schlägt und die dadurch entstehenden beiden Durchschnittspunkte C und D miteinander verbindet.

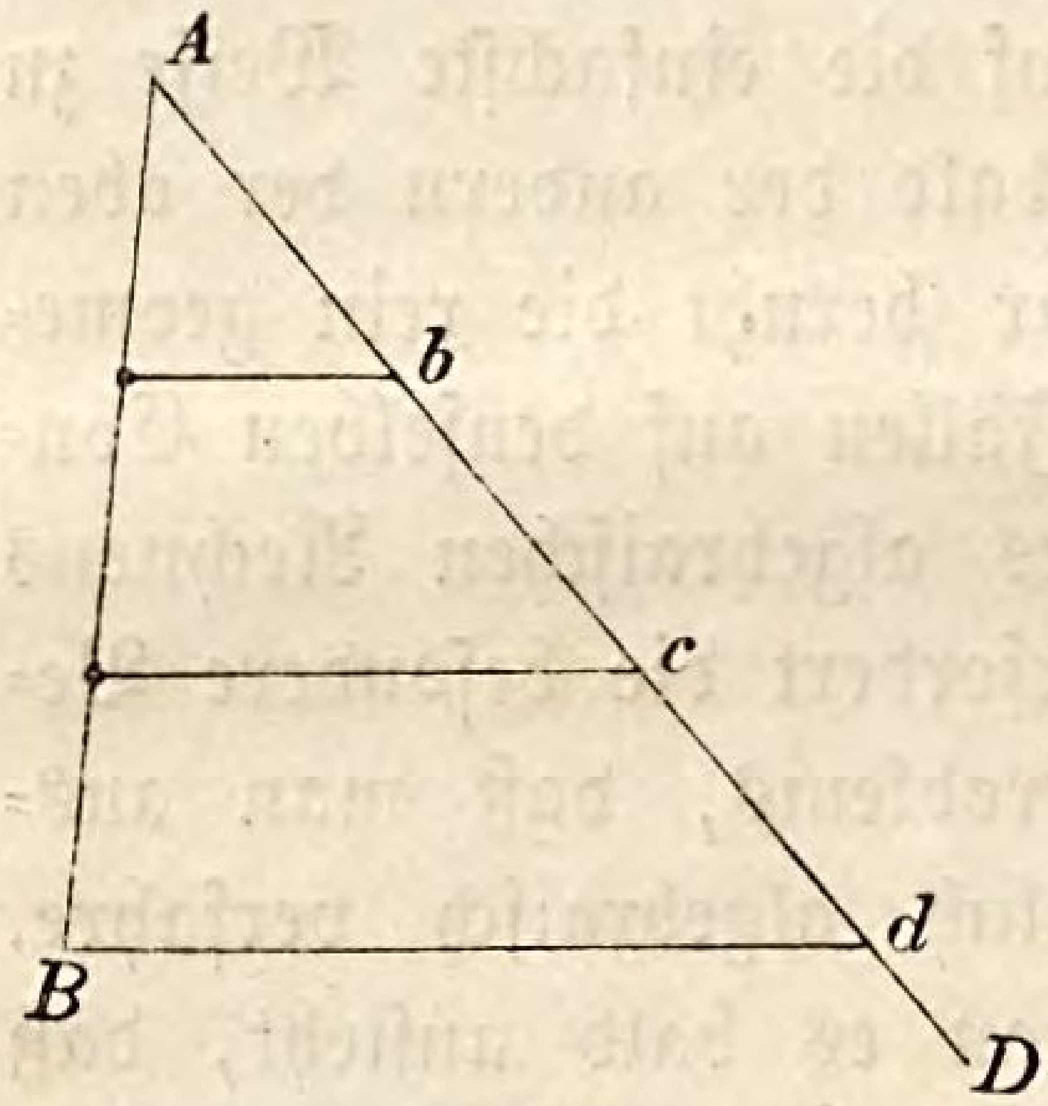


Fig. 2.

4. Eine gegebene gerade Linie A B in mehrere, z. B. drei gleiche Theile zu theilen.

Man lege eine andere gerade Linie A D unter einem beliebigen Winkel an A, mache auf derselben von A aus drei gleiche Abschnitte, A b, b c, c d von beliebiger Größe, durch den letzten Theilpunkt d ziehe man eine gerade Linie nach B, und durch die übrigen Theilungspunkte lauter Parallelen mit B d; diese theilen die A B wie oben verlangt wurde.

5. Eine gegebene gerade Linie in proportionirte Theile zu theilen.

Man verfahre hier ebenso wie in der vorigen Aufgabe, nur daß diesmal auf der geraden Linie A D nicht gleiche Theile, sondern proportionirte abgetragen werden müssen.

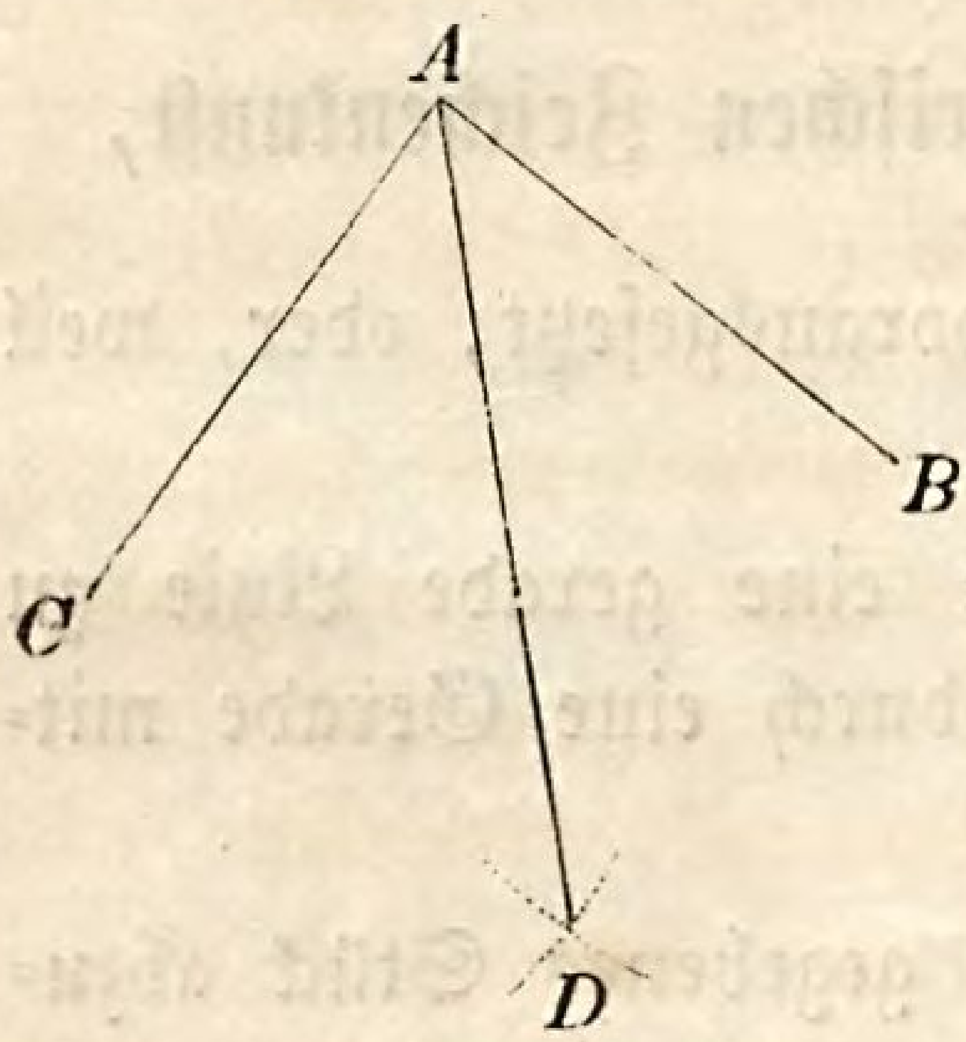


Fig. 3.

6. Einen gegebenen Winkel C A B zu halbiren.

Man gebe dem Winkel gleiche Schenkel, A C und A B, setze den Zirkel zuerst in C, dann in B ein, und schlage jedesmal (am besten unterhalb) einen Bogen. Die Zirkelöffnung kann beliebig sein, muß aber in beiden Fällen dieselbe bleiben. Den so gefundenen

Durchschnittspunkt D verbinde man nun mit Punkt A, so wird der Winkel C A B durch die gerade Linie A D halbirt.

7. Einen Kreis zu zeichnen, zu welchem Halbmesser und Mittelpunkt gegeben sind.

8. In einem gegebenen Kreise um denselben Mittelpunkt einen andern Kreis zu beschreiben, dessen Radius in einem gegebenen Verhältniß zu dem des erstern steht.

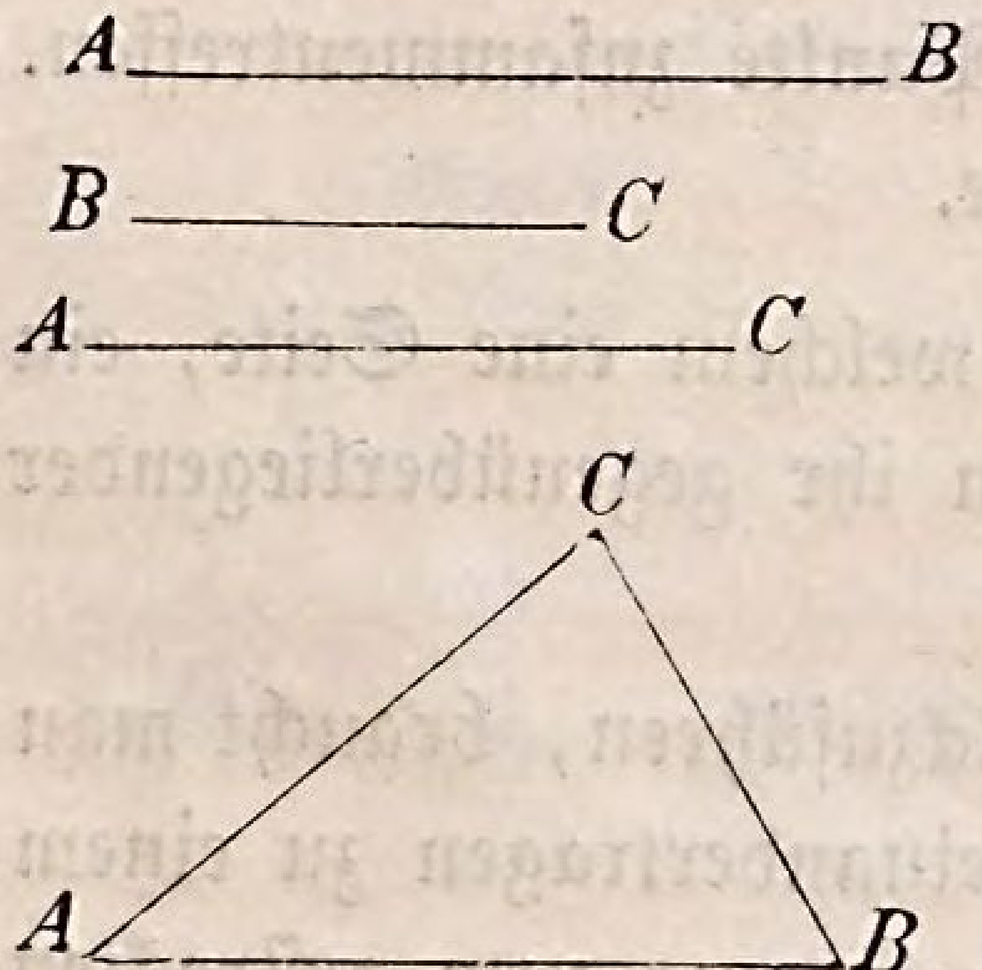


Fig. 4.

9. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die drei Seiten gegeben sind.

Die drei Seiten seien A B, B C und C A. Man ziehe zunächst eine beliebige gerade Linie und trage auf derselben die eine der gegebenen, hier A B, ab. Dann setze man in A den Zirkel ein und schlage mit der Oeffnung A C einen Bogen; alsdann setze man den Zirkel in B ein und schlage mit der Oeffnung B C einen zweiten Bogen, der den vorigen in C schneidet. Verbindet man nun den Durchschnittspunkt C mit A und B, so ist Dreieck A B C das verlangte.

10. Einen Winkel zu zeichnen, welcher einem gegebenen gleich ist.

Der Bequemlichkeit wegen mache man den Winkel gleichschenkelig und denke sich denselben durch eine dritte Linie geschlossen, sodaß ein Dreieck entsteht, das wie in der vorigen Aufgabe gezeichnet wird.

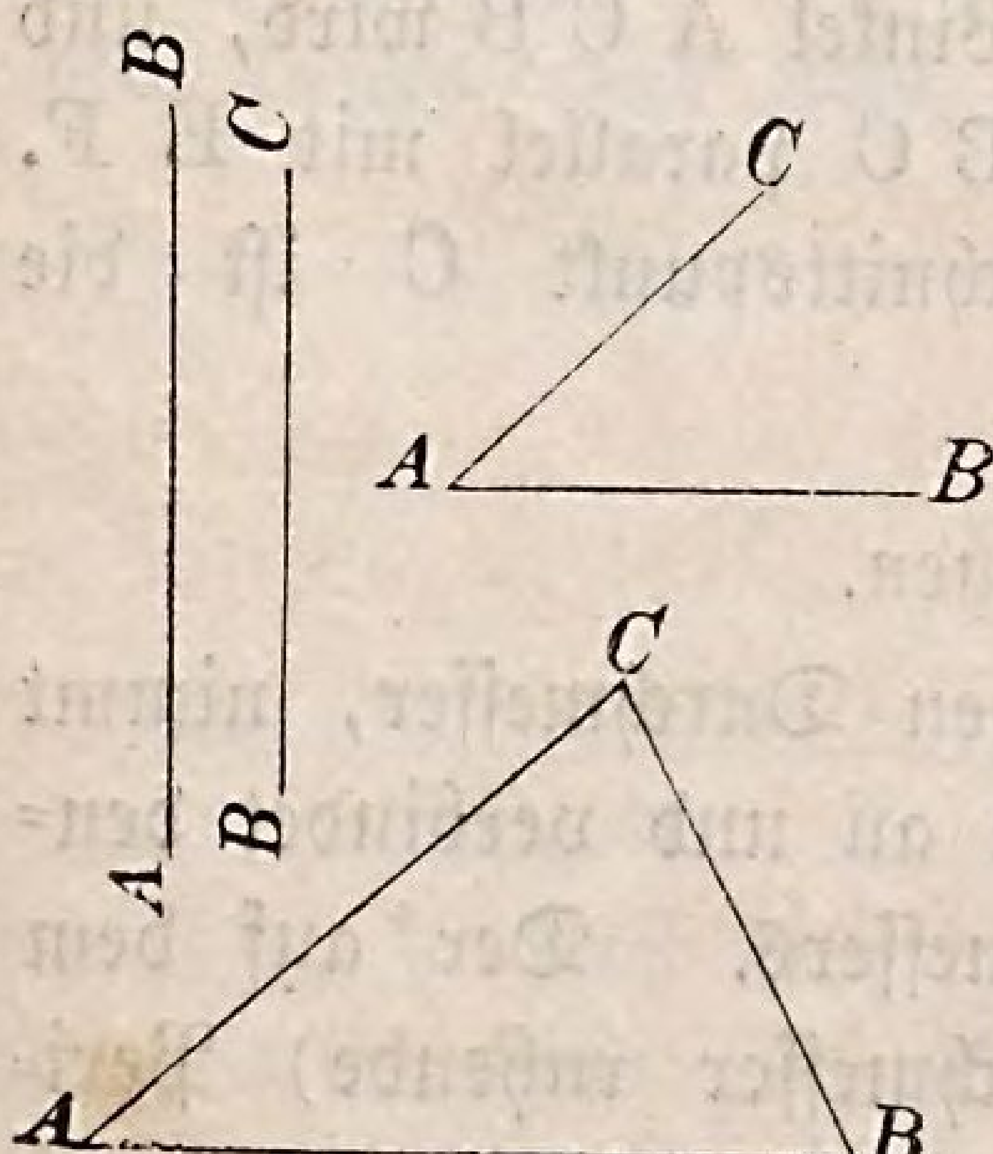


Fig. 5.

11. Aus zwei gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher der zweiten dieser Seiten gegenüberliegt, ein Dreieck zu verzeichnen.

Man zeichne zuerst den gegebenen Winkel = B A C und mache den Schenkel A B gleich der ersten der beiden gegebenen Seiten. Dann nehme man die andere gegebene Seite B C in den Zirkel, setze in B ein und beschreibe

einen Bogen, der die A C in C schneidet: so ist Dreieck A B C das verlangte.

12. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite und die beiden daranliegenden Winkel gegeben sind.

Man schneide von einer beliebigen Geraden ein der gegebenen Seite gleiches Stück ab und trage an die Endpunkte desselben die beiden gegebenen Winkel so an, daß die Verlängerungen der aufsteigenden Schenkel endlich in einem Punkte zusammentreffen. Das entstehende Dreieck ist das verlangte.

13. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite, ein daranliegender Winkel und ein ihr gegenüberliegender gegeben sind.

Um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, braucht man nur die beiden gegebenen Winkel durch Aneinandertragen zu einem einzigen Winkel zu vereinigen, und die Ergänzung zum gestreckten Winkel als den dritten Winkel an dem einen Endpunkte der gegebenen Seite zu nehmen.

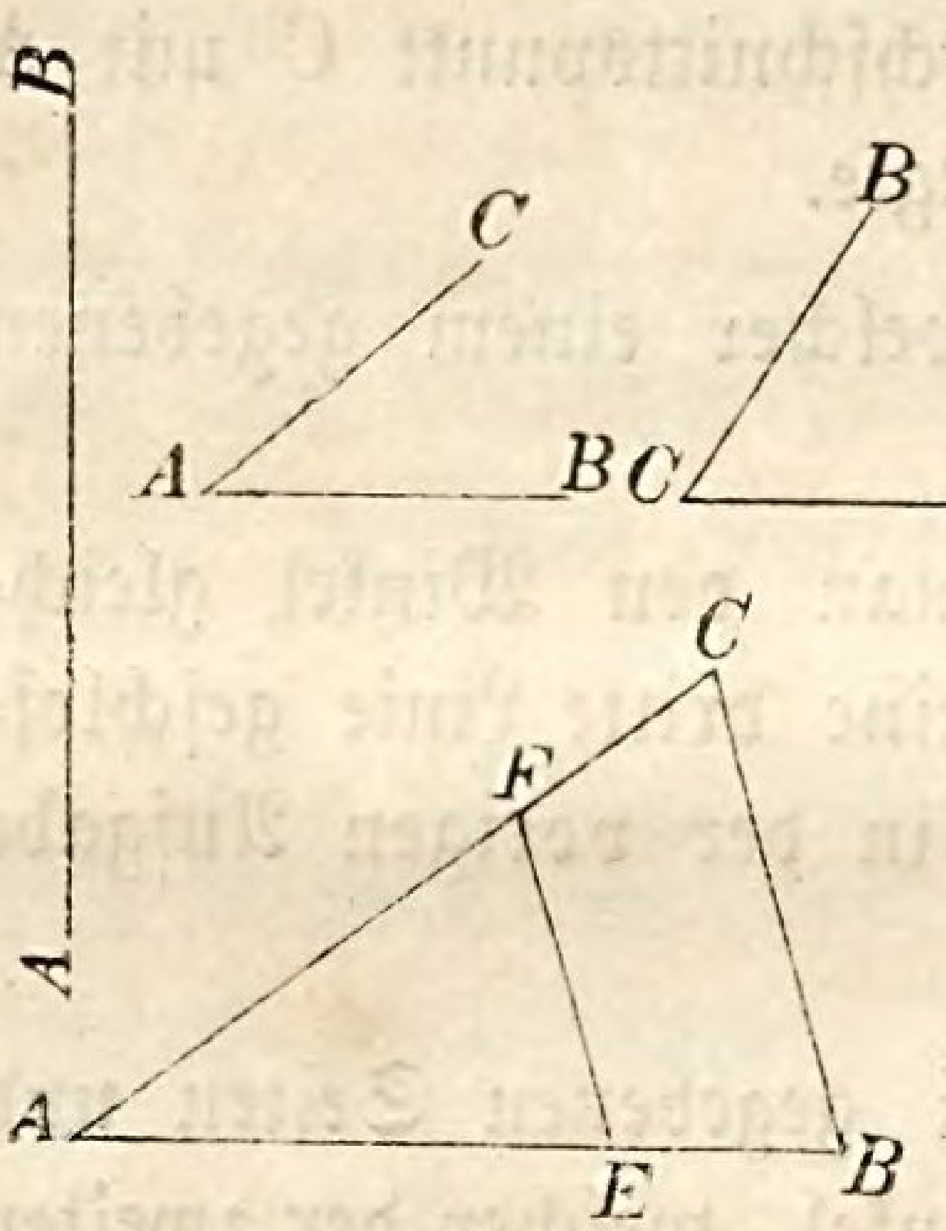


Fig. 6.

Unmittelbar wird diese Aufgabe auf folgende Weise gelöst. Man zeichnet die gegebene Seite A B, trägt an A den gegebenen Winkel B A C, und an einen beliebigen Punkt, z. B. F, in dem Schenkel A C den zweiten gegebenen Winkel A C B an, sodaß der Winkel A F E gleich dem Winkel A C B wird, und zieht dann B C parallel mit E F. Der Durchschnittspunkt C ist die Spitze des verlangten Dreiecks A B C.

14. Einen rechten Winkel zu zeichnen.

Man beschreibt einen Kreis, zieht den Durchmesser, nimmt einen beliebigen Punkt in der Peripherie an und verbindet denselben mit den Endpunkten des Durchmessers. Der auf dem Halbkreise stehende (oder auf dem Durchmesser ruhende) Periepheriewinkel ist allemal ein rechter Winkel.

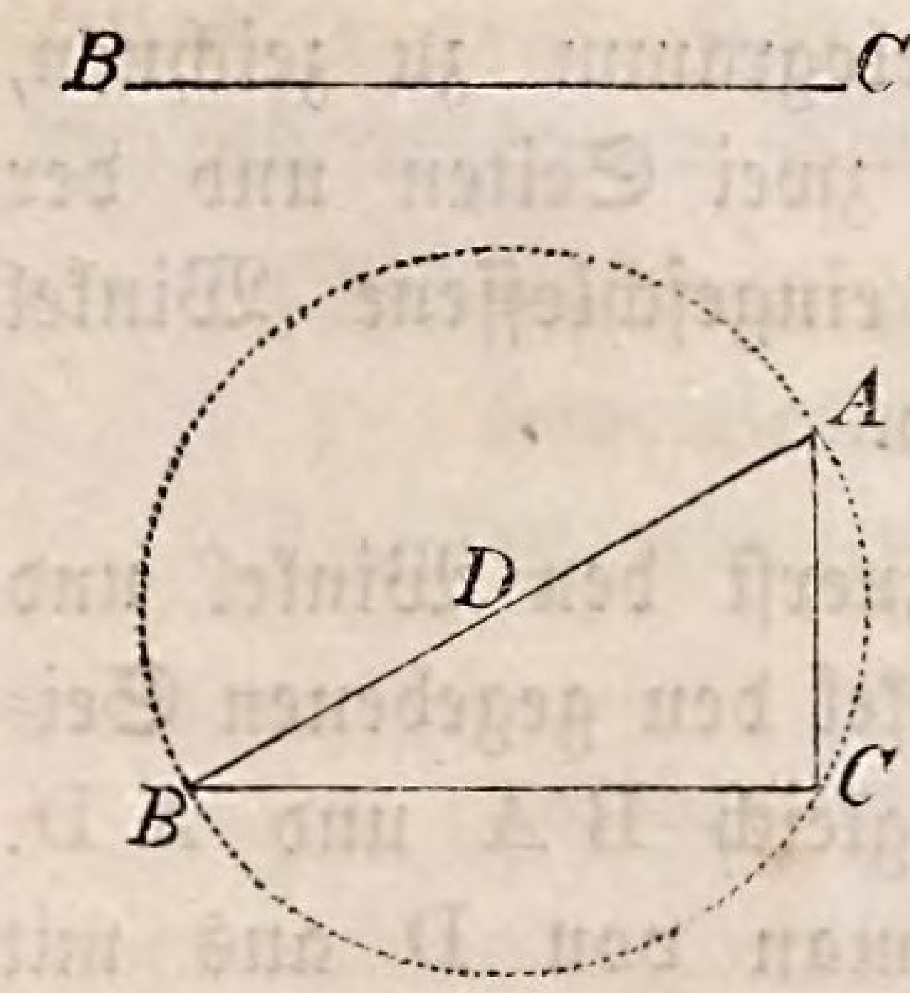


Fig. 7.

15. Eine senkrechte Linie C A auf eine andere gegebene C B in ihrem Endpunkte C zu errichten.

Man macht die B C zur Sehne eines Kreises, dessen Mittelpunkt D ist, welcher Punkt beliebig erwählt werden kann. Dann verbindet man B mit D und verlängert diese Linie bis zur Peripherie in A und zieht zuletzt A C.

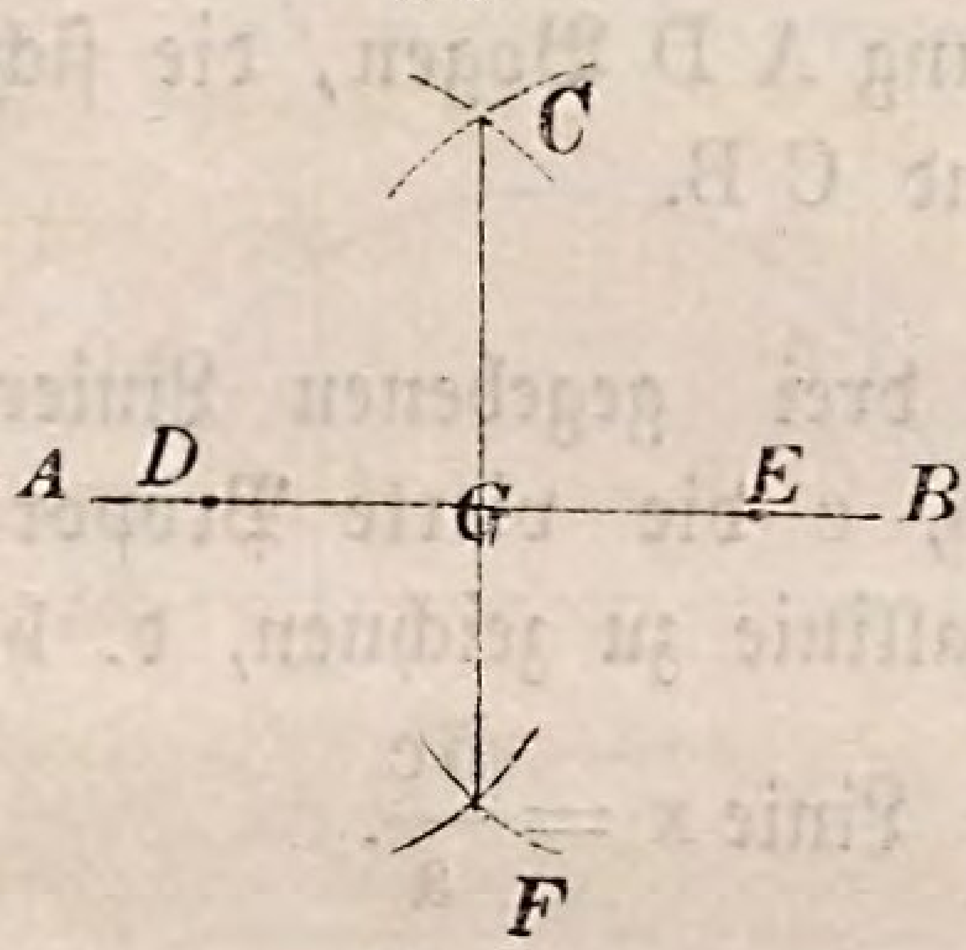


Fig. 8.

16. Auf eine gerade Linie A B von einem Punkte C außerhalb derselben eine senkrechte Linie zu fällen.

Man setze den Zirkel in C ein und schneide mit derselben Oeffnung die A B in zwei Punkten D und E. Von D und E aus zeichne man, aber wieder mit gleicher Zirkelöffnung, unterhalb der A B zwei Bogen, die sich in F schneiden, und verbinde nun C mit F, so wird die Linie C F, also auch C G, senkrecht auf der gegebenen A B stehen.

17. Auf einer geraden Linie A B von einem Punkte G innerhalb derselben ein Loth zu errichten. (Fig. 8.)

Zuerst schneide man von G aus in der Geraden A B gleiche Stücke ab, hier G A = G B; dann schlage man mit gleicher Zirkelöffnung von A und B aus die beiden sich in C schneidenden Bogen, und ziehe zuletzt C G.

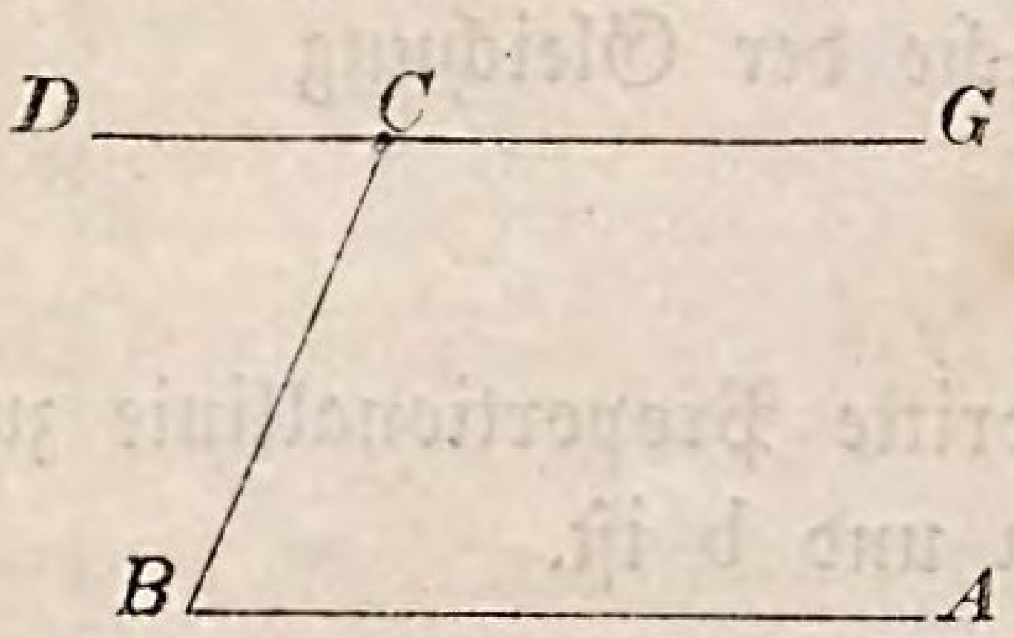


Fig. 9.

18. Durch einen gegebenen Punkt C mit einer gegebenen Linie A B eine Parallele zu legen.

Man verbindet C mit B durch die Gerade C B und trägt an C auf derselben einen Winkel B C D = Winkel A B C, so muß die G D mit der A B parallel sein.

19. Aus zwei Seiten ein Rechteck zu zeichnen.

Dies geschieht nach Aufgabe 14 und 18.

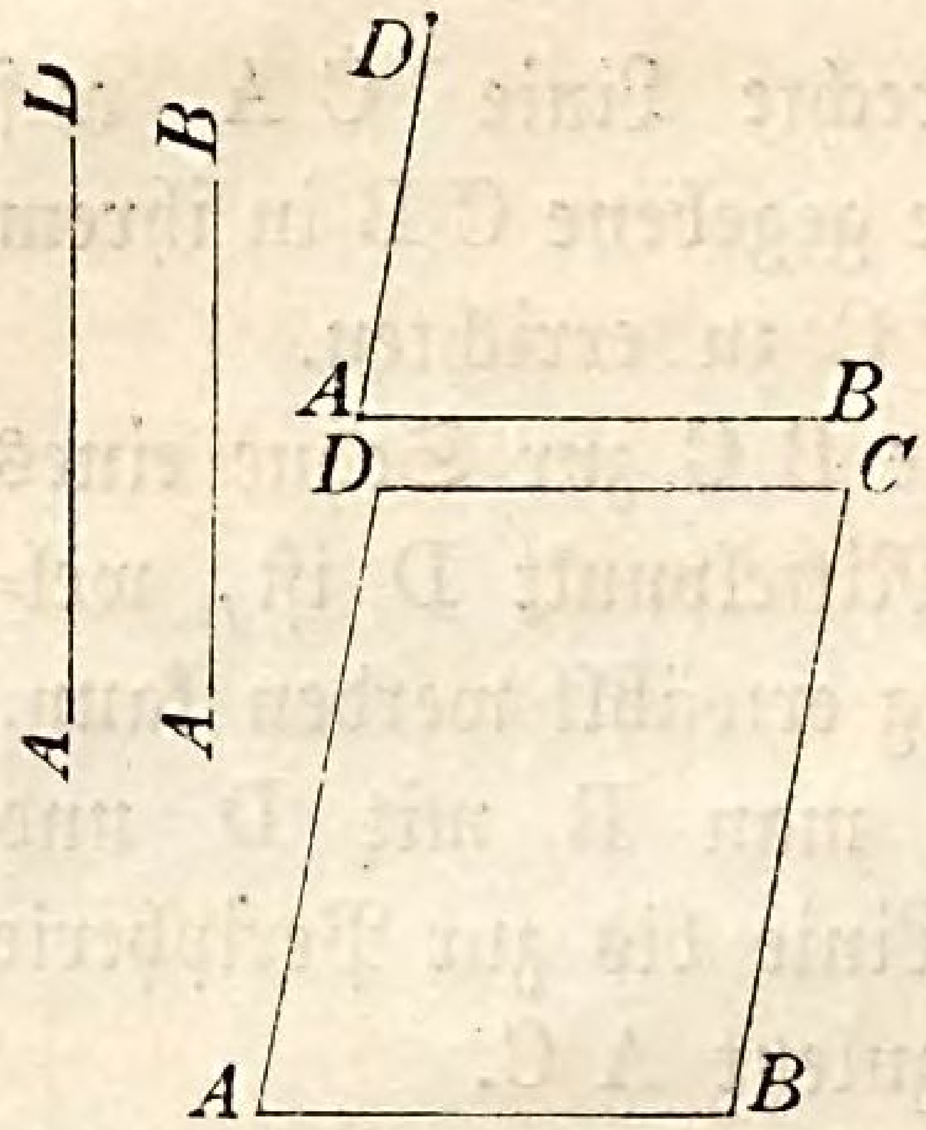


Fig. 10.

20. Ein Parallelogramm zu zeichnen, zu welchem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man zeichnet zuerst den Winkel und macht dessen Schenkel den gegebenen Seiten gleich, hier gleich B A und A D. Dann beschreibt man von D aus mit der Zirkelöffnung A B, und von B aus mit der Entfernung A D Bogen, die sich in C schneiden, und zieht zuletzt C D und C B.

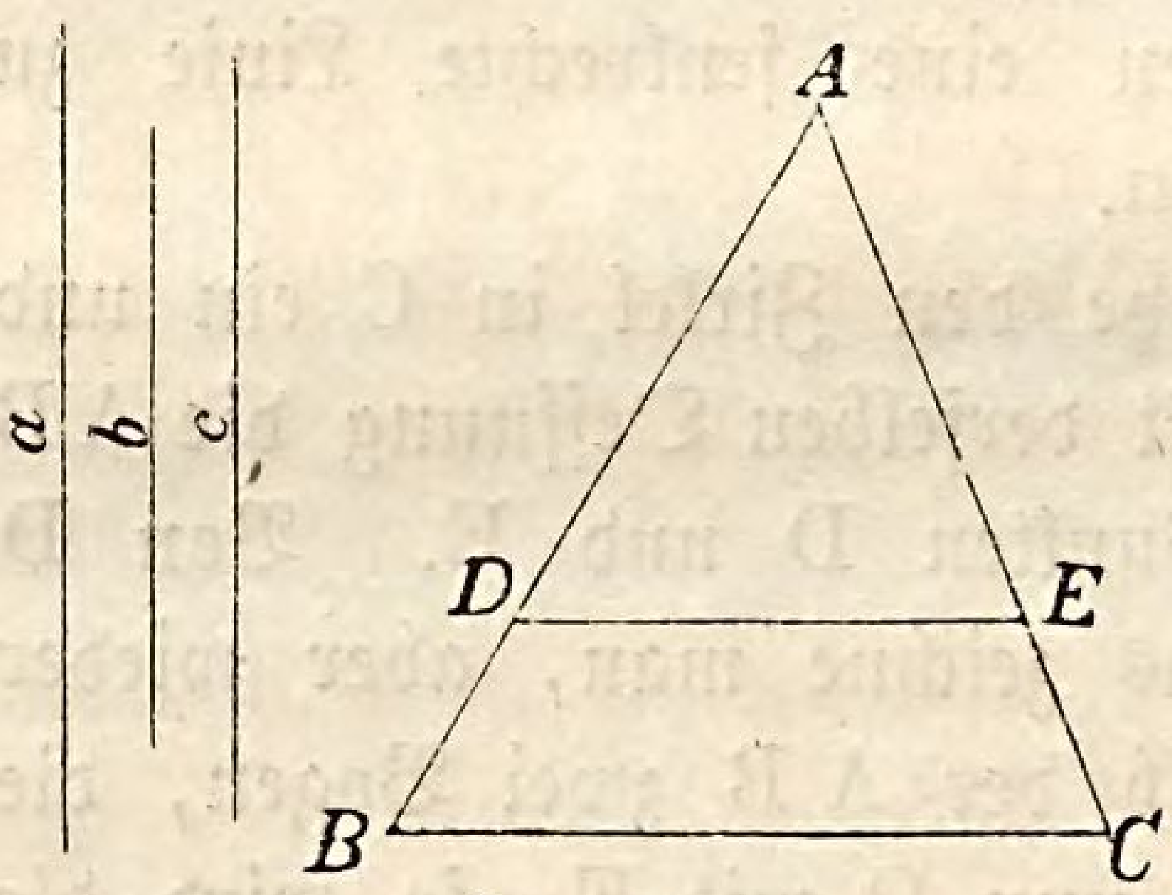


Fig. 11.

21. Zu drei gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionallinie zu zeichnen, d. h. eine Linie $x = \frac{bc}{a}$.

Man zeichne einen beliebigen Winkel, gebe demselben die Linien a und c zu Schenkeln, sodaß A B = a und A C = c ist und ziehe B C. Hierauf schneide man von A aus A D = b ab und ziehe D E parallel B C, so ist A E die gesuchte Linie; denn A B : A D = A C : A E oder a : b = c : A E, d. h. die Linie A E oder die verlangte vierte Proportionale ist

$$x = \frac{bc}{a}.$$

22. Eine Linie y zu zeichnen, welche der Gleichung

$$y = \frac{b^2}{a}$$

entspricht, d. h. welche die dritte Proportionallinie zu den beiden gegebenen Linien a und b ist.

Da hier die Proportion

$$a : b = b : y$$

gilt, so ist diese Aufgabe wie die vorige zu behandeln, und nur darin von derselben verschieden, daß die zweite und dritte Linie

einander gleich sind, welcher Umstand auf das zu beobachtende Verfahren keinen Einfluß ausübt.

23. Zu zwei gegebenen geraden Linien a und b die mittlere Proportionale x zu finden, d. h. eine Linie x zu zeichnen, welche durch die Gleichung

$$x = \sqrt{ab}$$

gegeben ist.

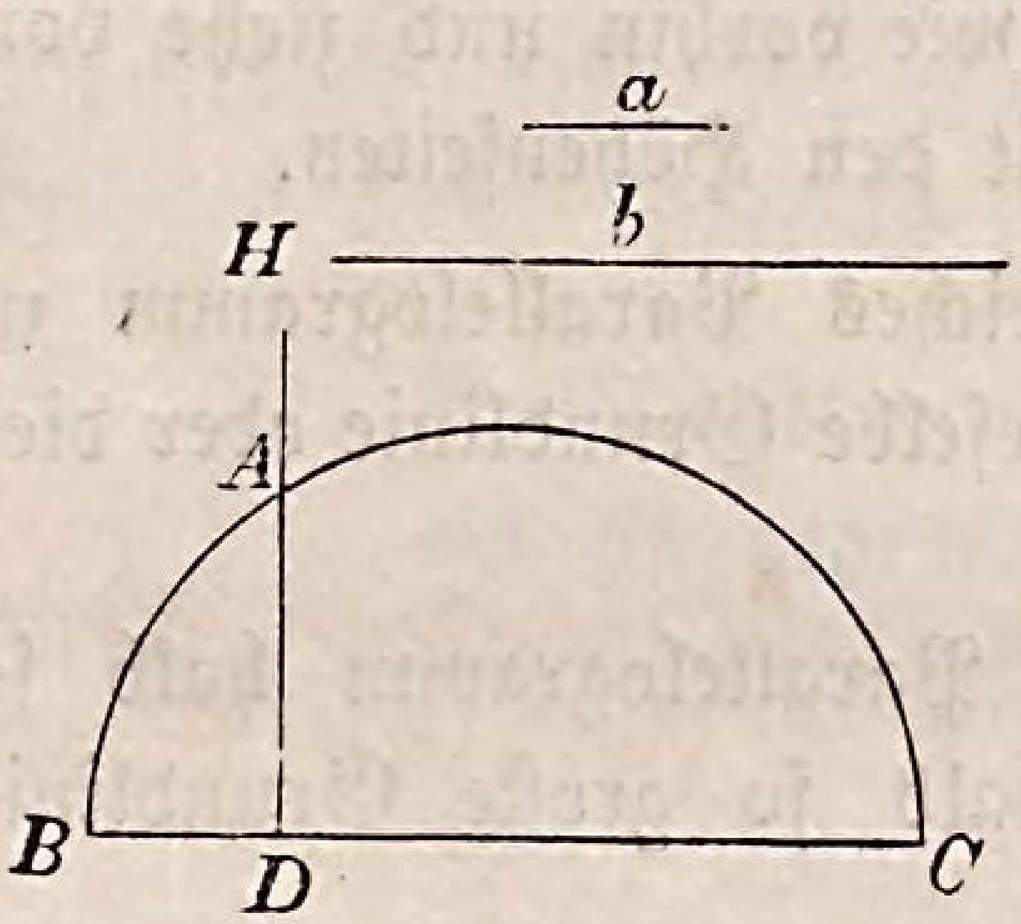


Fig. 12 a.

Erste Lösung. Man zeichne eine gerade Linie B C = a + b, sodaß B D = a und D C = b wird, und errichte in D ein Loth D H. Alsdann beschreibe man über B C einen Halbkreis, den das Loth in A trifft. Die senkrechte A D ist die gesuchte mittlere Proportionallinie.

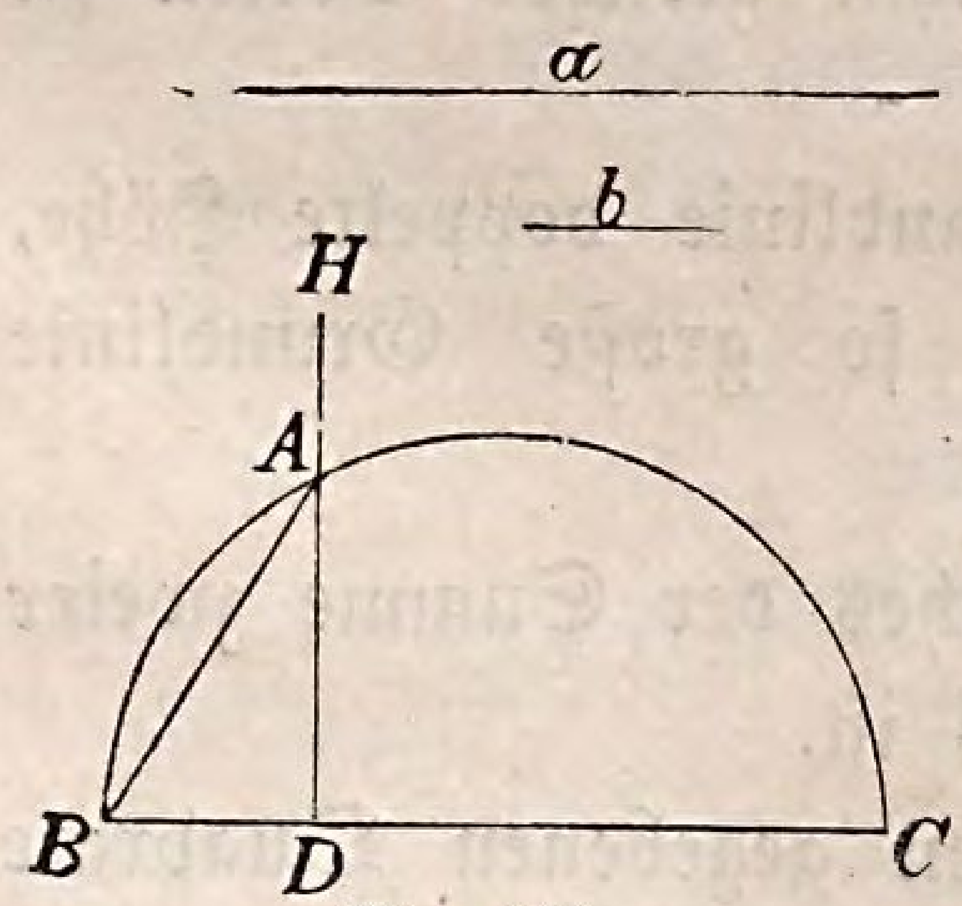


Fig. 12 b.

Zweite Lösung. Man zeichne eine gerade Linie B C = a, schneide von B aus B D = b ab, errichte in D die senkrechte D H, beschreibe über B C einen Halbkreis, der die D H in A schneidet, und verbinde A mit B, so ist A B die gesuchte Linie.

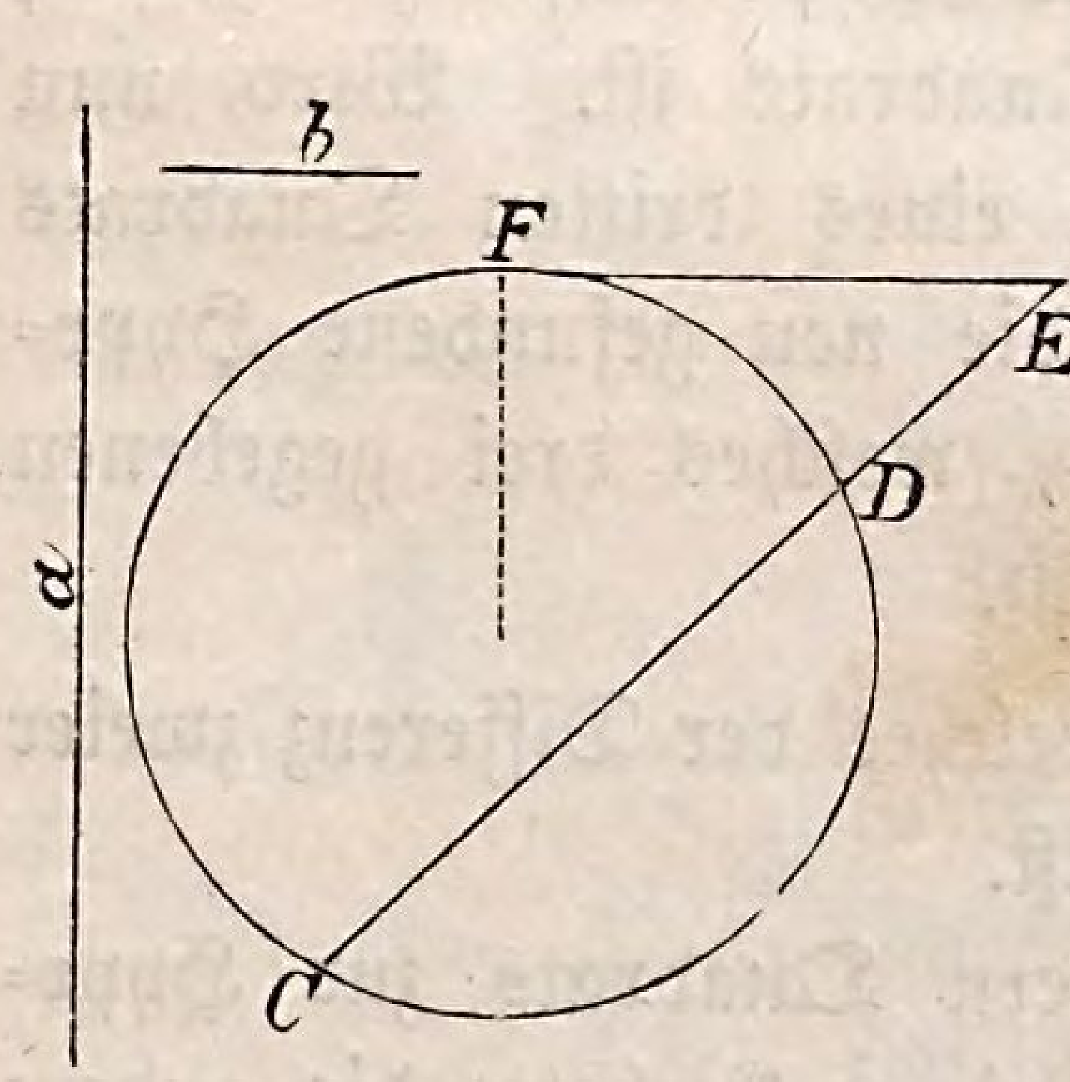


Fig. 13.

Dritte Lösung. Man zeichne eine gerade Linie C E = a und mache D E = b. Hierauf beschreibe man einen Kreis, und zwar so, daß C D (die Differenz der beiden gegebenen Linien) als Sehne in denselben zu liegen kommt, und ziehe von E aus die Tangente E F, welche die verlangte mittlere Proportionale ist.

Anmerkung. Hiernach läßt sich ein Rechteck sofort in ein gleichgroßes Quadrat verwandeln.

24. Ein Dreieck in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen.

Die verlangte Theilung werde mit der Grundlinie vorgenommen. Die Verbindungslinien der Theilpunkte mit der Spitze des Dreiecks theilen dasselbe der gemachten Forderung gemäß.

25. Ein Parallelogramm in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen.

Man verfahre mit der Grundlinie wie vorhin und ziehe von den Theilpunkten aus Parallellinien mit den Höhenseiten.

26. Ein Dreieck in ein ihm gleiches Parallelogramm zu verwandeln, das entweder dieselbe Grundlinie oder dieselbe Höhe hat.

Im ersten Falle muß man dem Parallelogramm halb so große Höhe, im zweiten aber eine halb so große Grundlinie geben.

27. Ein Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreieck zu verwandeln.

Das Dreieck muß bei derselben Grundlinie doppelte Höhe, und bei derselben Höhe eine doppelt so große Grundlinie erhalten.

28. Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Summe zweier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Man hat nur die Seiten der beiden gegebenen Quadrate rechtwinkelig zusammenzusetzen und die Hypotenuse zu ziehen, welche die Seite des verlangten Quadrats ist. Wird nun wieder mit der Hypotenuse die Seite eines dritten Quadrats rechtwinkelig zusammengesetzt, so gibt die neu gefundene Hypotenuse die Seite desjenigen Quadrats, welches drei gegebenen Quadraten zusammengenommen gleich ist.

29. Ein Quadrat zu zeichnen, welches der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Man mache die Seite des größern Quadrats zur Hypotenuse und die Seite des kleinern zu einer Kathete; die andere Kathete ist die Seite des verlangten Quadrats. Um das hierzu erforderliche rechtwinkelige Dreieck zu construiren, hat man nur die Hypotenuse zum Durchmesser eines Kreises zu machen und

von einem ihrer Endpunkte aus, mit einer Zirkelöffnung, gleich der gegebenen Kathete, die Peripherie zu schneiden und diesen Durchschnittspunkt mit den beiden Endpunkten der Hypotenuse zu verbinden.

30. Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebenes.

Man zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Seite des gegebenen Quadrats ist. Die Katheten dieses Dreiecks sind Seiten des verlangten Quadrats.

31. Ein Quadrat zu zeichnen, welches doppelt so groß ist, als ein gegebenes.

Das Verfahren ist wie bei Nr. 28, nur daß hier der rechte Winkel gleichschenkelig wird.

32. Ein Dreieck oder ein Vieleck zu zeichnen, das einem andern gegebenen Dreieck oder Vieleck ähnlich ist.

Im Dreieck hat man nur eine Linie zu ziehen, die parallel mit einer Seite läuft. Oder man zeichnet innerhalb des gegebenen Dreiecks einen andern Triangel, dessen Seiten mit denen des ersten parallel laufen.

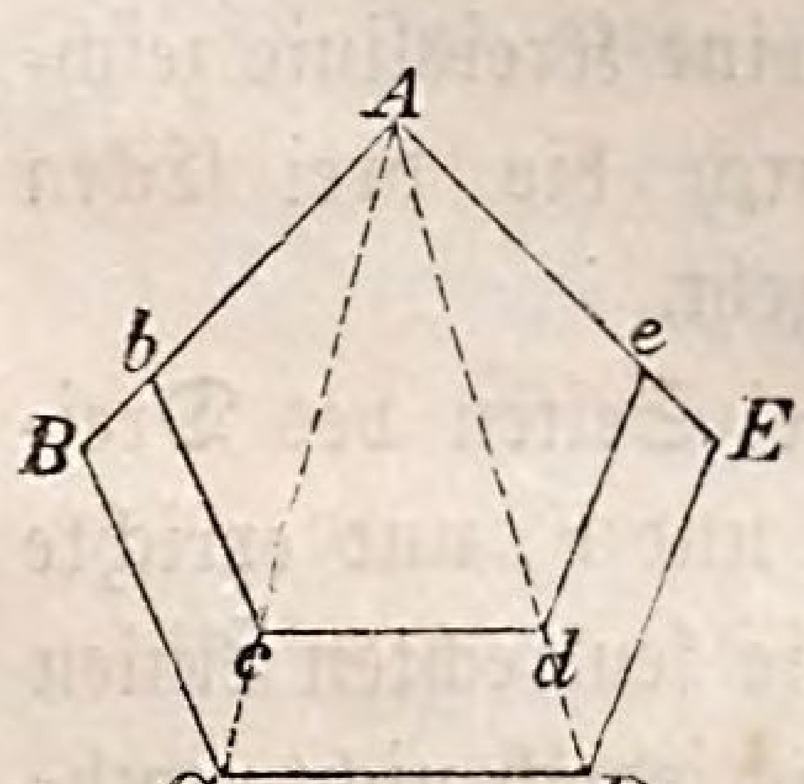


Fig. 14 a.

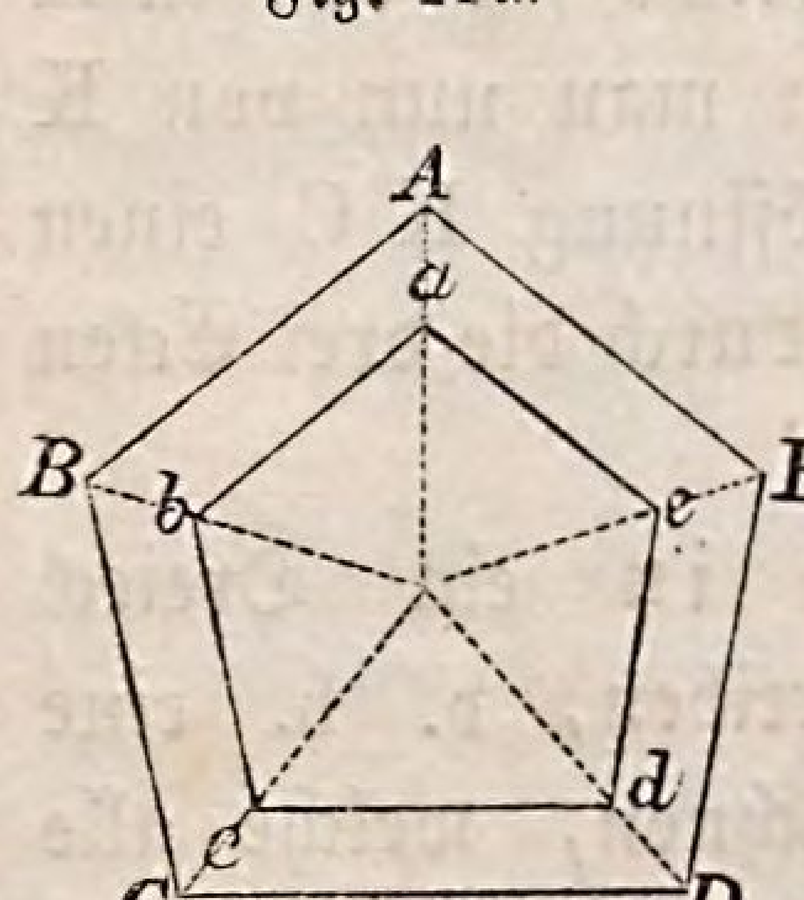


Fig. 14 b.

Um ein Vieleck zu verzeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist, kann man dasselbe entweder durch Diagonalen, oder durch Verbindungslinien zwischen einem innern Punkte und den Endpunkten der Figur in Dreiecke zerlegen und durch die Theilungslinien Parallellinien mit den Vielecksseiten legen. Jedoch müssen diese Parallellinien miteinander in Verbindung stehen, damit sie die verlangte Figur von dem gegebenen Vieleck abschneiden können. (Vieleck A B C D E ist gegeben; A b c d e oder a b c d e wird gesucht.)

Oder man nehme a b beliebig; trage an

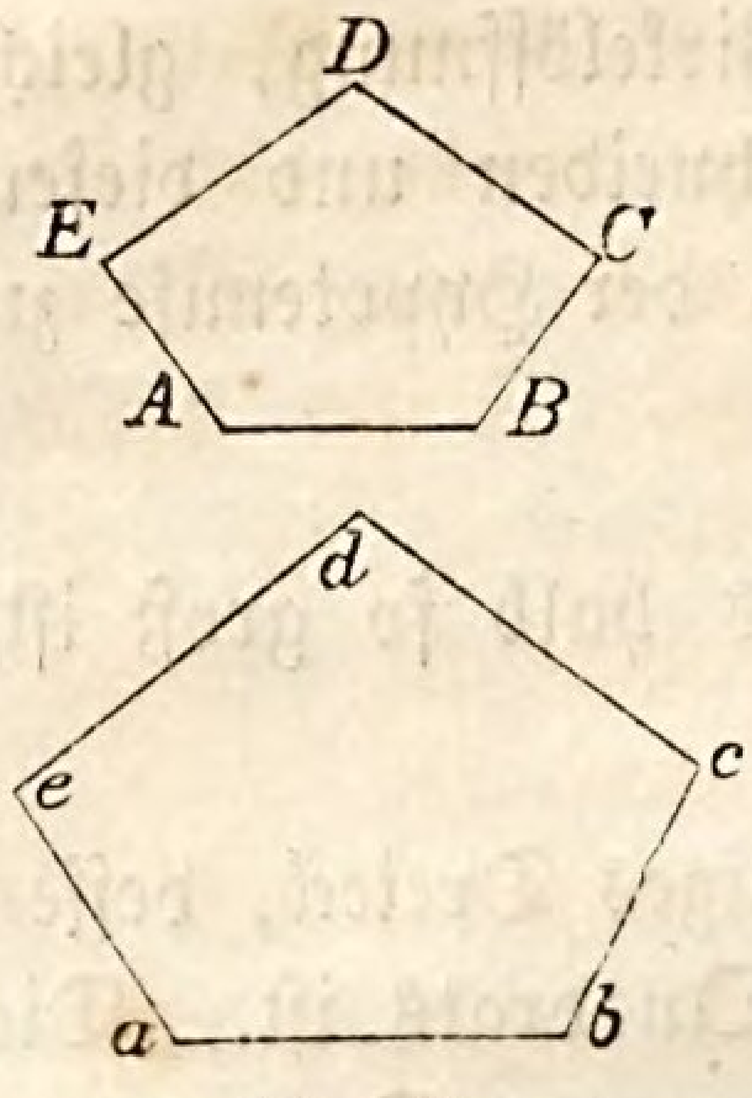


Fig. 15.

b einen Winkel = B, mache b c der vierten Proportionallinie zu A B, B C und a b gleich; trage an c einen Winkel = C, mache c d der vierten Proportionallinie zu B C, C D und b c gleich; trage an d einen Winkel = D, mache d e der vierten Proportionallinie zu C D, D E und c d gleich und trage endlich an e einen Winkel = E, dessen Schenkel e a die a b in a trifft: so wird a b c d e ∾ A B C D E.

33. Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen in jeder Hinsicht völlig gleich ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck (am bequemsten durch Diagonalen) in Dreiecke und trage diese der Reihe nach einzeln über, so erhält man das verlangte Vieleck. Ganz dasselbe Resultat ergibt sich aber auch ohne Hülfe von Diagonalen, wenn man nicht blos Seiten, sondern auch die von ihnen eingeschlossenen Winkel in derselben Ordnung überträgt.

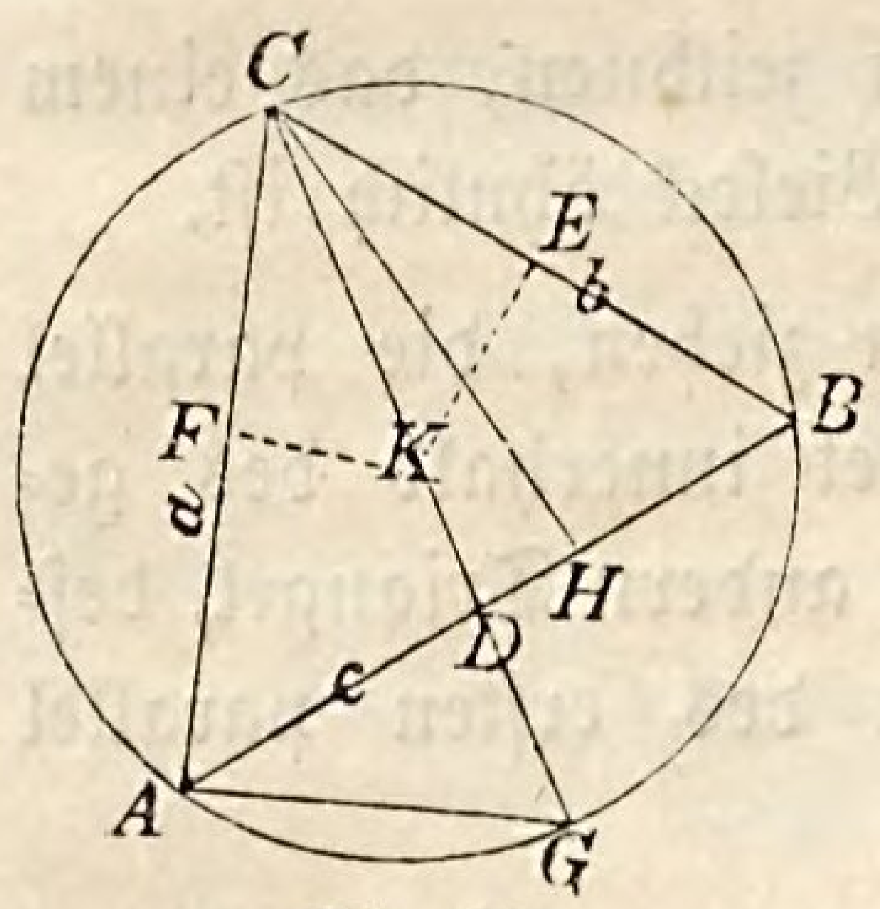


Fig. 16.

34. Einen Kreis um das Dreieck beschreiben, d. h. eine Kreislinie zeichnen, welche durch die drei Ecken eines Dreiecks geht.

Man halbire die drei Seiten des Dreiecks A B C in D, E und F, und errichte in diesen Punkten die senkrechten Linien D K, E K und (was jedoch nicht nothwendig ist) F K, welche sich alle in K schneiden. Beschreibt man nun von K aus mit der Zirkelöffnung K C einen Kreis, so geht dieser durch die drei Ecken des Dreiecks.

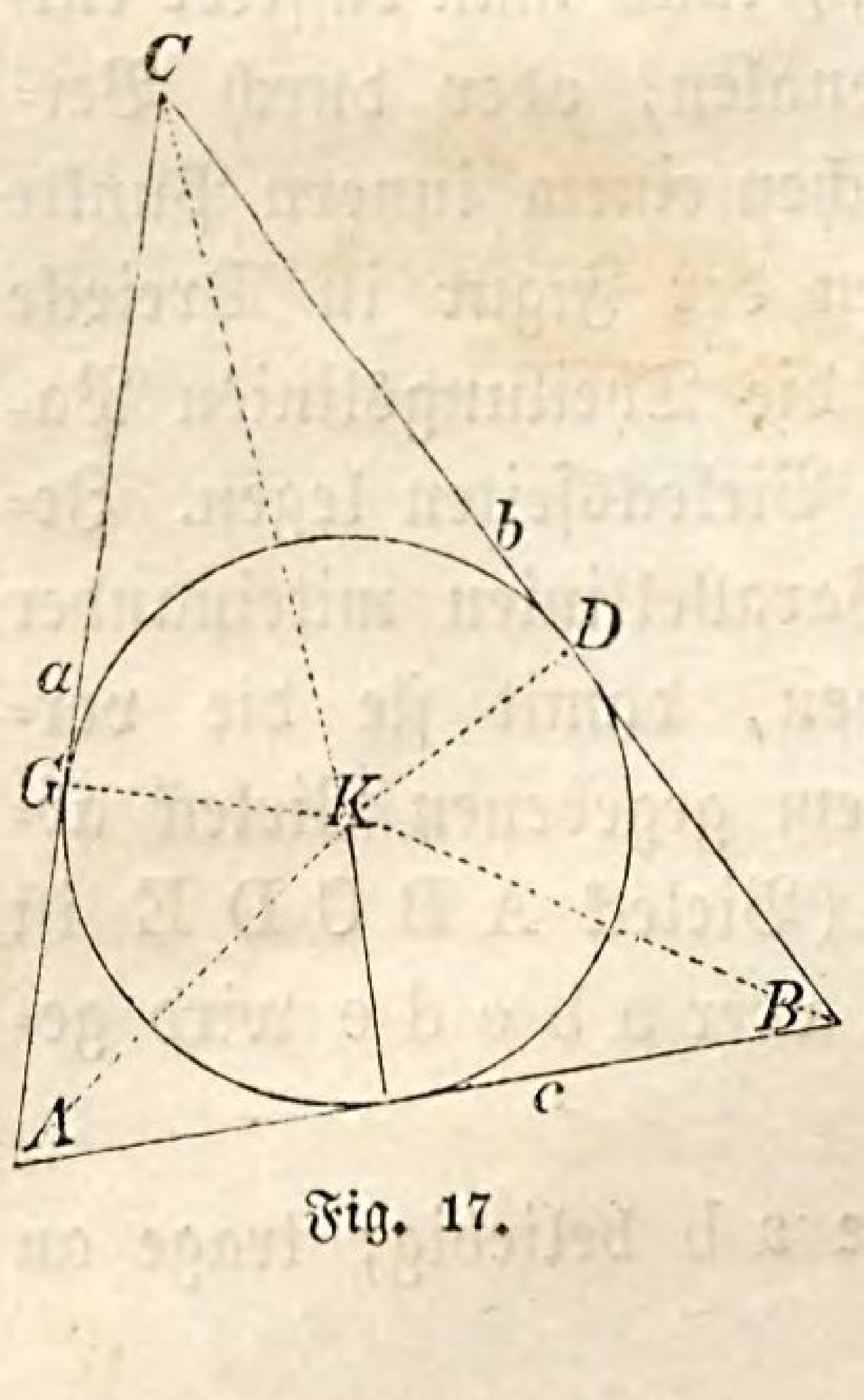


Fig. 17.

35. Einen Kreis in ein Dreieck A B C beschreiben, d. h. eine Kreislinie zeichnen, welche alle drei Seiten des Dreiecks innerlich berührt.

Man halbirt zwei Winkel A und C. Die Halbirungslinien A K und C K schneiden sich in K. Von diesem Punkte aus errichtet man ein Loth K G auf A C und macht K zum Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius = K G ist. Dieser Kreis entspricht völlig den gestellten Forderungen.

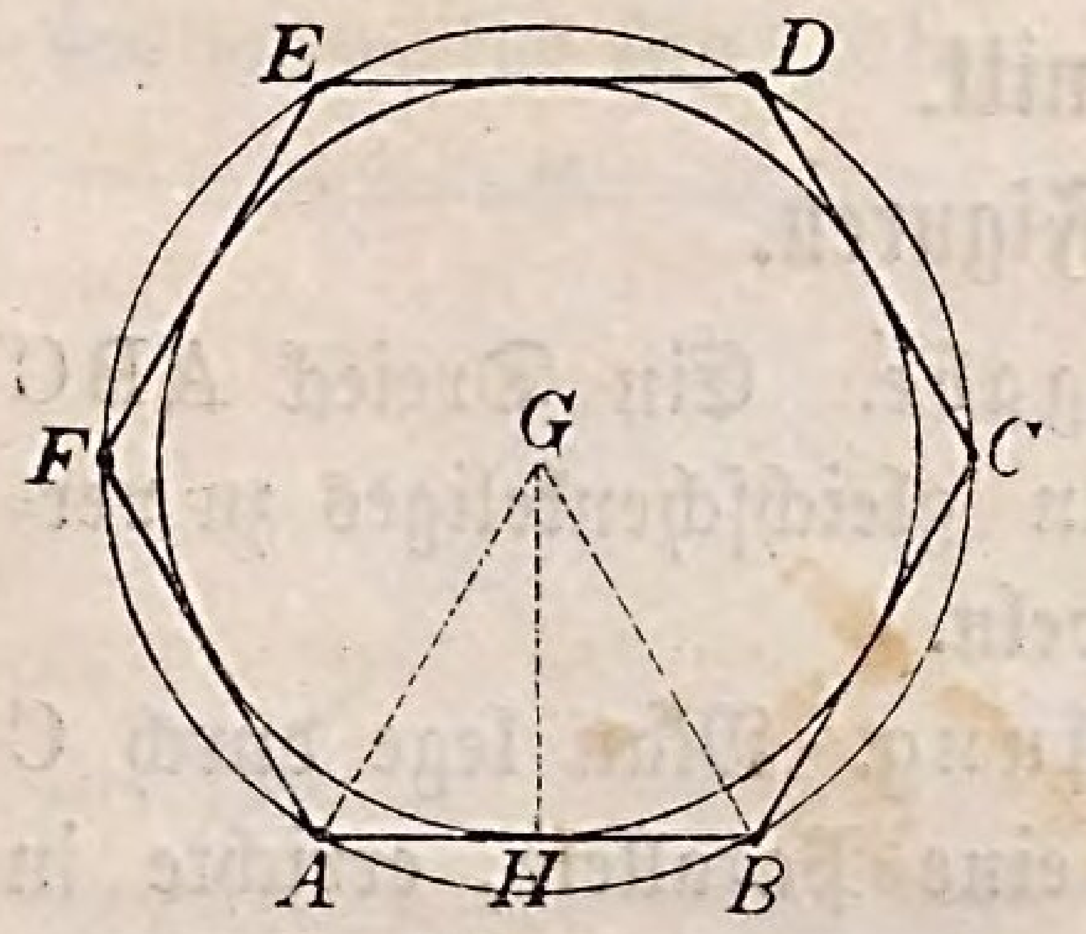


Fig. 18.

36. In ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis beschreiben.

Man halbire die Winkel A und B, so wie die Seite A B, bezüglich durch A G, B G und die senkrechte H G, welche alle drei in G sich schneiden. Alsdann beschreibe man mit einer Zirkelöffnung = G H um G einen Kreis, der alle Seiten des regulären Vielecks berührt.

37. Um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis beschreiben (siehe Fig. 18).

Man halbire die Winkel A und B. Die Halbirungslinien A G und B G treffen sich in G, wo der Mittelpunkt des verlangten Kreises ist, dessen Radius = G A. Dieser Kreis geht durch alle Ecken der Figur hindurch, macht also die Seiten derselben, wie verlangt wurde, zu Sehnen.

38. Einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe mehrerer Kreise gleich ist.

Was bei Aufgabe 28 mit den Seiten der Quadrate geschah, wird hier mit den Durchmessern der Kreise vorgenommen.

39. Die Differenz zweier Kreise als Kreis darstellen.

Das bei Aufgabe 29 beobachtete Verfahren wird hier auf die Durchmesser der beiden Kreise angewendet.

40. Die Summe zweier ähnlichen Vielecke als ein Vieleck darstellen, das ihnen ebenfalls ähnlich ist.

Dieser Fall beruht wieder auf dem Pythagoräischen Lehrsatze. Man zeichne nämlich einen rechten Winkel, mache die Schenkel desselben zwei homologen (d. i. gleichliegenden) Seiten der beiden gegebenen ähnlichen Vielecke gleich und ziehe die Hypotenuse, so ist das auf derselben construirte ähnliche Vieleck allemal gleich der

Summe der beiden gegebenen, ähnlichen und auf den Katheten construirten Vielecke.

Zusatz. Wäre statt der Summe die Differenz verlangt, so müßte wie in Aufgabe 29 verfahren werden, hier natürlich mit den homologen Vielecksseiten.

Zweiter Abschnitt.

Verwandlung der Figuren.

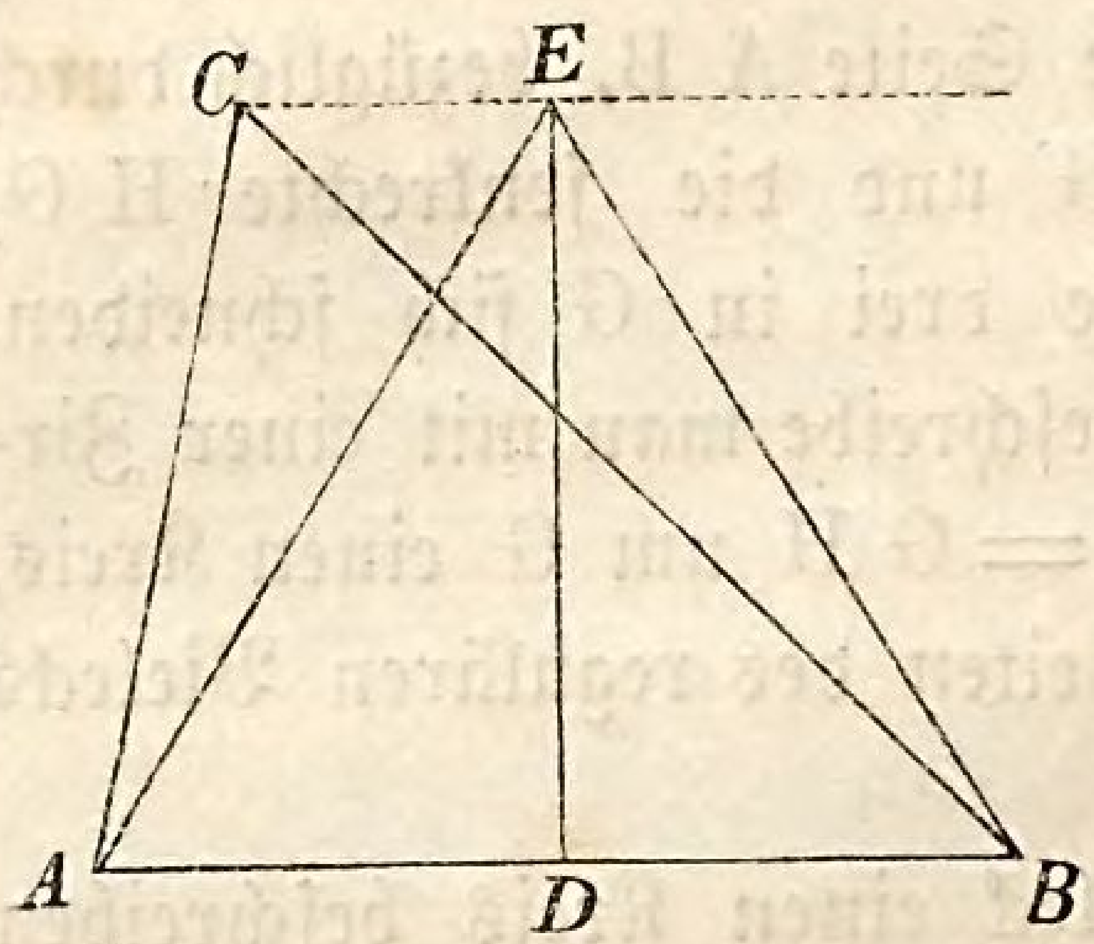


Fig. 19.

41. Aufgabe. Ein Dreieck ABC in ein gleichschenkeliges zu verwandeln.

Auflösung. Man lege durch C mit A B eine Parallele, errichte in D, der Mitte von A B, ein Loth bis zu derselben, ziehe A E und B E, so ist △ A B E gleichschenkelig und dem gegebenen Triangel gleich.

42. Aufgabe. Ein Dreieck ABC in ein anderes gleiches Dreieck zu verwandeln, welches zwar dieselbe Grundlinie, aber einen gegebenen Winkel B A E noch hat. (Fig. 19.)

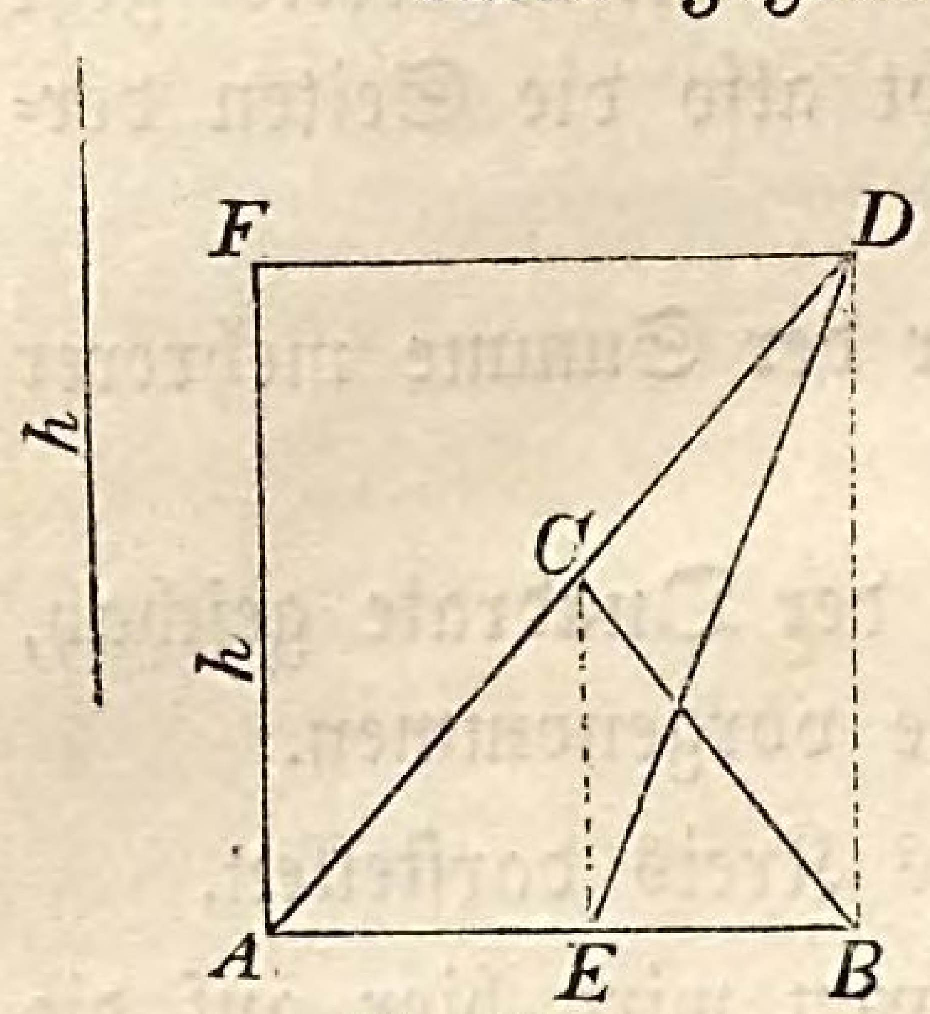


Fig. 20 a.

Auflösung. Man trage den gegebenen Winkel B A E auf der Grundlinie A B an den Punkt A an, verlängere den Schenkel A E, bis er die durch C gelegte Parallele trifft. Den so gefundenen Punkt E verbinde man mit A und B, so ist △ A B E das verlangte.

43. Aufgabe. Dreieck A B C in ein anderes von gegebener Höhe, h, zu verwandeln.

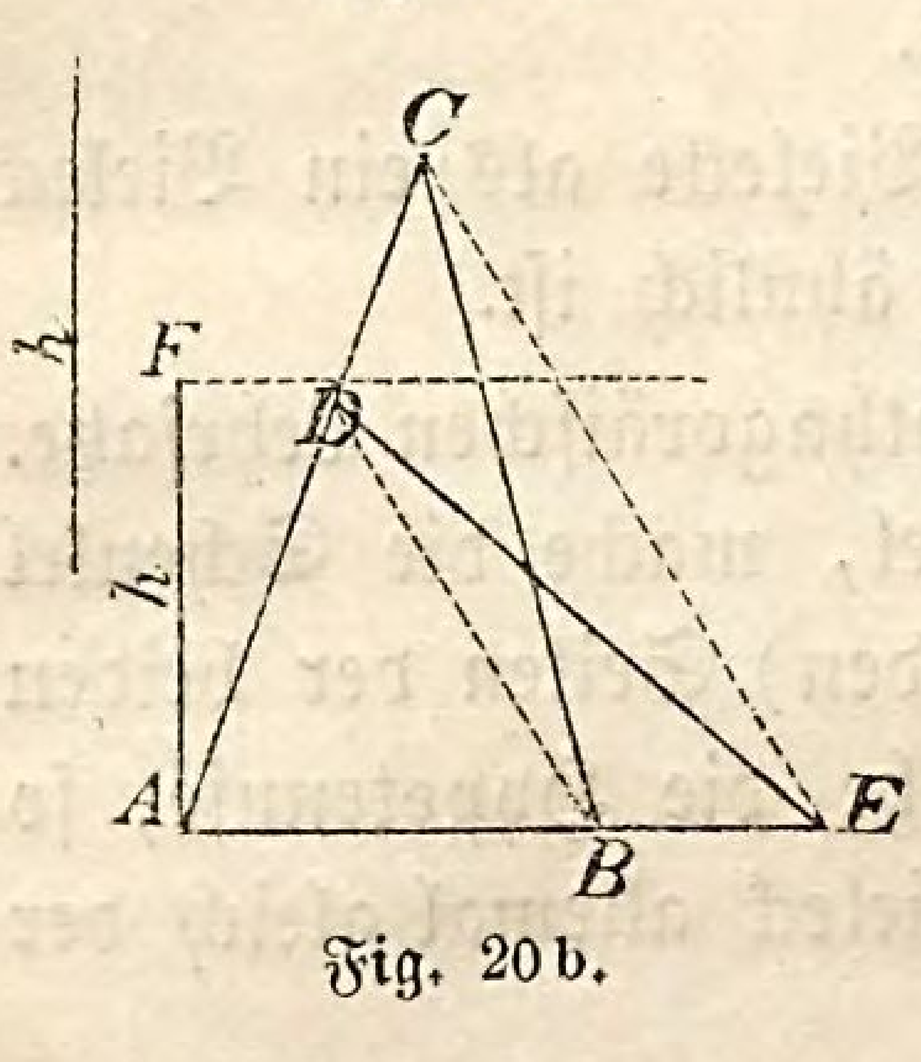


Fig. 20 b.

Auflösung. Man errichte in A ein Loth = h, lege durch F eine Parallele, bis A C oder deren Verlängerung geschnitten wird, ziehe B D, lege durch C mit B D eine Parallele, bis die A B oder deren Verlängerung geschnitten wird; ziehe dann DE, so ist △ ADE das verlangte.

Beweis. $\triangle AEC = \triangle AEC$

$\triangle CED = \triangle CEB$ (wegen derselben Grundlinie und gleicher Höhe)

$\triangle AEC \pm \triangle CED = \triangle AEC \pm CEB$ oder

$\triangle ADE = \triangle ABC$.

Anmerkung. Von den Zeichen $\pm$ gilt das obere für Fig. 20a, das untere für Fig. 20b.

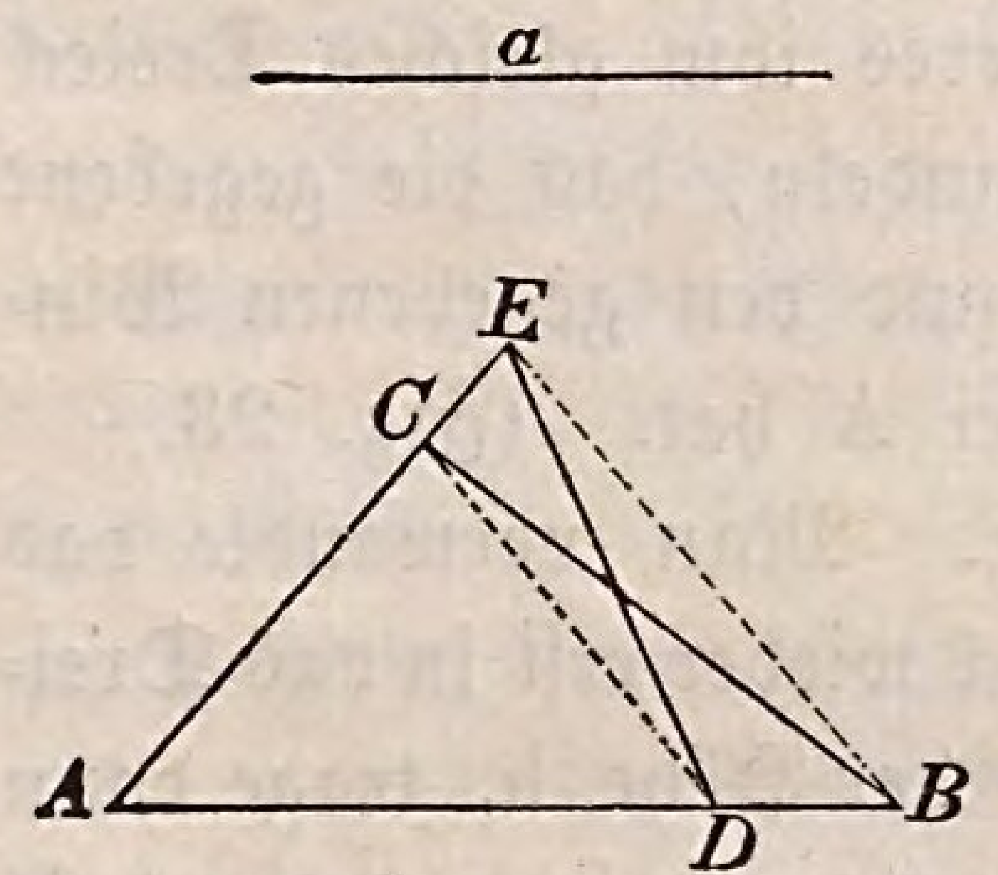


Fig. 21a.

44. Aufgabe. Dreieck A B C in ein anderes von gegebener Grundlinie, a, zu verwandeln.

Auflösung. Man mache A D = a, ziehe C D, lege durch B mit C D eine Parallele, bis A C oder deren Verlängerung geschnitten wird, und ziehe D E; so ist $\triangle$ A D E das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle ADC = \triangle ADC$

$\triangle CDE = \triangle BCD$ (wegen gleicher Grundlinie und gleicher Höhe)

$\triangle ADC \pm \triangle CDE = \triangle ADC \pm \triangle BCD$

d. h. $\triangle ADE = \triangle ABC$.

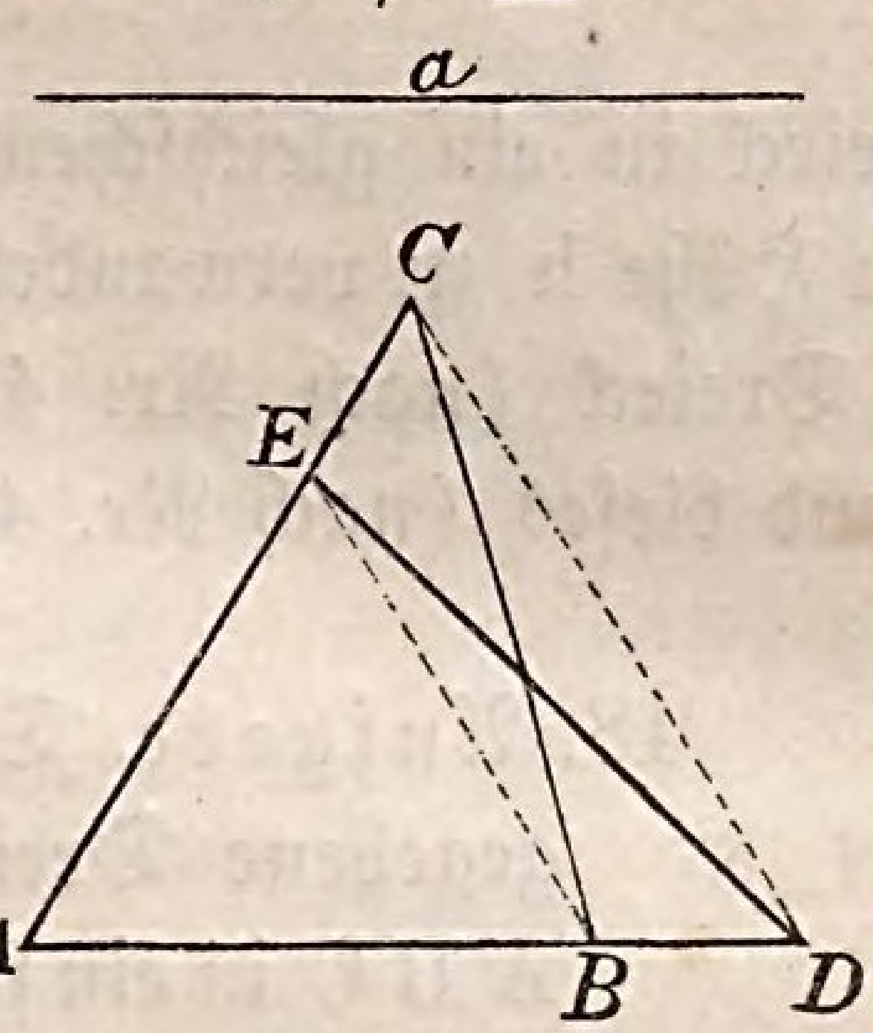


Fig. 21b.

Anmerkung. Von dem Zeichen $\pm$ gilt das obere für Fig. 21a, das untere für Fig. 21b.

45. Aufgabe. Dreieck A B C in ein anderes ihm gleiches Dreieck zu verwandeln, dessen Höhe = h und dessen eine Seite = a gegeben ist. (Fig. 22.)

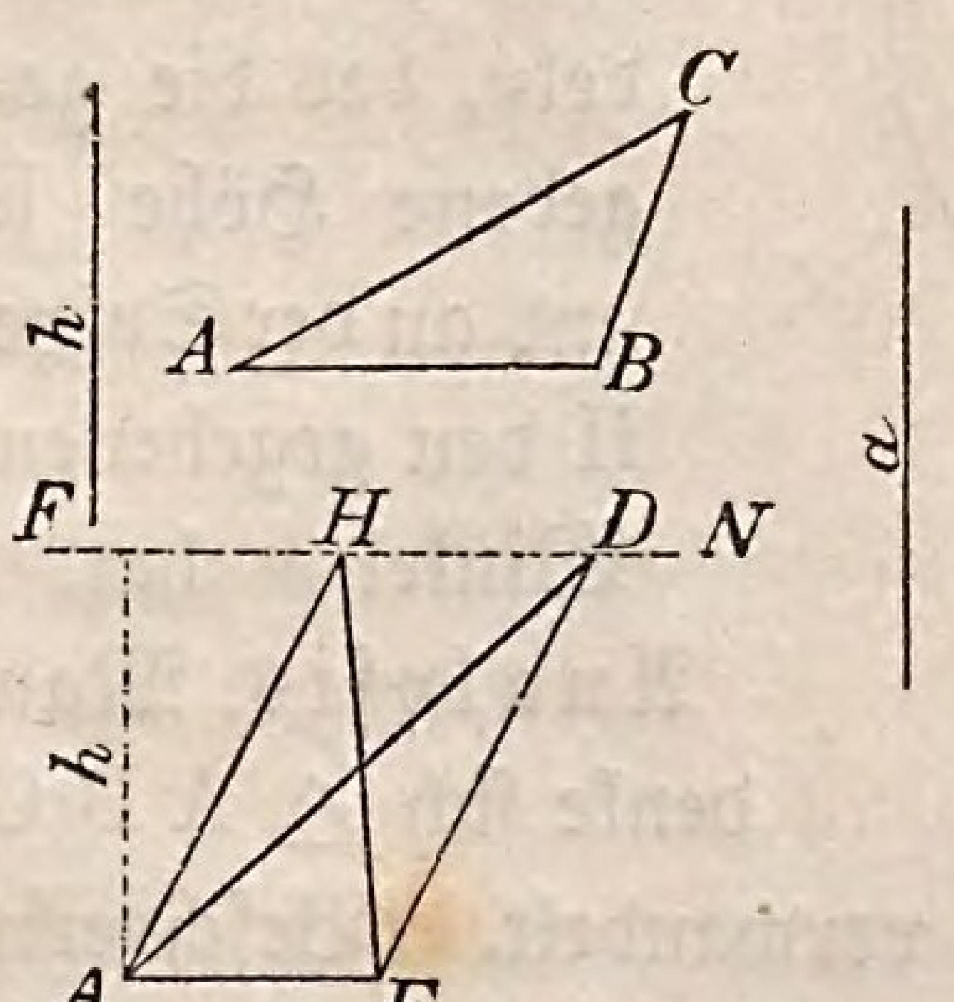


Fig. 22.

Auflösung. Man verwandle $\triangle$ ABC nach Aufgabe 43 erst in das $\triangle$ A D E von der Höhe h, schneide alsdann von A oder E aus mit einer Zirkelöffnung = a die durch die Spitze der Höhe gezogene und mit der A B parallel laufende Linie F N, und verbinde den Durchschnittspunkt H mit A und E: so ist Dreieck A E H das verlangte.

Beweis. $\triangle ABC = \triangle ADE$ (siehe Nr. 43)
$\triangle ADE = \triangle AEH$ (wegen gleicher Grundlinie und gleicher Höhe);

folglich $\triangle ABC = \triangle AEH$,

während noch die Höhe desselben = h, und die Seite A H = a ist, wie die Construction zeigt.

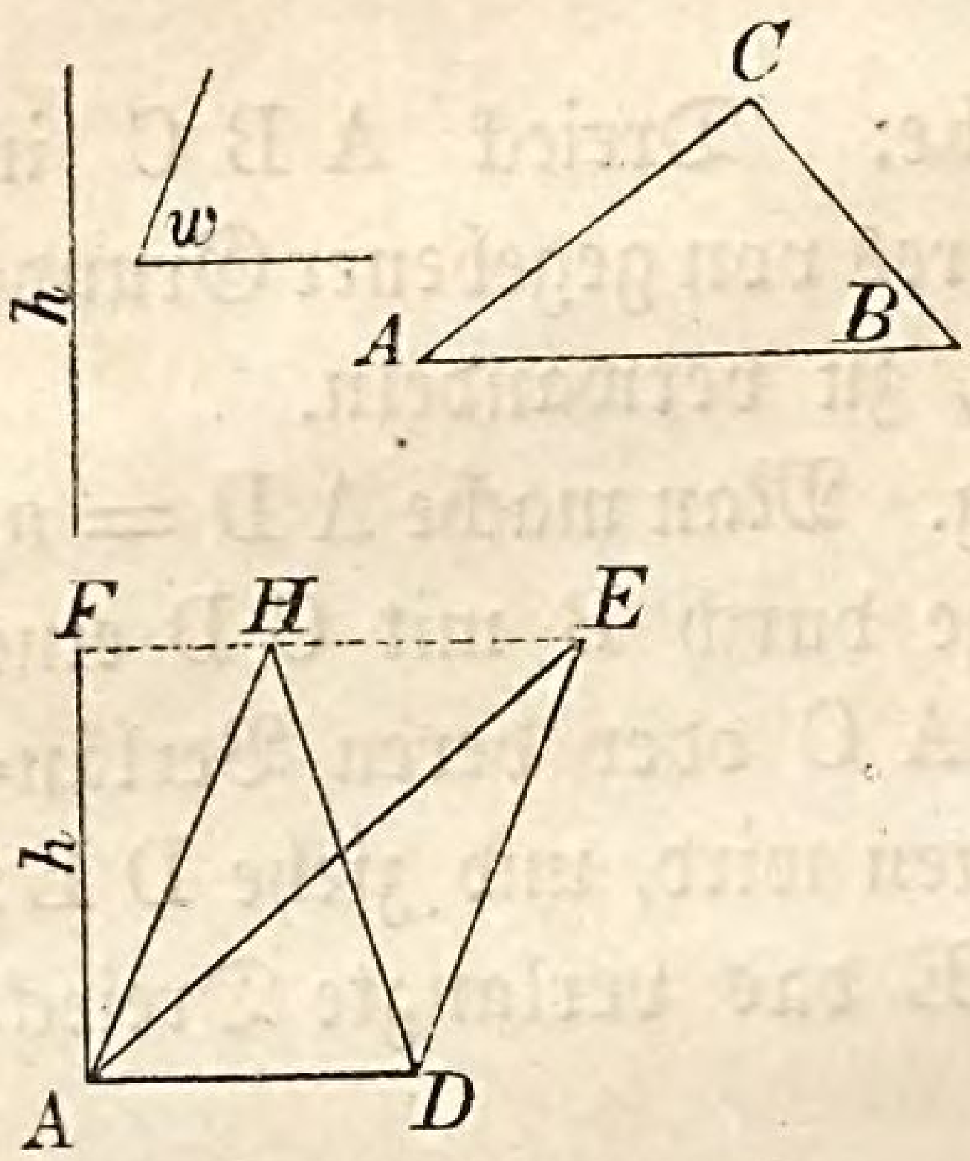


Fig. 23.

46. Aufgabe. Dreieck A B C in ein anderes ihm gleiches Dreieck zu verwandeln, das die gegebene Höhe h und den gegebenen Winkel w bei A hat. (Fig. 23.)

Auflösung. Man verwandle das gegebene Dreieck wieder erst in das Dreieck A D E von der Höhe h, trage dann an Punkt A und an die gerade A D den gegebenen Winkel w an und verlängere den Schenkel A H bis zum Zusammentreffen mit der Parallele F E. Verbindet man nun noch diesen Durchschnittspunkt H mit A und D, so ist Dreieck A D H das verlangte.

47. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkeliges Dreieck von der gegebenen Höhe h zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck (nach Nr. 43) erst in ein solches, das die Höhe h hat, und dieses (nach Nr. 41) in ein gleichschenkeliges.

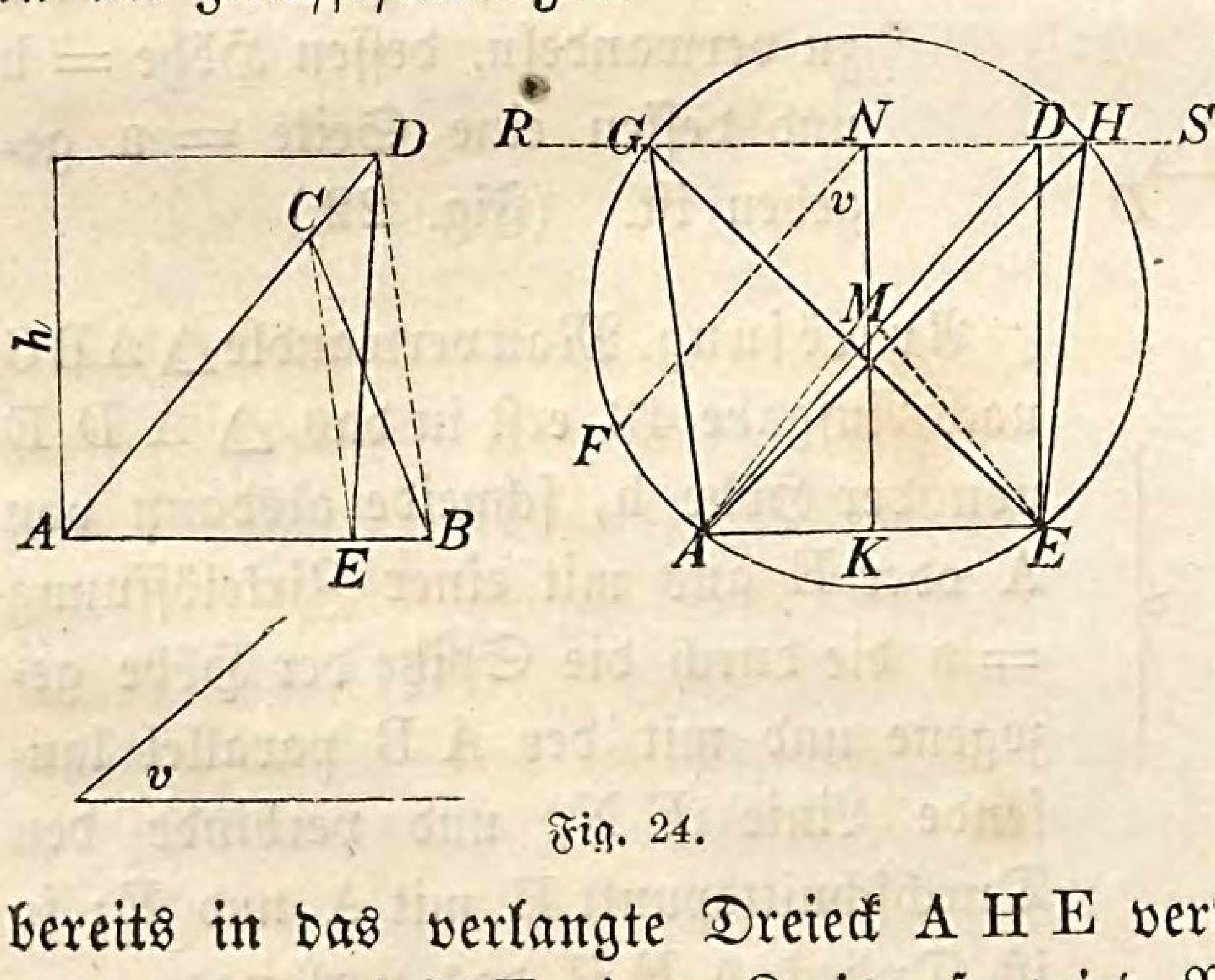


Fig. 24.

48. Aufgabe. Das gegebene Dreieck A B C in ein solches zu verwandeln, das die gegebene Höhe h und an der Spitze H den gegebenen Winkel v hat.

Analysis. Man denke sich $\triangle$ A B C bereits in das verlangte Dreieck A H E verwandelt. Beschreibt man um $\triangle$ A H E einen Kreis, so wird Winkel A H E, d. i.

Winkel v, Peripheriewinkel, dagegen A E Sehne dieses Kreises. Ist nun M der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, sind also M A und M E Radien desselben, so ist der Centriwinkel A M E = 2 v, und demgemäß

Winkel M A E = Winkel M E A = 90° — v.

Synthetische Lösung. Nachdem △ A B C nach Nr. 43 in das Dreieck A D E von der gegebenen Höhe h verwandelt worden ist, trage man in A und E einen Winkel an = 90° — v; verlängere die Richtungen A M und E M bis zum Zusammentreffen in M; beschreibe aus M mit dem Radius M A oder M E einen Kreis, welcher die Parallele R S in G und H schneidet, und ziehe G A und G E, so wie H A und H E: so hat △ A E G oder △ A E H, die beide congruent sind, die oben verlangten Eigenschaften.

Anmerkung. Zum Beweise, daß Winkel A G E oder A H E = v ist, halbire man die A E in K, errichte im Halbirungspunkte die senkrechte K N und mache Winkel K N F = v. Dann ziehe man von A aus die Gerade A H || F N und verbinde den Punkt H in der R S mit A E: so muß Winkel A H E, aber auch A G E (als Peripheriewinkel auf derselben Sehne) dem gegebenen Winkel v gleich sein.

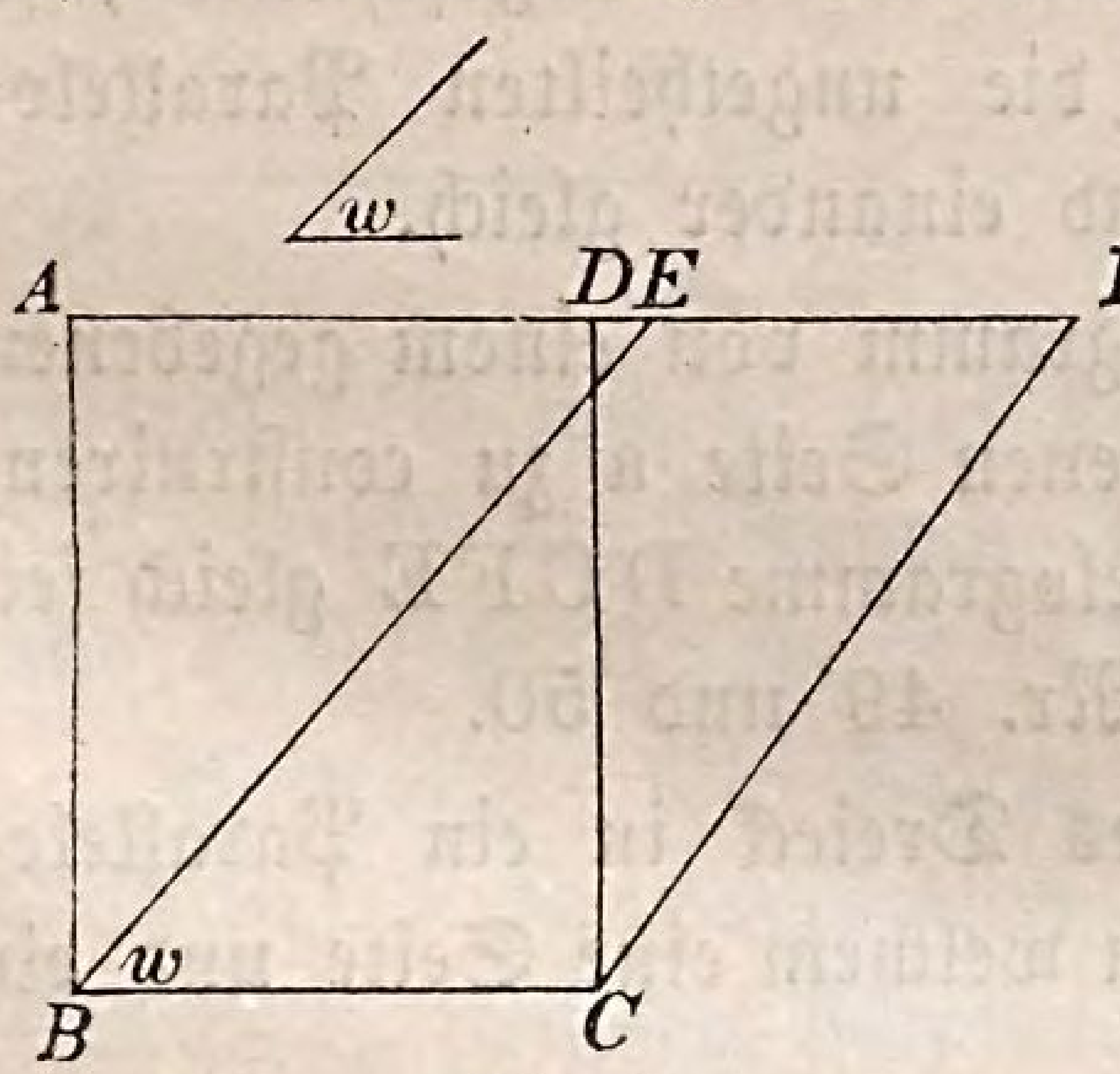


Fig. 25.

49. Aufgabe. Parallelogramm A B C D in ein solches zu verwandeln, das den gegebenen Winkel w hat. (Fig. 25.)

Auflösung. Man trage den Winkel w an die B C in B an; verlängere den Schenkel B E, bis er die A D oder deren Verlängerung in E trifft; ziehe C F || B E bis zum Zusammentreffen mit der Verlängerung von A E: so ist Parallelogramm B C F E das verlangte.

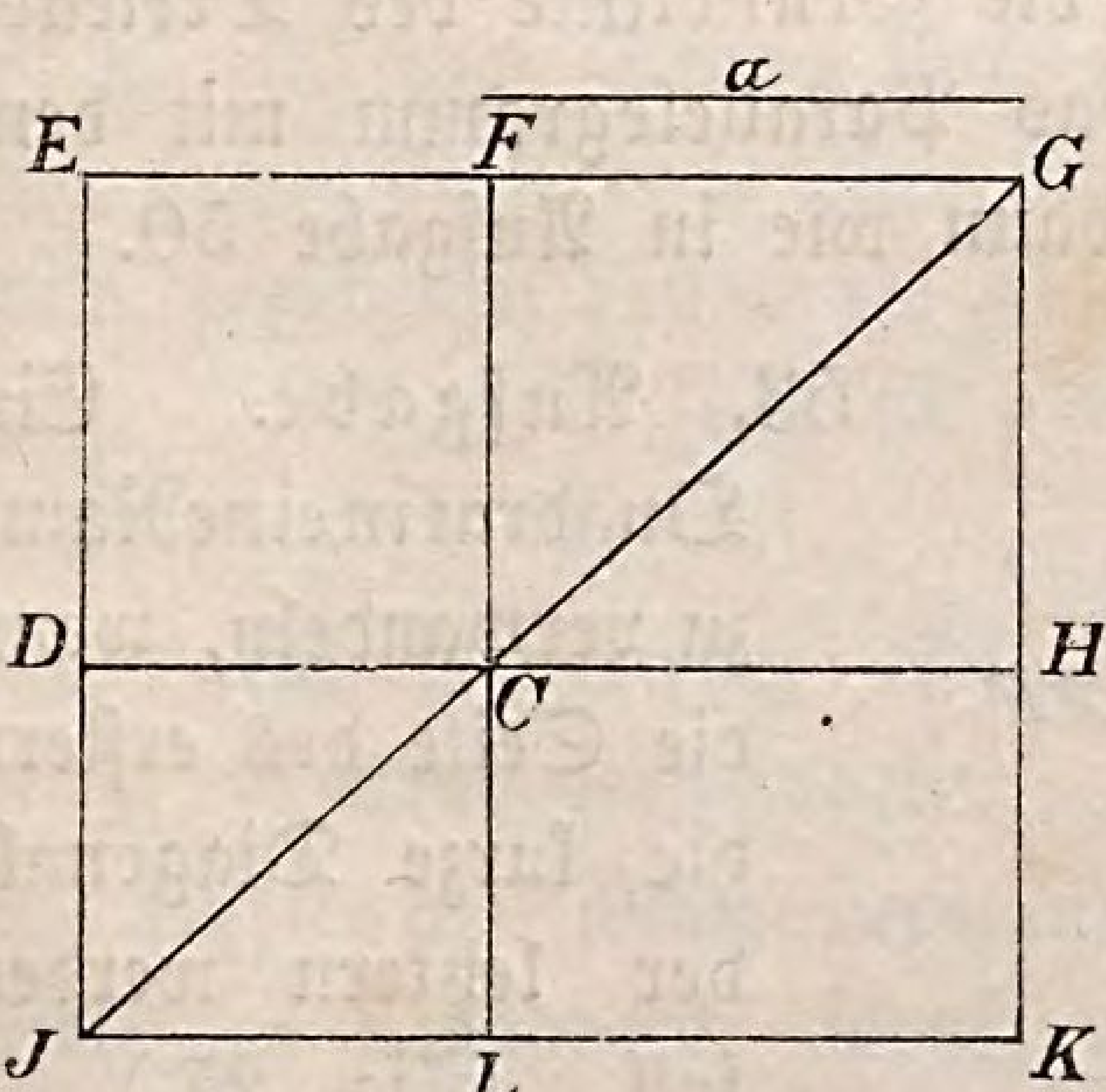


Fig. 26.

50. Aufgabe. Parallelogramm D C F E in ein ihm gleiches

Parallelogramm zu verwandeln, zu welchem eine Seite; = a gegeben ist. (Fig. 26.)

Construction. Man verlängere E F, sodaß F G = a wird desgleichen D C, sodaß C H = F G wird, und verbinde G mit H. Alsdann ziehe man die Diagonale G C und verlängere dieselbe über C hinaus, bis sie die Verlängerung von E D in J trifft. Endlich ziehe man J K || D H und verlängere die Parallelen F C und G H, bis sie die J K in L und K schneiden: so ist Parallelogramm C H K L das verlangte.

Beweis. E G K J ist ein Parallelogramm (per constr.) und wird also durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt. Dasselbe gilt von C D J L und F G H C. Demnach ist

$$\triangle EGJ = \triangle GJK$$
$$\triangle CFG = \triangle CGH$$
$$\triangle CDJ = \triangle CJL.$$

Werden nun die Dreiecke C F G und C D J vom Dreieck E G J, sowie C G H und C J L vom Dreieck G J K abgeschnitten, so muß Gleiches übrig bleiben, d. h. die ungetheilten Parallelogramme E F C D und C H K L sind einander gleich.

51. Aufgabe. Ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel w und einer gegebenen Seite a zu construiren, das dem gegebenen Parallelogramme D C F E gleich sei.

Die Construction geschieht nach Nr. 49 und 50.

52. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, zu welchem eine Seite und ein Winkel gegeben sind.

Construction. Man halbire die Grundlinie des Dreiecks, errichte auf einer solchen Hälfte das Parallelogramm mit dem gegebenen Winkel und verfahre alsdann wie in Aufgabe 50.

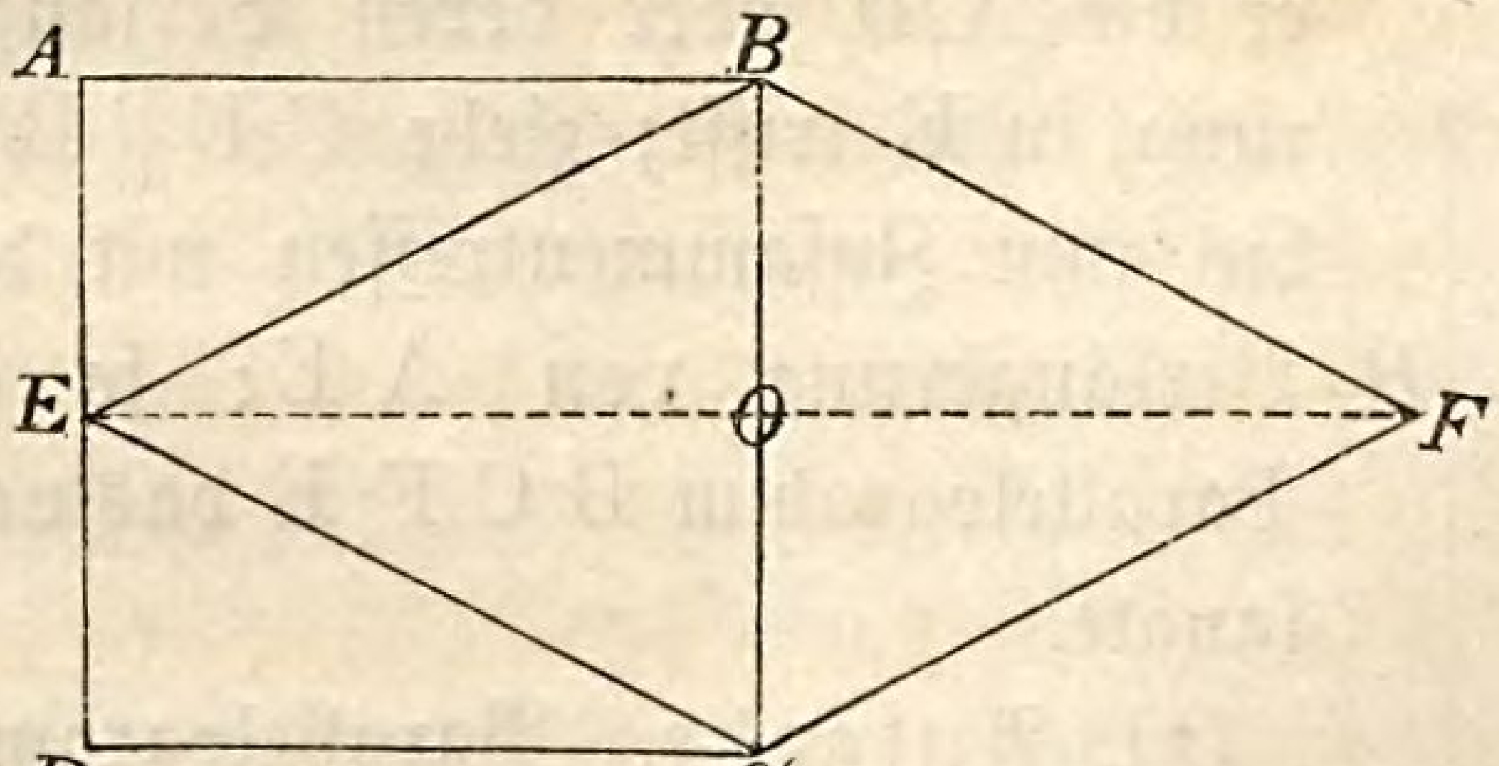


Fig. 27.

53. Aufgabe. Ein Quadrat in eine Raute zu verwandeln, wenn die Seite des erstern die kurze Diagonale der letztern werden soll. (Fig. 27.)

Construction. Man halbirt die Seiten A D und B C, zieht E O und verlängert dieselbe um sich selbst, sodaß O F = E O wird. Alsdann verbindet man die Punkte E und F mit B und C, so entsteht die verlangte Raute E C F B.

Beweis. Die Congruenz der um O herum liegenden vier Dreiecke thut dar, daß B E C F wirklich eine Raute ist. Außerdem beträgt △ B C E die Hälfte des Quadrats A B C D, weil es mit demselben Grundlinie und Höhe gemein hat. Dieses Dreieck ist aber auch die Hälfte der Raute, und muß daher dieselbe im Flächeninhalt dem Quadrat gleich sein.

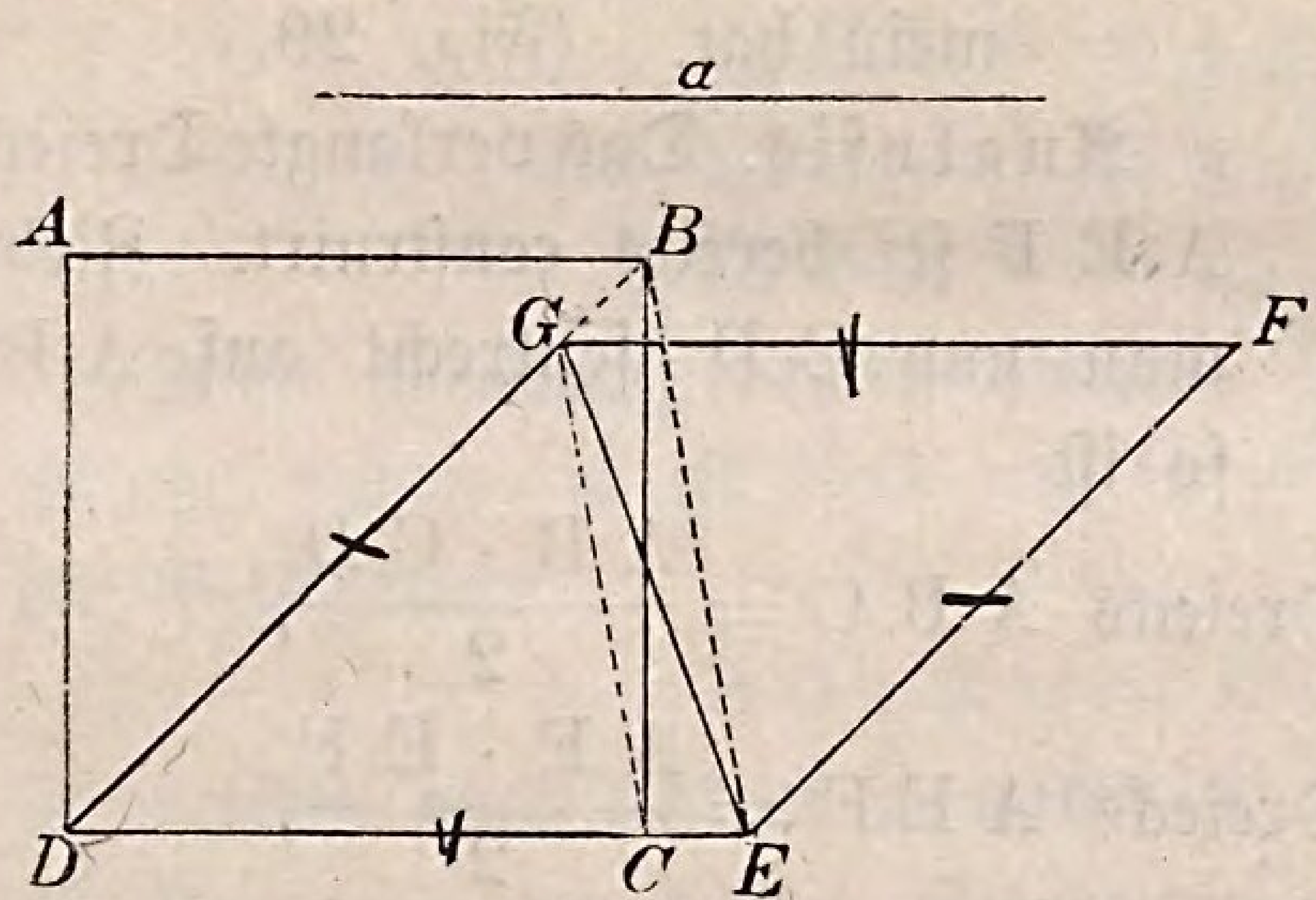


Fig. 28.

54. Aufgabe. Ein Quadrat in eine Raute zu verwandeln, deren Seite = a gegeben ist. (Fig. 28.)

Construction. Man zieht die Diagonale B D; verlängert die D C über C hinaus, sodaß D E = a; verbindet E mit B; legt von C aus mit E B parallel die Linie C G, welche die Diagonale B D in G trifft, und zieht G F || D E und F E || G D: so ist G F E D die verlangte Raute.

Beweis. Die Seiten G F und D E sind parallel, ebenso G D und F E, daher auch G F = D E, und G D = F E (als Parallelen zwischen Parallelen), folglich △ D E G ≌ △ E F G, woraus sich ergibt, daß F G auch = G D und F E = E D; d. h. alle vier Seiten sind untereinander gleich. Deshalb muß die Figur G F E D eine Raute sein. Aber diese Raute ist auch dem gegebenen Quadrate gleich, weil ihre Hälften einander gleich sind; denn △ D E G ist nach Nr. 44 dem Dreieck D C B gleich gemacht worden.

55. Aufgabe. Die Summe zweier Dreiecke in ein Quadrat verwandeln.

Lösung. Man verwandle beide Dreiecke in Rechtecke und diese in Quadrate, sodaß nun der in Nr. 28 behandelte Fall eintritt.

56. Aufgabe. Die Differenz zweier Dreiecke als Quadrat darzustellen.

Lösung. Man verwandle die beiden Dreiecke wieder erst in Rechtecke und dann in Quadrate, und verfahre endlich wie bei Aufgabe 29.

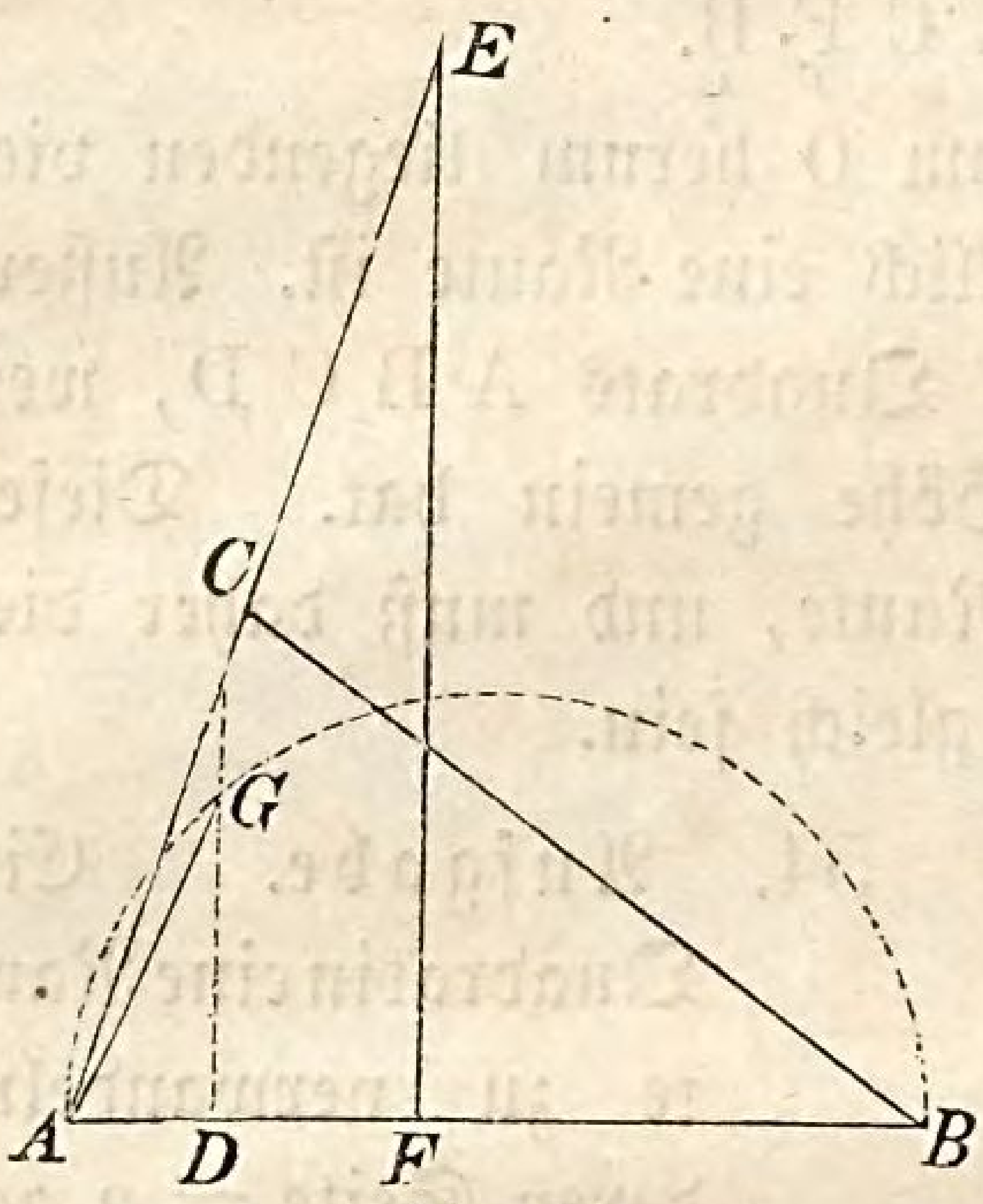


Fig. 29.

57. Aufgabe. Dreieck A B C in ein rechtwinkeliges Dreieck zu verwandeln, das mit dem erstern den Winkel bei A gemein hat. (Fig. 29.)

Analysis. Das verlangte Dreieck A E F sei bereits construirt. Zieht man nun C D senkrecht auf A B, so ist

$$\text{der Inhalt des Dreiecks } A\,B\,C = \frac{A\,B \cdot C\,D}{2},$$

$$\text{der Inhalt des Dreiecks } A\,E\,F = \frac{A\,F \cdot E\,F}{2},$$

und, weil beide Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben,

$$A\,B \cdot C\,D = A\,F \cdot E\,F;$$

$$\text{d. h. } A\,B : A\,F = E\,F : C\,D.$$

Weil aber C D || E F, so findet sich außerdem die Proportion

$$A\,D : C\,D = A\,F : E\,F.$$

Werden diese beiden Proportionen miteinander multiplicirt, und kürzt man die hieraus entstehende Proportion, so ergibt sich

$$A\,B \cdot A\,D = A\,F^2;$$

d. h. $A\,F = \sqrt{A\,B \cdot A\,D}$, oder die mittlere Proportionale zu A B und A D.

Construction. Man fälle die senkrechte C D auf die Grundlinie A B; zu dem Abschnitt A D und der ganzen A B suche man dann die mittlere Proportionale = A G (siehe Aufgabe 23, zweite Lösung) und schneide auf der A B von A aus A F = A G ab. Hierauf errichte man in F ein Loth und verlängere dasselbe so weit, bis es die Verlängerung von A C in E trifft. Dann ist Dreieck A E F das verlangte.

Der Beweis liegt in der Analysis.

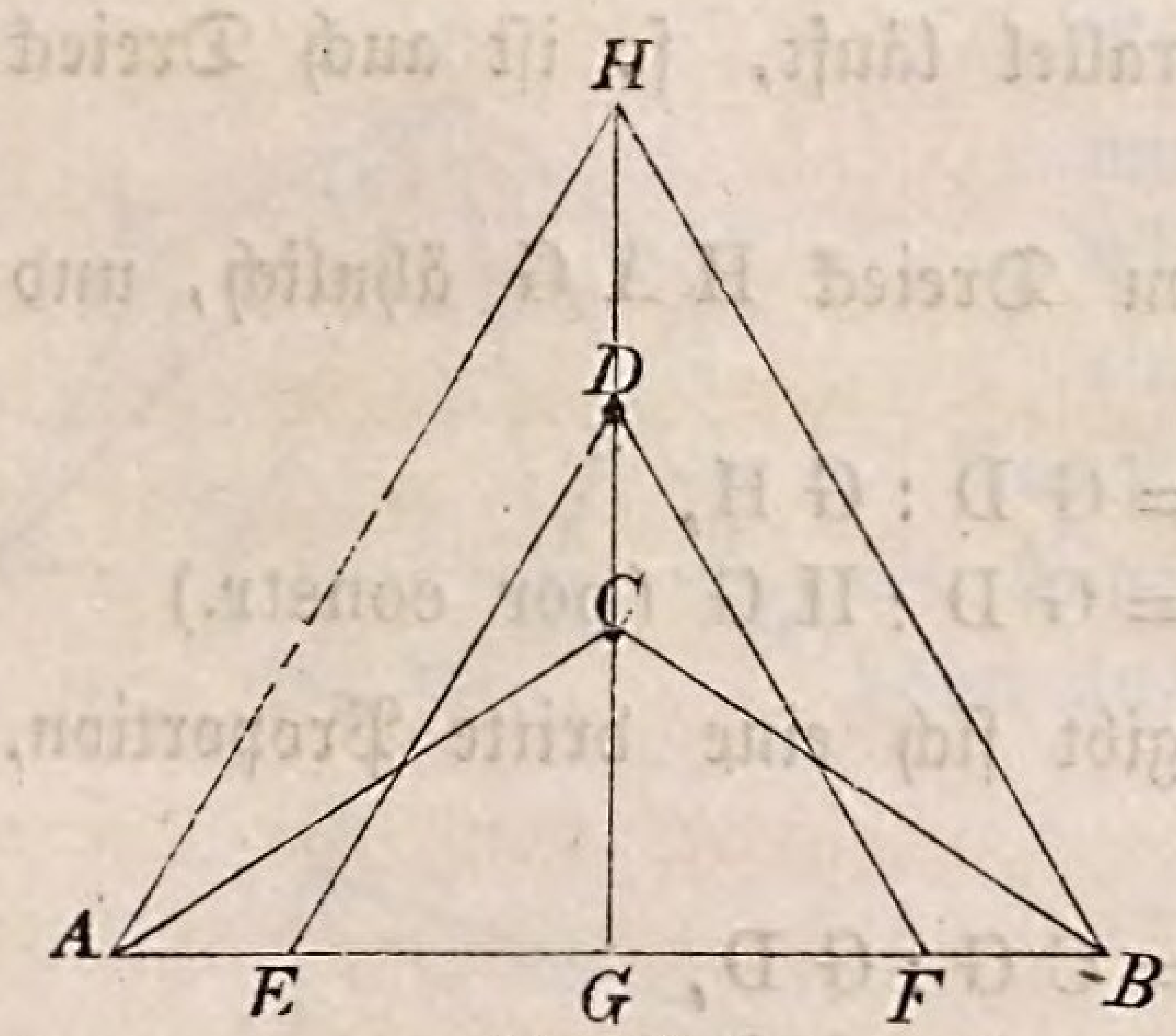


Fig. 30.

58. Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln. (Fig. 30.)

Analysis. Angenommen, $\triangle$ D E F sei das verlangte gleichseitige Dreieck und dem gegebenen $\triangle$ A B C gleich. Zieht man nun durch C das Loth D G, so ist

$$\triangle EDG = \tfrac{1}{2} \triangle DEF$$

und $\triangle ACG = \frac{1}{2} \triangle ABC$; folglich ist auch

$$\triangle EDG = \triangle ACG.$$

Weil aber diese beiden Dreiecke bei G einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so ist $EG \cdot DG = AG \cdot CG$. Man hat also die Proportion

$$EG : AG = CG : DG,$$

in welcher aber nur A G und C G bekannt sind.

Um nun die beiden unbekannten Glieder zu bestimmen, beschreibe man über A B das gleichseitige Dreieck A B H, und verlängere D G bis H, so ist $AH \parallel DE$, folglich

$$EG : AG = DG : GH.$$

Vergleicht man diese Proportion mit der obenerwähnten, so ergibt sich sogleich, daß

$$CG : DG = DG : GH,$$

in welcher Proportion nur eine unbekannte Größe DG ist, welche man aber als mittlere Proportionale zwischen CG und GH kennt; folglich ist auch Punkt D und somit das ganze Dreieck D E F bekannt.

Construction. Man beschreibt über A B das gleichseitige Dreieck A B H und zieht durch C die Linie H G; dann schneidet man von dieser, von G aus, die Linie D G ab, welche die mittlere Proportionale zwischen C G und H G sein muß, und zieht aus D mit A H und B H die Parallelen D E und D F bis A B: so ist Dreieck D E F das verlangte.

Beweis. Weil Dreieck A B H gleichseitig ist und D E mit

H A, sowie D F mit H B parallel läuft, so ist auch Dreieck D E F gleichseitig.

Nun ist Dreieck D E G dem Dreieck H A G ähnlich, und daraus erhellt

$$E G : A G = G D : G H,$$

während $C G : G D = G D : H G$ (per constr.)

Aus beiden Proportionen ergibt sich eine dritte Proportion, nämlich:

$$E G : A G = C G : G D,$$

sodaß $E G \cdot G D = A G \cdot C G$;

und weil Winkel D G E noch dem Winkel C G A gleich ist,

so muß auch $\triangle D E G = \triangle A C G$ sein,

d. h. $\frac{1}{2} \triangle D E F = \frac{1}{2} \triangle A B C$,

folglich $\triangle D E F = \triangle A B C$.

59. Aufgabe. Ein Viereck ABCD in ein Dreieck zu verwandeln.

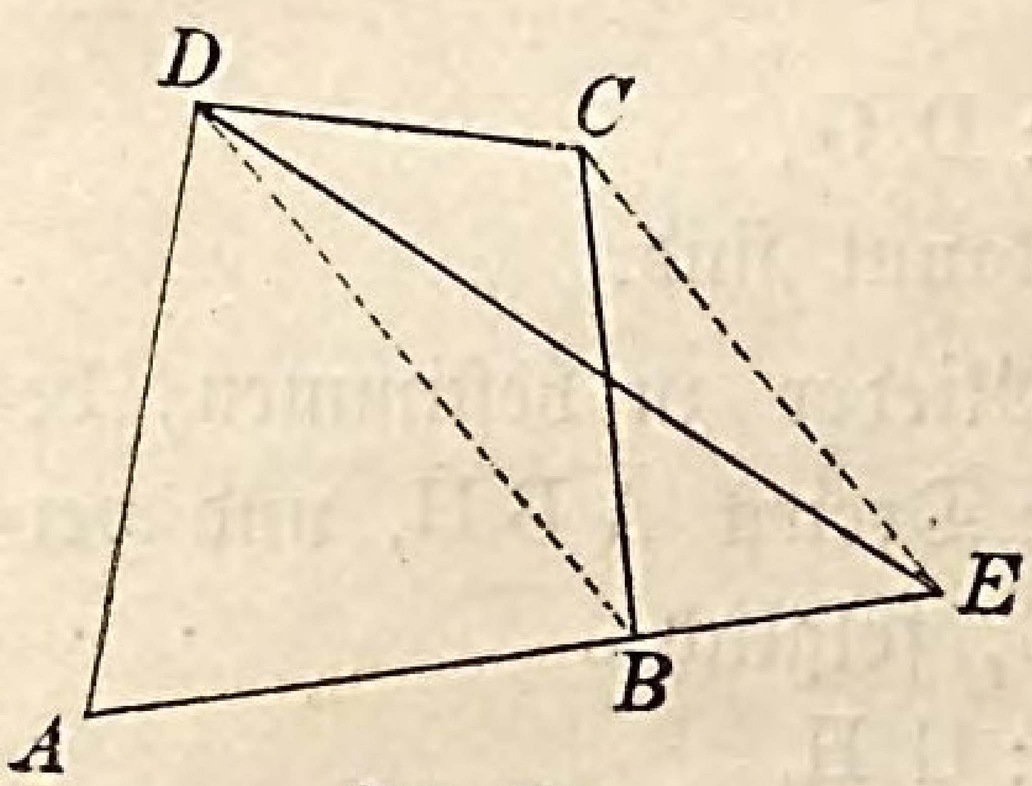


Fig. 31a.

Construction. Man ziehe die Diagonale B D und aus C mit B D eine Parallele, bis sie die Verlängerung von A B schneidet. Wird nun noch die D E gezogen, so ist Dreieck A E D dem gegebenen Viereck gleich.

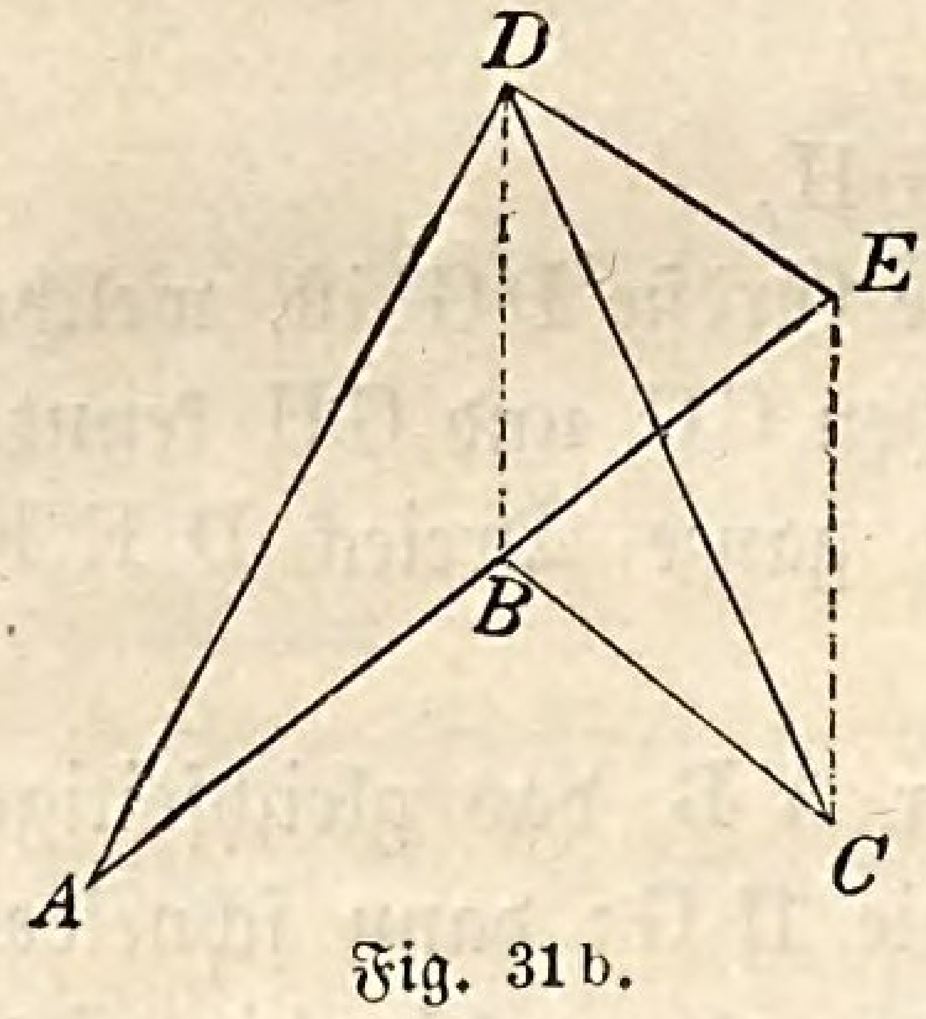


Fig. 31b.

Beweis. $\triangle ABD = \triangle ABD$,

$\triangle BED = \triangle DBC$; daher

$\triangle ABD + \triangle BED = \triangle ABD \triangle DBC$

oder $\triangle AED =$ Viereck ABCD.

Dieser Beweis gilt nicht nur für Fig. 31a, sondern auch für Fig. 31b, wo das zu verwandelnde Viereck einen erhabenen Winkel hat.

Anmerkung. Zur Spitze des Dreiecks kann man jeden Winkel, zur Grundlinie aber nur eine von den beiden Seiten nehmen, die nicht Schenkel dieses Winkels sind. Die Parallele wird von dem Schenkel, der keine Verbindung mit der angenommenen Grundlinie hat, und zwar derartig gezogen, daß jener diese oder deren Verlängerung schneiden kann.

60. Aufgabe. Ein Fünfeck a, mit lauter hohlen Winkeln, b, mit zwei erhabenen Winkeln in ein Dreieck zu verwandeln.

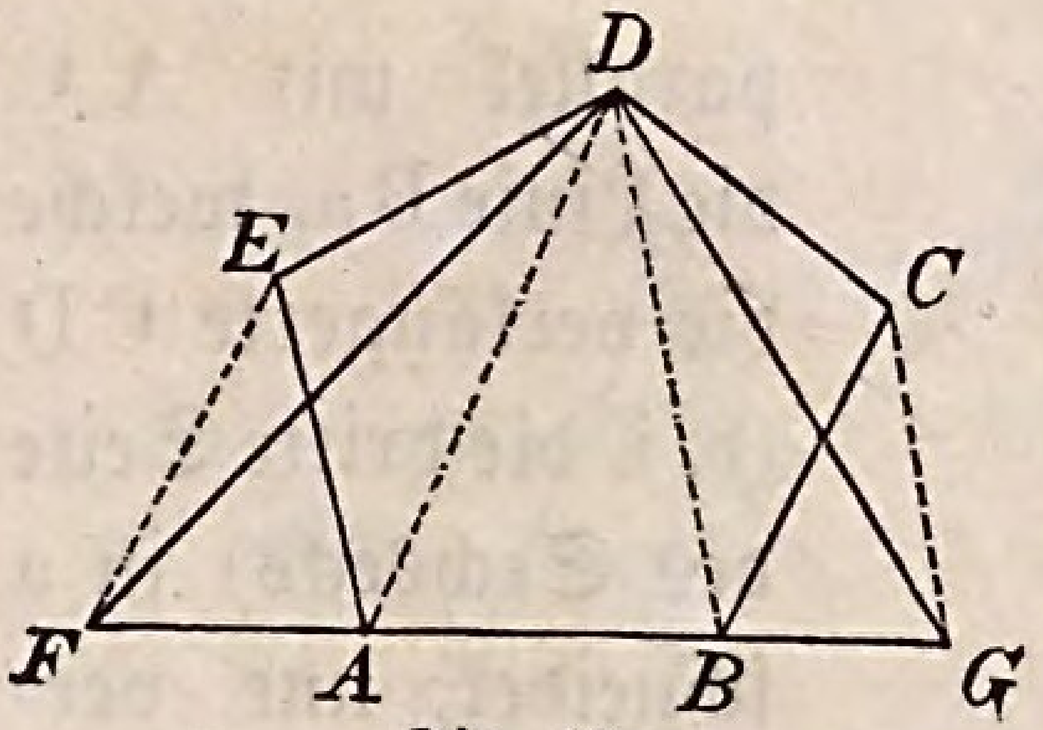


Fig. 32a.

Construction. Man ziehe zunächst die Diagonalen A D und B D, alsdann aus E mit A D und aus C mit B D Parallelen, bis sie von A B oder deren Verlängerung geschnitten werden, und verbinde zuletzt F und G mit D, so ist Dreieck DFG dem Fünfeck ABCDE gleich.

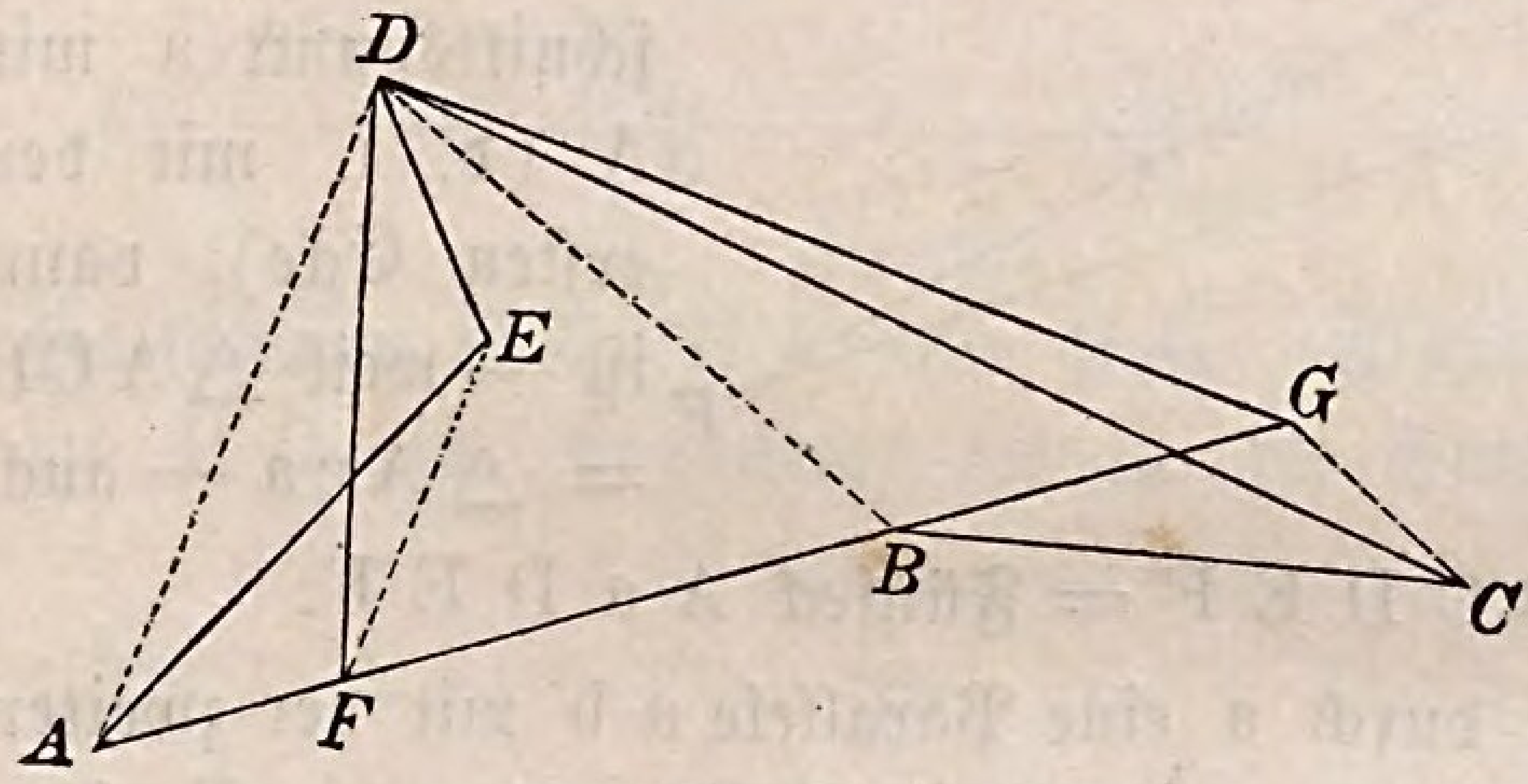


Fig. 32b.

Beweis. $\triangle$ A D F = $\triangle$ A D E,
$\triangle$ A B D = $\triangle$ A B D,
$\triangle$ B D G = $\triangle$ B D C; folglich
$\triangle$ A B D + B D G $\pm$ A D F = $\triangle$ A B D + B D C $\pm$ A D E
oder $\triangle$ D F G = Fünfeck A B C D E.

Anmerkung I. Von den Zeichen $\pm$ gilt das obere für Fig. 32a, das untere für Fig. 32b.

Anmerkung II. Die Spitze des Dreiecks kann jede beliebige Ecke, die Grundlinie jede Seite sein, außer denen, welche den gegebenen Winkel bilden. Die Diagonalen werden aus der gegebenen Ecke gezogen. Die Parallelen werden von den Schenkeln, die keine Verbindung mit der angenommenen Grundlinie haben, und zwar so gezogen, daß sie dieselbe oder deren Verlängerung schneiden können.

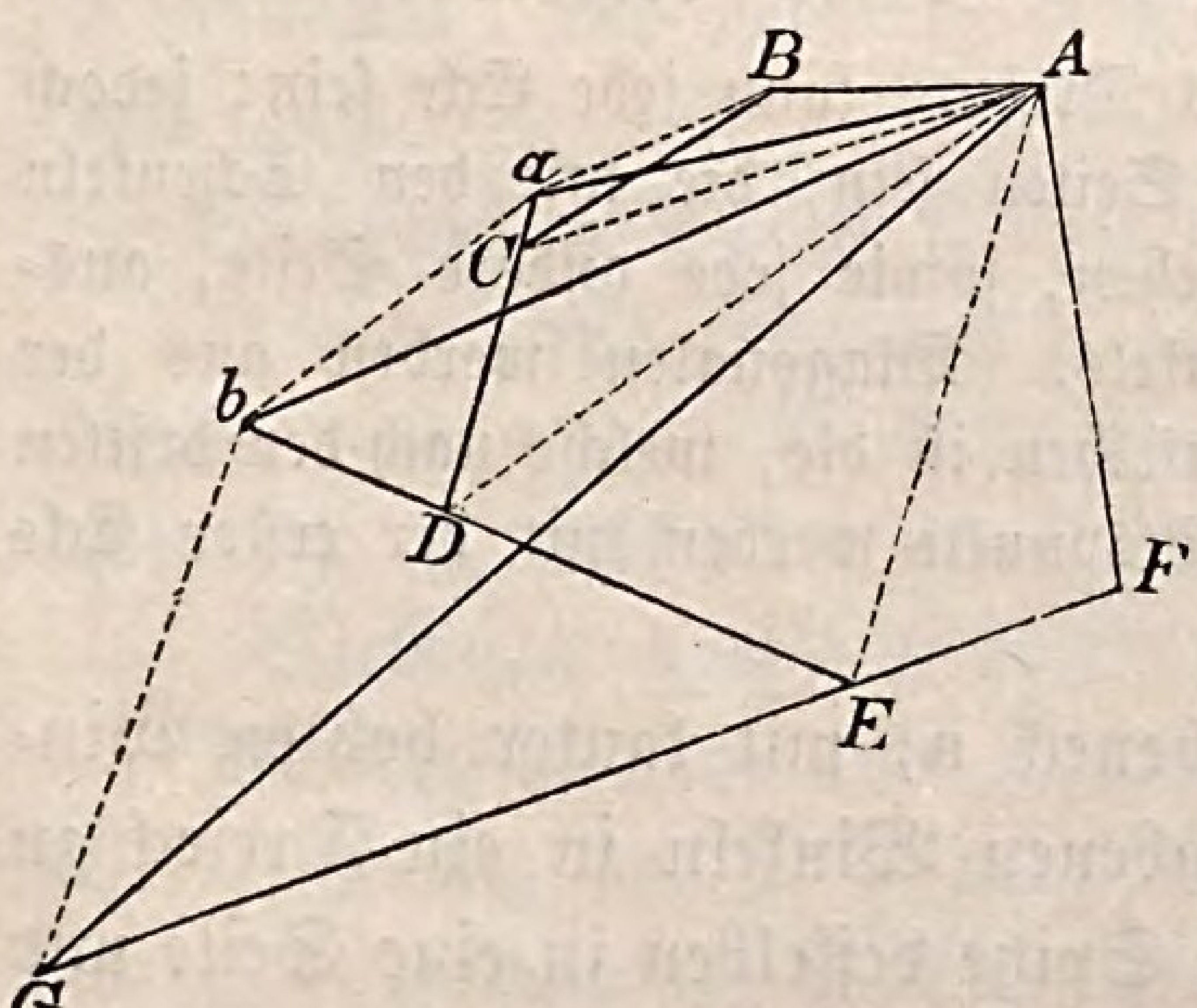


Fig. 33a.

61. Aufgabe. Ein Sechseck a, mit lauter hohlen Winkeln b, mit drei erhabenen Winkeln in ein Dreieck zu verwandeln. (Fig. 33a und b.)

Construction. Man ziehe von A aus die Diagonalen AC, A D und A E; lege durch B

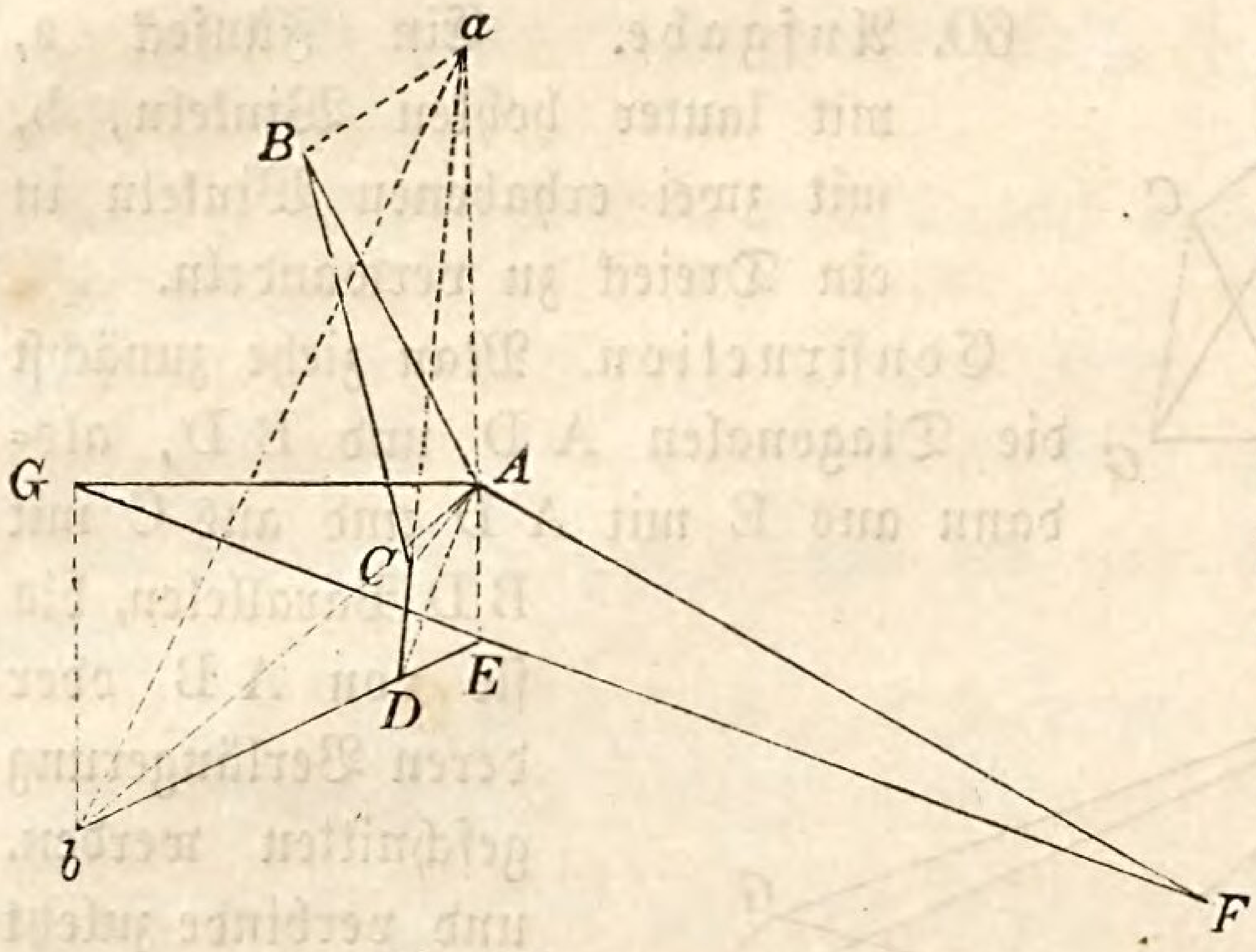


Fig. 33 b.

parallel mit A C die Linie B a, welche die verlängerte C D (d. i. die dritte Seite des Sechsecks) in a schneidet, und verbinde den Durchschnittspunkt a mit A (d. i. mit der ersten Ecke); dann ist — weil △ A C B = △ A c a — auch

Sechseck A B C D E F = Fünfeck A a D E F.

Ferner ziehe man durch a eine Parallele a b mit der zweiten Diagonale A D, bis sie die vierte Seite D E oder deren Verlängerung schneidet, und verbinde den Durchschnittspunkt wieder mit A; dann sind die beiden Dreiecke A D a und A D b einander gleich, folglich auch

Fünfeck A a D E F = Viereck A b E F.

Endlich lege man durch b eine Parallele b G mit der dritten Diagonale A E, bis sie die fünfte Seite E F oder deren Verlängerung schneidet, und verbinde den Durchschnittspunkt G mit A; dann ergeben sich wieder zwei gleiche Dreiecke A E b und A E G, woraus folgt, daß

Viereck A b E F = △ A F G,

also auch das gegebene Sechseck ABCDEF dem Dreieck AFG.

Anmerkung. Die Spitze des Dreiecks kann jede Ecke sein; jedoch Grundlinie können nur die beiden Seiten sein, die mit den Schenkeln des Hauptwinkels in Verbindung stehen, sowie jede andere Seite, ausgenommen die Schenkel dieses Winkels. Diagonalen werden aus der gegebenen Ecke gezogen; die erste derselben ist die, welche nach der dritten Ecke gezogen wird. Alle Durchschnittspunkte werden mit der ersten Ecke verbunden.

62. Aufgabe. Ein Siebeneck a, mit lauter hohlen Winkeln b, mit vier erhabenen Winkeln in ein Dreieck zu verwandeln, daß die Spitze desselben in eine Seite und die Grundlinie längs einer Seite des Siebenecks falle.

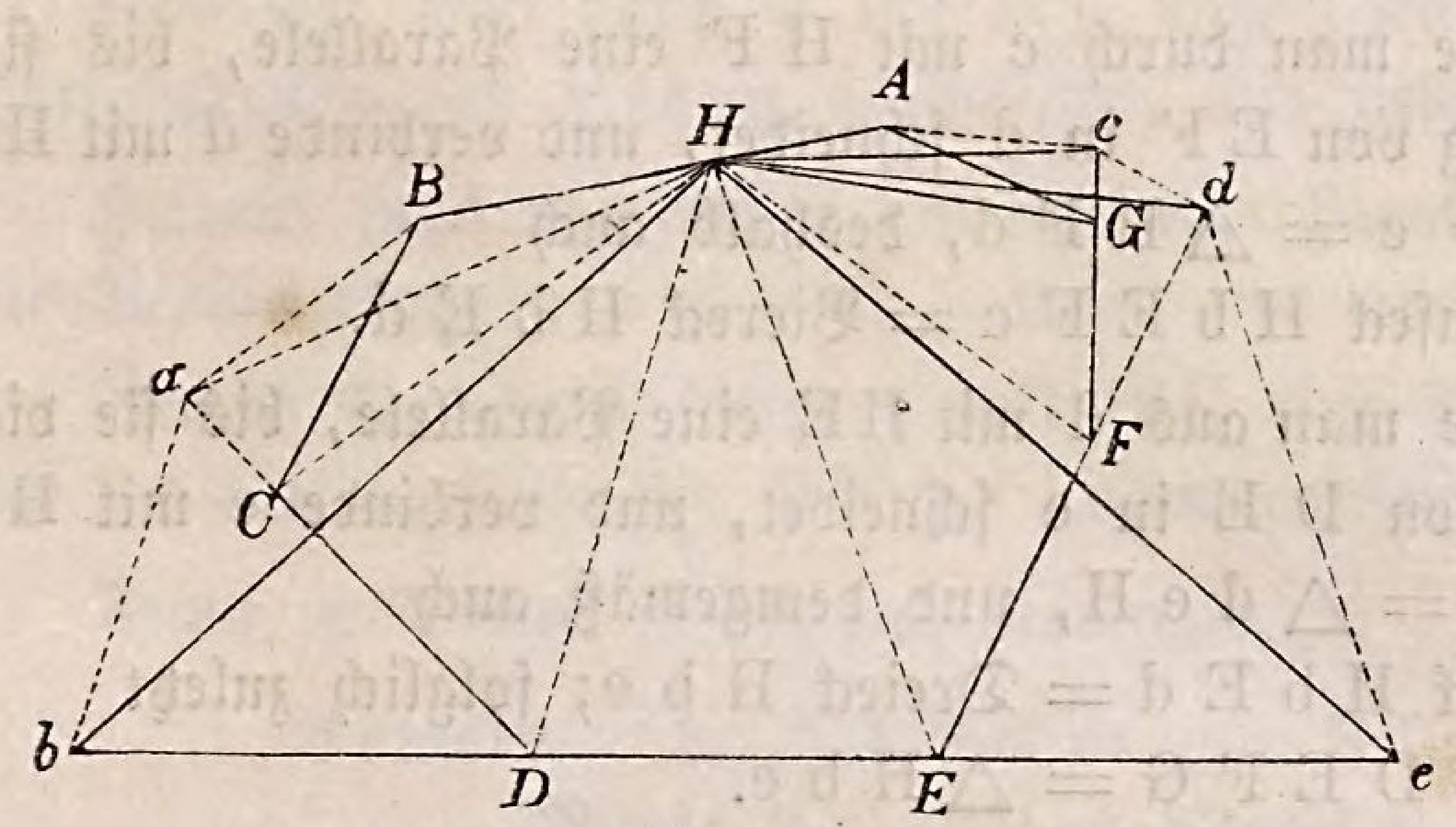


Fig. 34 a.

Construction. Punkt H sei die Spitze und D E die Grundlinie des Dreiecks. Man ziehe die Hauptlinien H D und H E und die übrigen Hülfslinien H C, H F und H G. Alsdann lege man durch B mit H C eine Parallele, bis sie die Verlängerung von C D in

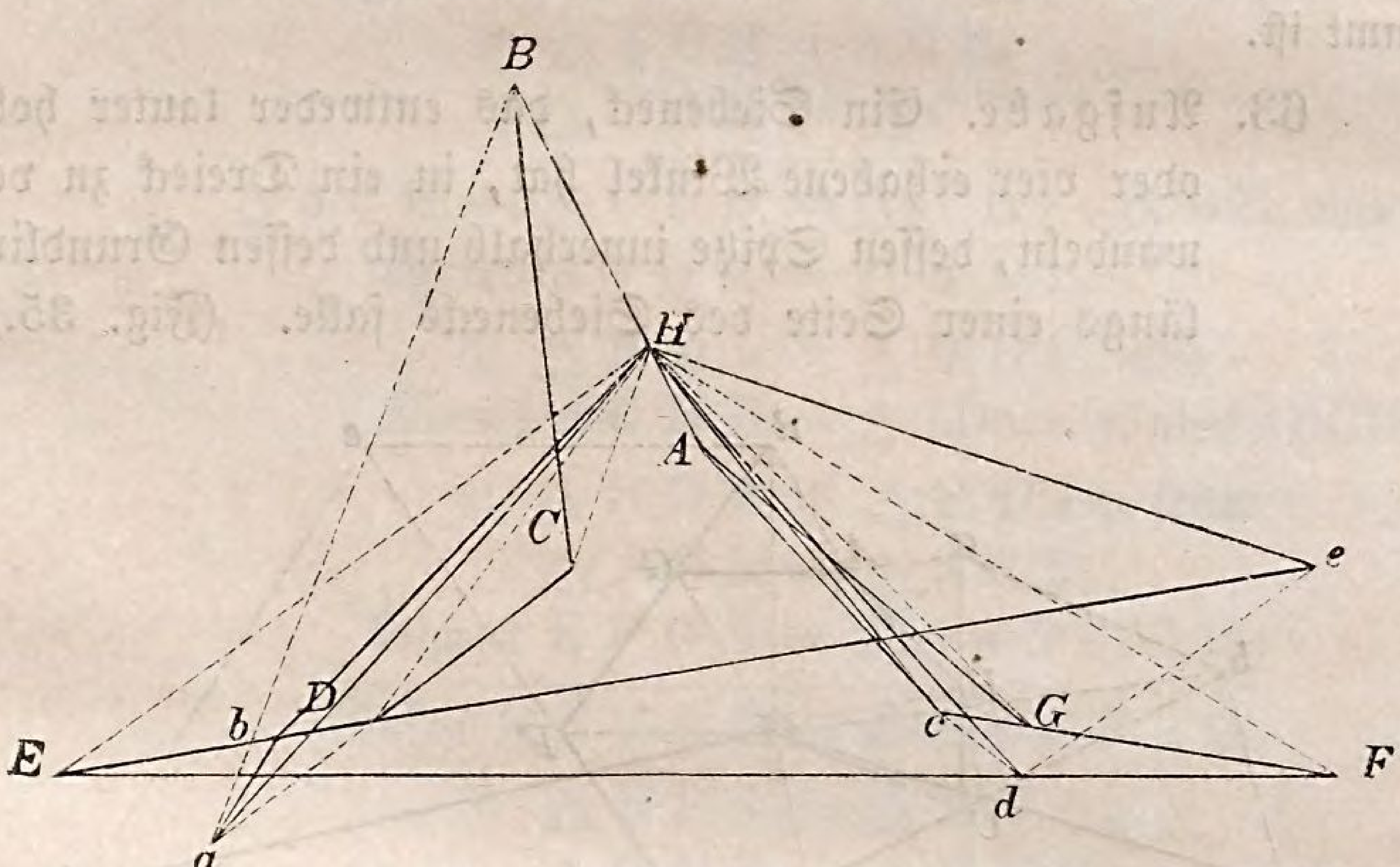


Fig. 34 b.

a schneidet, und verbinde a mit H: so ist △ C B H = C a h, also auch

Siebeneck A B C D E F G = Siebeneck A H a D E F G.

Ferner ziehe man aus a mit H D eine Parallele, bis sie die Verlängerung von D E in b schneidet, und verbinde b mit H, dann ist △ H D a = △ H D b, folglich auch

Siebeneck A H a D E F G = Sechseck A H b E F G.

Nun ziehe man aus A mit H G eine Parallele, bis sie die Verlängerung von F G in c schneidet, und verbinde c mit H, so ist △ G H A = △ H G c, also auch

Sechseck A H b E F G = Fünfeck H b E F c.

Alsdann lege man durch c mit H F eine Parallele, bis sie die Verlängerung von E F in d schneidet, und verbinde d mit H; dann ist △ H F c = △ H F d, deshalb auch

Fünfeck H b E F c = Viereck H b E d.

Endlich ziehe man aus d mit HE eine Parallele, bis sie die Verlängerung von D E in e schneidet, und verbinde e mit H: so ist △ d e E = △ d e H, und demgemäß auch

Viereck H b E d = Dreieck H b e; folglich zuletzt

Siebeneck A B C D E F G = △ H b e.

Anmerkung. Es kann jede Seite des Siebenecks Grundlinie werden, nur die nicht, in welcher die Spitze liegt. Die Hauptlinien sind die, welche die Seite einschließen, die zur Bildung der Grundlinie bestimmt ist.

63. Aufgabe. Ein Siebeneck, das entweder lauter hohle oder vier erhabene Winkel hat, in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Spitze innerhalb und dessen Grundlinie längs einer Seite des Siebenecks falle. (Fig. 35.)

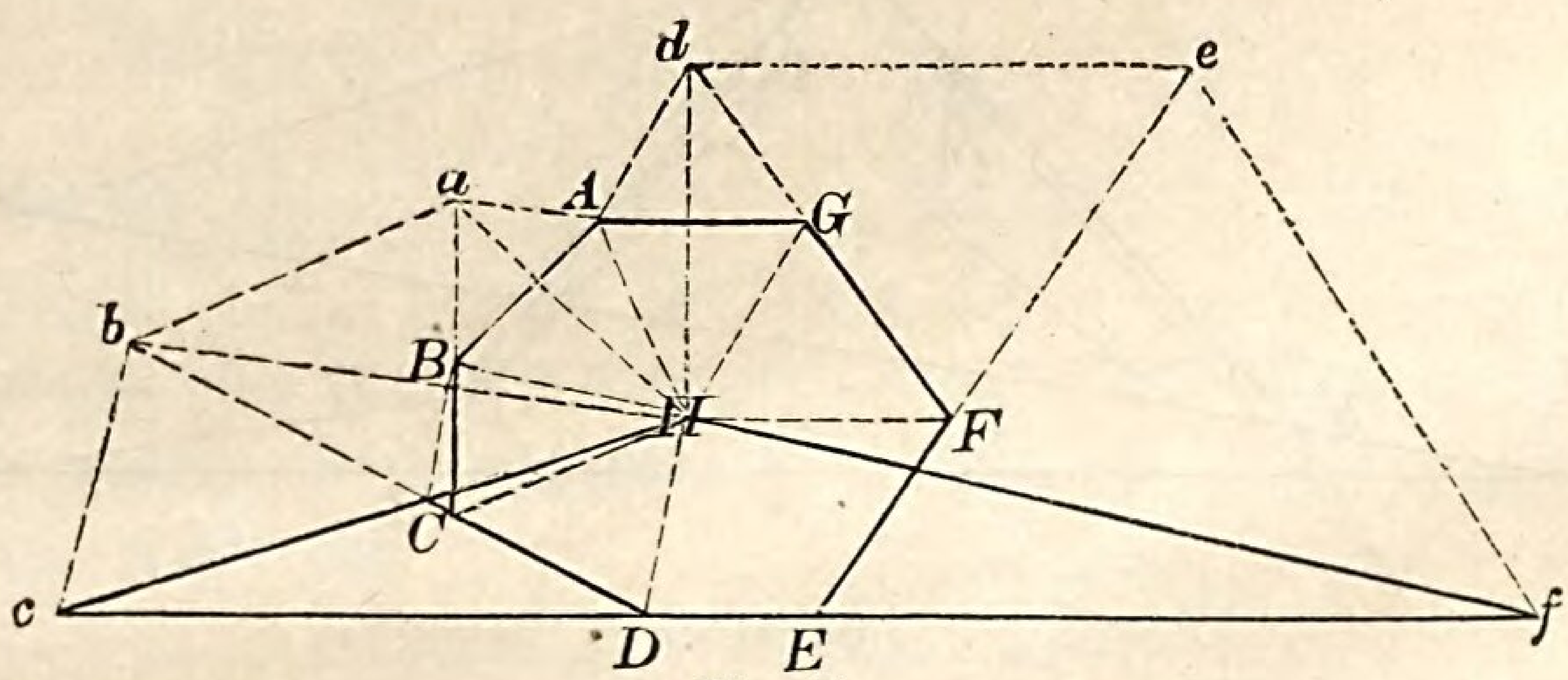


Fig. 35.

Construction. Punkt H sei die Spitze und D E die Grundlinie des Dreiecks. Man ziehe die Hauptlinien H D, H E und H A, ferner die Hülfslinien H B, H C, H G und H F. Alsdann lege man durch A mit B H eine Parallele, bis sie die Verlängerung von B C in a schneidet, und ziehe a H.

Ferner lege man durch a mit HC eine Parallele, bis sie die Verlängerung von CD schneidet, und verbinde den Durchschnittspunkt b mit H.

Alsdann ziehe man aus b mit H D eine Parallele, bis sie die Verlängerung von DE in c trifft, und verbinde c mit H.

Nun lege man durch A mit H G eine Parallele, bis sie die Verlängerung von F G in d schneidet, und ziehe d H.

Hierauf ziehe man aus d mit HF eine Parallele, bis sie auf die Verlängerung von E F in e trifft, und verbinde e mit H.

Endlich lege man durch e mit H E eine Parallele, bis sie mit der Verlängerung von DE in f zusammenkommt, und ziehe Hf.

Dann ist Dreieck H c f das verlangte.

Beweis. 1. △ABH = △aBH,
Viereck BCDH = Viereck BCDH;

△ABH + Viereck BCDH = △aBH + Viereck BCDH,
oder Fünfeck ABCDH = Viereck aCDH.

2. △aCH = bCH,
△CDH = △CDH;

△aCH + △CDH = △bCH + △CDH, oder
Viereck aCDH = △HDb.

3. △HDb = △HDc, also
Viereck aCDH = △HDc = Fünfeck ABCDH.

4. △HDE = △HDE; ferner
△AGH = △dGH,
Viereck EFGH = Viereck EFGH;

Fünfeck EFGAH = Viereck EFdH.

5. △HFd = △HFe,
△HEF = △HEF;

Viereck EFdH = △HEe = △HEf = Fünfeck EFGAH.

6. △HDc + △HDE + △HEf = Fünfeck ABCDH + △HDE + Fünfeck EFGAH
oder △Hcf = Siebeneck ABCDEFG.

Anmerkung. Hier kann jede Seite Grundlinie werden. Die Hauptlinien ziehe man vom innerhalb gegebenen Punkte nach den Endpunkten der Grundlinie und nach einer Ecke, und zwar so, daß die Figur gleichgetheilt wird.

64. Aufgabe. Ein Neck (d. h. ein Vieleck mit beliebig viel Seiten) in ein Dreieck zu verwandeln.

Lösung. Wenn man mit der ersten Diagonale eine Parallele zieht, bis sie die verlängerte dritte Seite schneidet, und den Durchschnittspunkt mit der ersten Ecke verbindet, so wird das Neck in ein N — 1eck verwandelt. Durch eine Parallele mit der zweiten Diagonale auf die Verlängerung der vierten Seite, und durch Verbindung des Durchschnittspunktes mit der ersten Ecke entsteht ein Vieleck mit n — 2 Seiten. Setzt man dieses allgemeine Verfahren fort — d. h. zieht man mit jeder Diagonale eine Parallele, bis sie von der Verlängerung derjenigen Vielecksseite, die in der Reihenfolge eine um 2 größere Stellenzahl erfordert, geschnitten wird; und verbindet man jeden Durchschnittspunkt mit der ersten Ecke —: so entsteht nach und nach ein N — 3eck, ein N — 4eck, ein N — 5eck u. s. w., bis zuletzt das gegebene Neck in ein ihm gleiches Dreieck verwandelt ist.

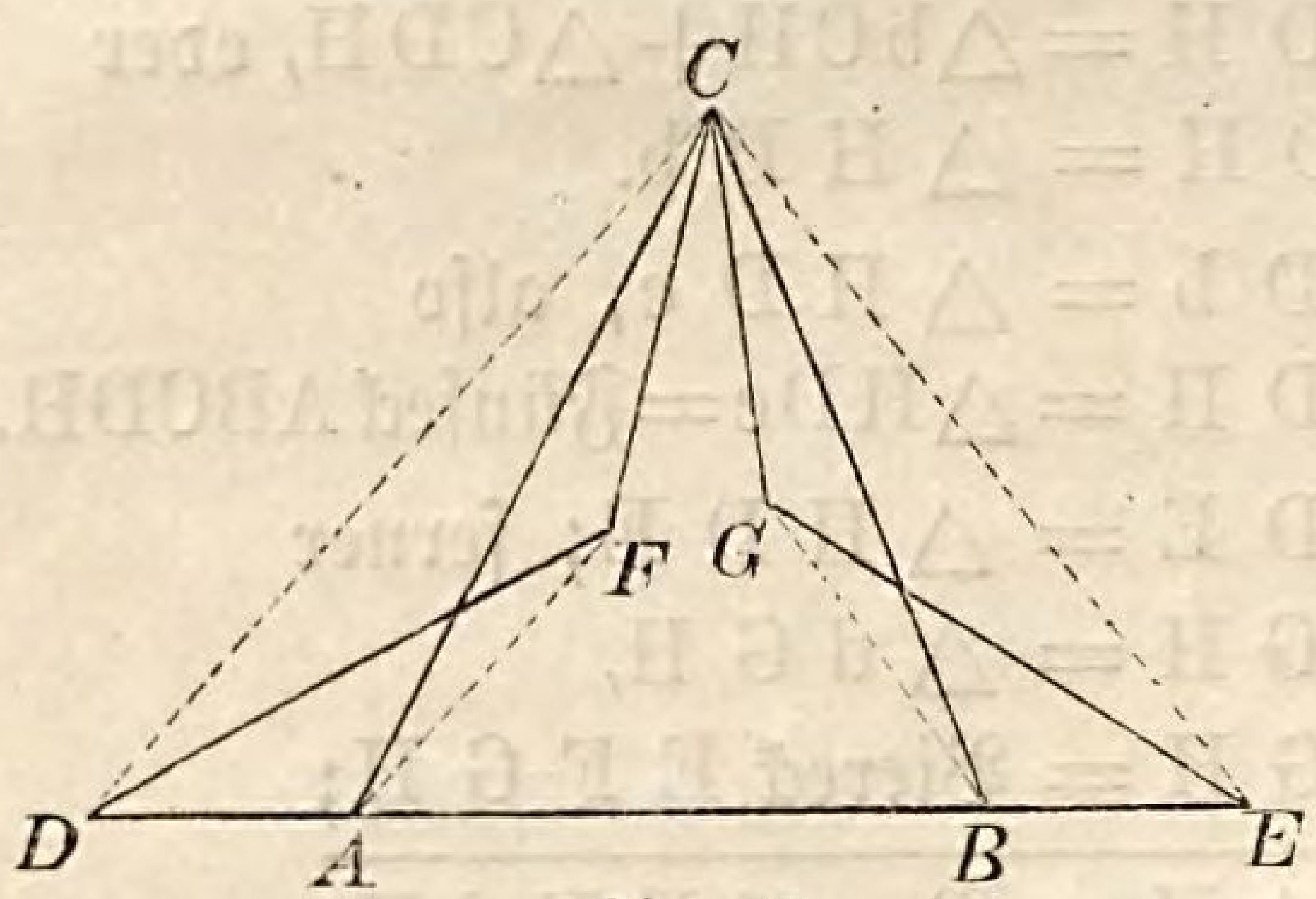


Fig. 36.

65. Aufgabe. Ein Dreieck A B C in ein Fünfeck mit erhabenen Winkeln zu verwandeln.

Construction. Nachdem A B auf beiden Seiten beliebig verlängert worden, ziehe man C D und C E; lege durch A mit D C und durch B mit E C Parallelen, nehme in jeder derselben einen Punkt an, F und G, ziehe D F und C F, sowie G E und G C: so ist Fünfeck D G C F E = △ A B C.

Beweis. △ D E C = △ D E C,
△ D F C = △ D A C,
△ E G C = △ E B C;

△DEC — △DFC — △EGC = △DEC — △DAC — EBC
oder Fünfeck D F C G B = △ A B C.

Anmerkung. Die Verbindungslinien, mit denen die Parallelen gezogen werden, müssen Diagonalen des Fünfecks sein. Die Parallelen müssen aus den Endpunkten der Grundlinie des Dreiecks oberhalb gezogen, die Ecken vor dem Durchschnitt der beiden Parallelen angenommen werden.

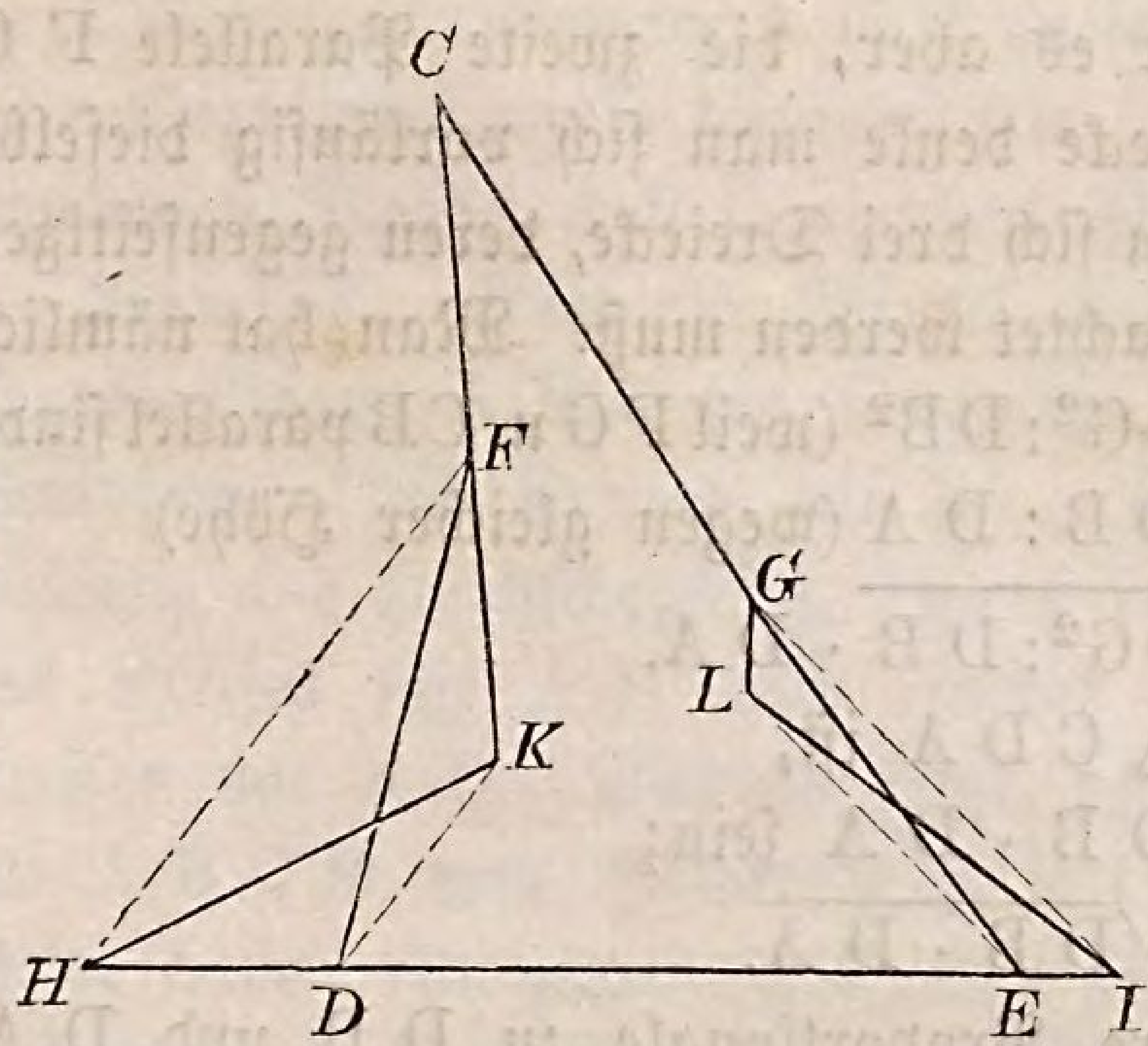


Fig. 37.

66. Aufgabe. Ein Fünfeck mit erhabenen Winkeln in ein ebensolches Siebeneck zu verwandeln.

Construction. Man verlängere die Grundlinie D E auf beiden Seiten; ziehe F H und G I; lege durch D mit H F und durch E mit G I Parallelen; nehme in jeder derselben einen Punkt an, K und L; ziehe H K und F K, auch G L und I L. Dann ist Siebeneck H K F C G L I das verlangte.

Beweis. $\triangle$ H K F $=$ $\triangle$ H D F,

$\triangle$ I L G $=$ $\triangle$ I E G,

5eck H F C G I $=$ 5eck H F C G I;

5eck HFCGI $-$ $\triangle$HKF $-$ $\triangle$ILG $=$ 5eckHFCGI $-$ $\triangle$HDF $-$ $\triangle$IEG

oder 7eck H K F C G L I $=$ 5eck D F C G E.

Bestimmung. Die Ecken müssen vor dem Durchschnitt der Parallelen und nicht in der Verlängerung der Seite, an welche die Diagonale stößt, angenommen werden.

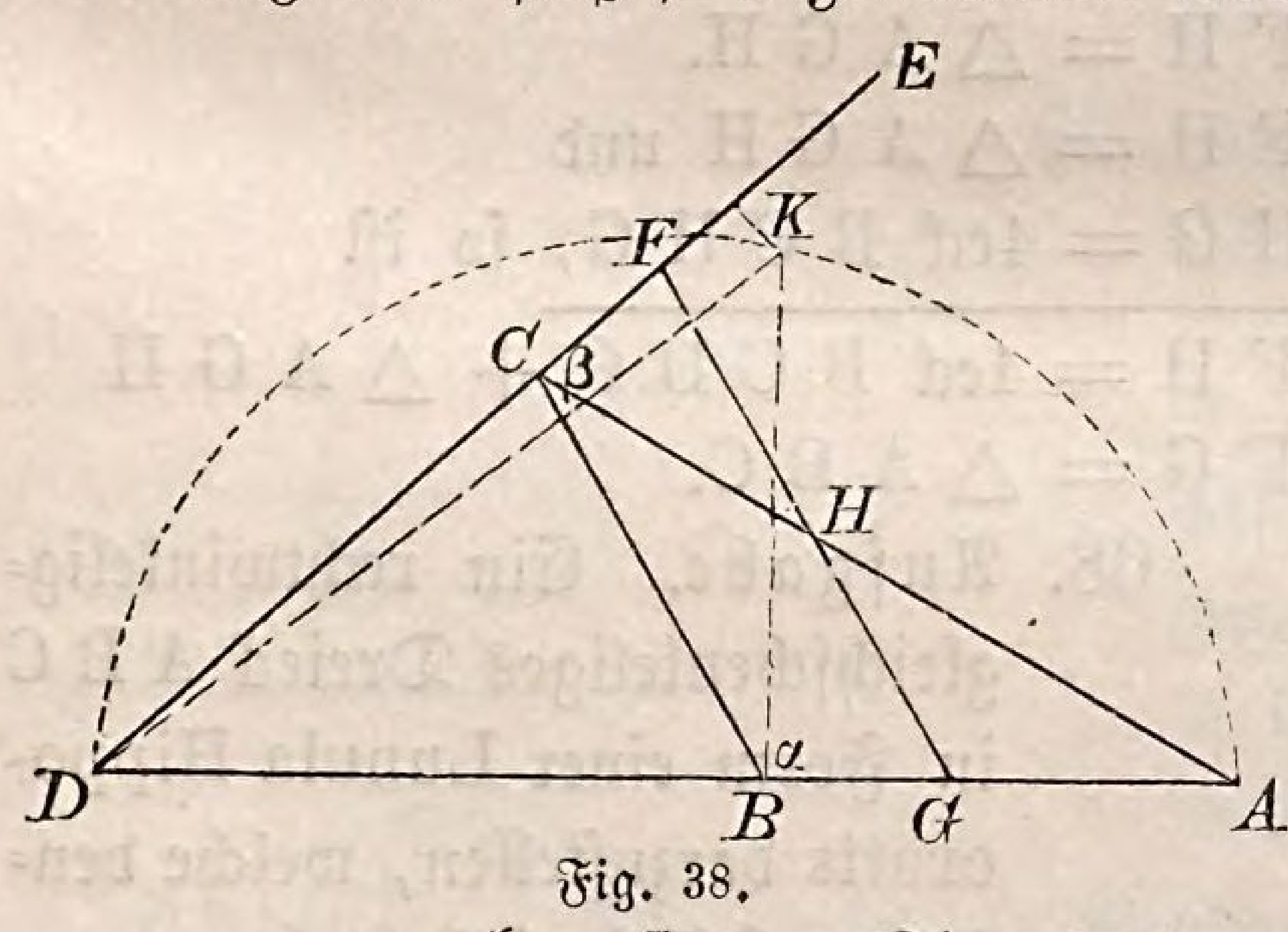


Fig. 38.

67. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein Trapez zu verwandeln, von dem eine der parallelen Seiten, C B $= a$, und die beiden anliegenden Winkel α und β gegeben sind. (Fig. 38.)

Construction. Das gegebene Dreieck werde zunächst in ein Dreieck verwandelt, welches die gegebene B C $= a$ zur Grundlinie und den daranliegenden Winkel α hat. Dies Dreieck sei A B C. Alsdann lege man den Winkel E C B $= \beta$ in C an die Linie C B an, und verlängere E C und A B bis zum Durch-

schnittspunkte D. Nun gilt es aber, die zweite Parallele F G zu finden. Zu diesem Zwecke denke man sich vorläufig dieselbe bereits gezogen; dann ergeben sich drei Dreiecke, deren gegenseitiges Größenverhältniß näher betrachtet werden muß. Man hat nämlich

$\triangle DFG : \triangle CDB = DG^2 : DB^2$ (weil F G u. C B parallel sind)

$\triangle CDB : \triangle CDA = DB : DA$ (wegen gleicher Höhe)

also $\triangle DFG : \triangle CDA = DG^2 : DB \cdot DA$.

Weil aber $\triangle DFG = \triangle CDA$ ist,

so muß auch $DG^2 = DB \cdot DA$ sein;

demnach ist $DG = \sqrt{DB \cdot DA}$.

Man suche also die mittlere Proportionale zu D B und D A, schneide von D aus dieselbe auf der D A ab und lege durch den gefundenen Punkt G mit B C eine Parallele, bis sie die D E in F schneidet; dann ist Trapez B C F G dem Dreieck A B C gleich.

Bemerkung. In der Fig. ist D G = D K gezeichnet, also wirklich die verlangte mittlere Proportionale.

Beweis. Weil F G parallel mit B C gezogen worden, so ist Viereck B C F G wirklich ein Trapez.

Nun ist noch $\triangle DFG = \triangle DCA$,

4eck $BCHG =$ 4eck $BCHG$;

$\triangle DFG -$ 4eck $BCHG = \triangle DCA -$ 4eck $BCHG$

oder $\triangle CFH = \triangle AGH$.

Weil aber $\triangle CFH = \triangle AGH$ und

4eck $BCHG =$ 4eck $BCHG$, so ist

4eck $BCHG + \triangle CFH =$ 4eck $BCHG + \triangle AGH$

oder Trapez $BCFG = \triangle ABC$.

68. Aufgabe. Ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck A B C in Form einer Lunula Hippocratis darzustellen, welche denselben Flächeninhalt hat.

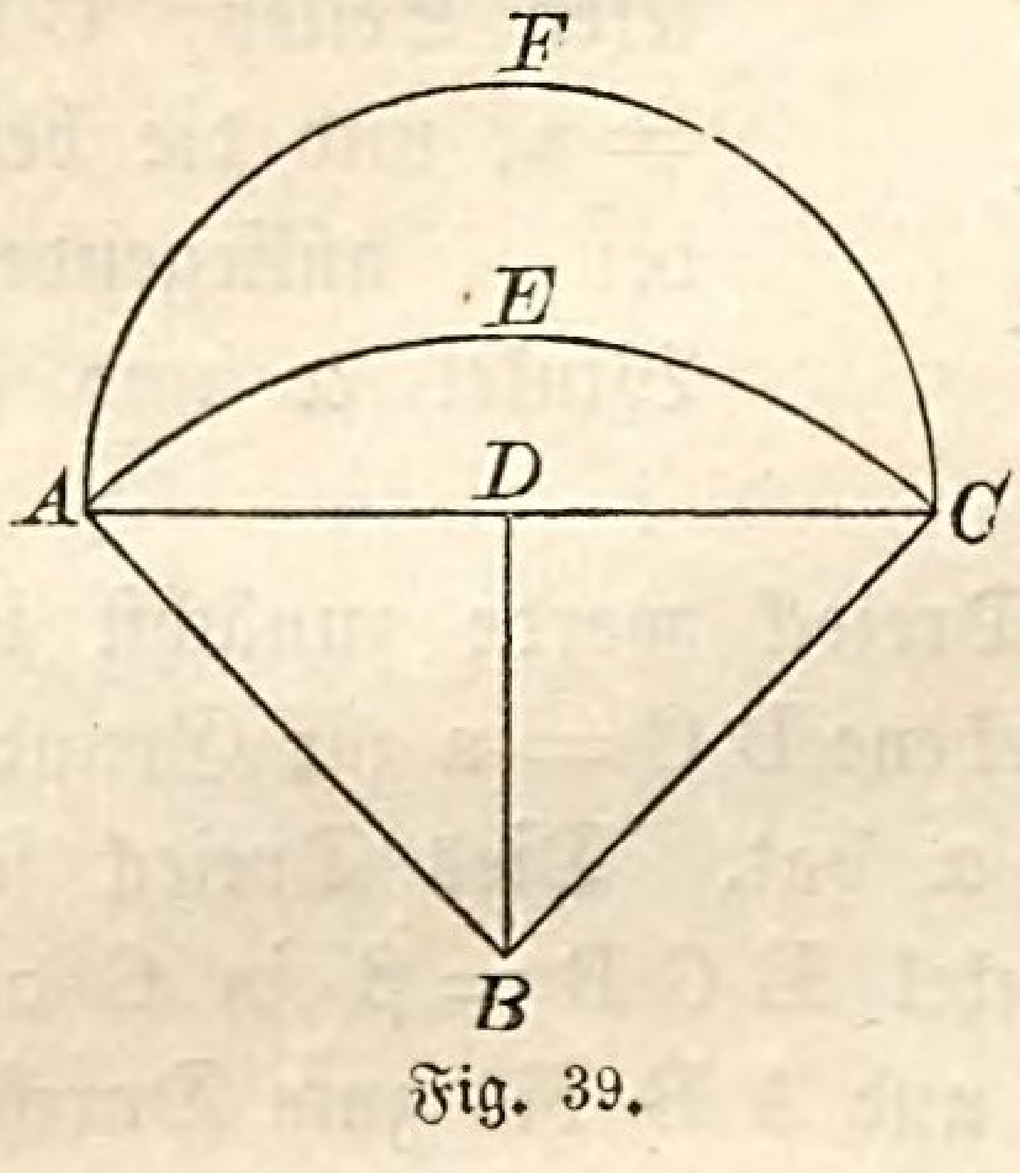


Fig. 39.

Construction. Man halbire die Hypotenuse A C des Dreiecks A B C und beschreibe über ihr einen Halbkreis A F C. Alsdann beschreibe man von B aus mit einer Zirkelöffnung

= A B den Kreisbogen A E C zwischen den Punkten A und C; so entsteht die Lunula Hippocratis A F C E A, welche mit dem gegebenen Dreieck A B C gleichen Flächeninhalt hat.

Beweis. Weil der Winkel A B C ein rechter ist, deshalb ist der Bogen A E C ein Quadrant, d. h. der vierte Theil der Peripherie (des Kreises um B). Ferner ist △ A B D rechtwinkelig und gleichschenkelig, also A D = B D; folglich die Fläche des Kreises mit A B noch einmal so groß als diejenige des Kreises mit A D. Daraus folgt, daß die Fläche des Quadranten A B C E dem Halbkreise A D C F A an Größe gleich ist. Beide haben ein gemeinschaftliches Stück A C E A. Zieht man dasselbe vom Quadranten sowol als vom Halbkreise ab, so ergibt sich

Lunula A E C F A = △ A B C.

Anmerkung. Hippokrates aus Chios soll der Erfinder dieses Satzes sein. Weil die Figur, welche von den Bogen A E C und A F C eingeschlossen wird, an die Gestalt des ab- oder zunehmenden Mondes erinnert, so hat sie den obenerwähnten Namen erhalten.

Dritter Abschnitt.

Theilung der Figuren.

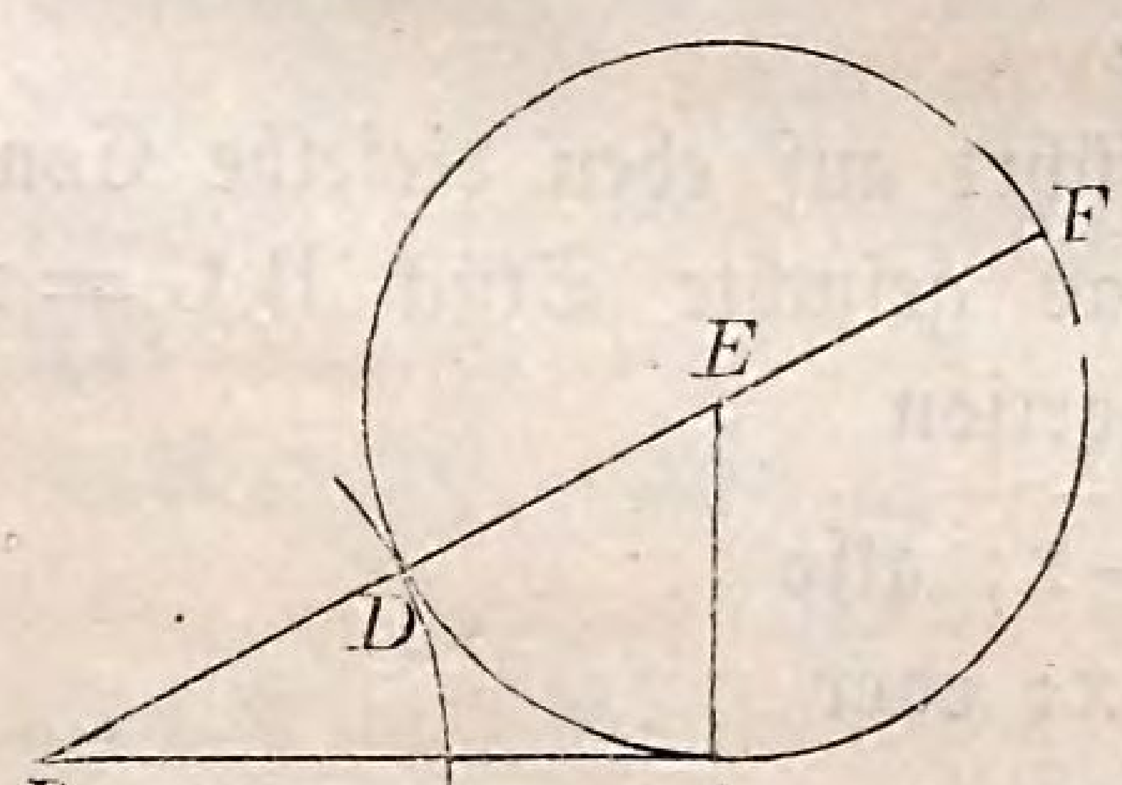


Fig. 40.

69. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie A B = a in zwei Theile, A C und B C, zu theilen, sodaß der Theil B C die mittlere Proportionale zwischen dem andern Theil A C und der ganzen Linie A B wird.

Analysis. Die verlangte Proportion ist

$$AB : BC = BC : AC \text{ oder}$$
$$AB + BC : AB = BC + AC : BC \text{ d. h.}$$
$$AB + BC : AB = AB \quad : BC,$$

in welcher letztern Proportion nur B C unbekannt ist, während die gegebene A B selbst als mittlere Proportionallinie auftritt,

Erinnert man sich nun, daß die Tangente eines Kreises die mittlere Proportionale ist zwischen den beiden Theilen der schneidenden Linie, vom Endpunkte der Tangente an bis zu den beiden Durchschnittspunkten der Secante mit der Peripherie gerechnet: so erhellt daraus, daß man die gegebene A B zur Tangente eines Kreises machen muß. Zu diesem Zwecke errichte man in A ein Loth A E und suche in demselben den Mittelpunkt E dergestalt, daß

$$BF : AB = AB : BD, \text{ worin}$$
$$BF = AB + BC \text{ und}$$
$$BD = BC \text{ sein muß.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen aber folgt

$$BF - BD = AB + BC - BC, \text{ d. h.}$$
$$DF = AB, \text{ und deshalb}$$
$$AE = \frac{AB}{2}.$$

Construction. Man lege daher $AE = \frac{AB}{2}$ rechtwinkelig an A B in A und ziehe B E. Dann beschreibe man mit dem Radius A E um E einen Kreis; dieser schneidet die B E in D. Schneidet man nun auf A B das Stück B C = B D ab, so ist B C die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie A B und dem abgeschnittenen Theil A C.

Die algebraische Lösung führt auf eben dieselbe Construction. Wenn A B = a und das gesuchte Stück B C = x gesetzt wird, so ergibt sich die Proportion

$$a : x = x : a - x; \text{ also}$$
$$x^2 = a^2 - a x; \text{ oder}$$
$$x^2 + a x = a^2,$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4},$$
$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Diese Formel verlangt ebenfalls, daß man a und $\frac{a}{2}$ (d. h. A B und A E) rechtwinkelig in A zusammensetze, die Hypotenuse B E

ziehe, welche $= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, und zuletzt $\frac{a}{2}$ (d. i. $D E = E A = \frac{A B}{2}$) hiervon abschneide. Dann ist B D oder B C die gesuchte mittlere Proportionale.

Anmerkung. Die in dieser Aufgabe verlangte Theilung einer gegebenen geraden Linie wird der goldene Schnitt genannt. Derselbe besteht also darin, daß eine gegebene Linie stetig getheilt wird. Die beiden folgenden Aufgaben zeigen, welche Vortheile die ausgeführte Construction auch für andere Fälle gewährt.

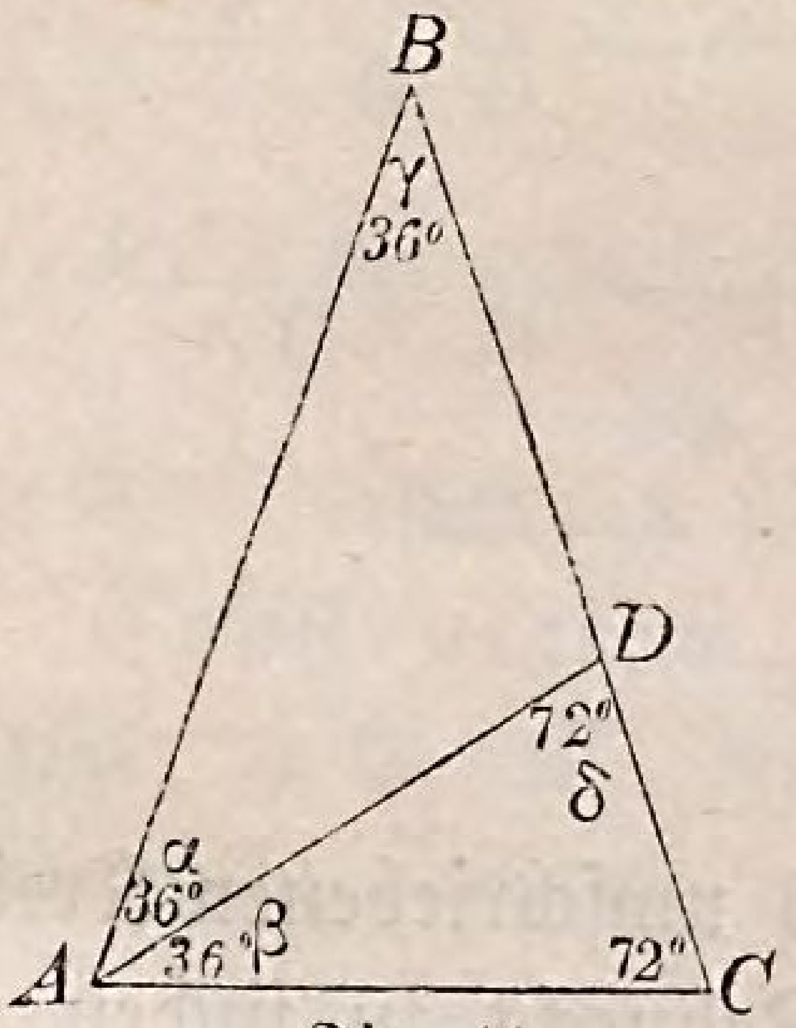


Fig. 41.

70. Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck A B C zu construiren, dessen Winkel B an der Spitze halb so groß als jeder an der Grundlinie sei.

Analysis. Es wird verlangt, daß der Winkel B die Hälfte des Winkels A und des Winkels C sei; demnach kommt auf B ein Theil, während A sowol als C zwei Theile beanspruchen. Da die Summe der innern Winkel eines Dreiecks = 2 R., so wird $B = \frac{2}{5}$ R. oder 36°; jeder der beiden Winkel A und C aber $= \frac{4}{5}$ R. oder 72°. Angenommen △ A B C entspräche diesen Anforderungen, so könnte man sich sehr leicht ein ähnliches Dreieck verschaffen; nämlich dadurch, daß man den Winkel A halbirte und A D zöge. Dann wäre Winkel A D C = C = 72° und Winkel D A C = D A B = B = 36°; also △ A C D ∼ △ A B C, und demgemäß

$$B C : C A = C A : C D.$$

Nun ist aber B D = A D = A C (weil die Dreiecke A B D und A C D gleichschenkelig sind); daraus ergibt sich sogleich die Proportion

$$B C : B D = B D : C D.$$

Construction. Man suche zu der gegebenen Linie B C, die eine beliebige sein kann, und einem Theile derselben, C D (nach Nr. 69), die mittlere Proportionale B D, beschreibe über der B C das Dreieck B C A, und zwar so, daß A B = B C wird und A C = B D. Dann ist △ A B C das verlangte.

Beweis. △ A B C ist gleichschenkelig, also sind die Winkel

an der Grundlinie A C einander gleich. Ferner ist bekannt A C = B D. Zieht man nun die Linie A D, so ist

Winkel $\delta = \alpha + \gamma$ (als Außenwinkel).

Wird jetzt um $\triangle$ A B D ein Kreis beschrieben, so erscheint A C als Tangente an demselben im Punkte A, während noch folgender Lehrsatz hierbei Anwendung findet, nämlich:

der Winkel, β, den die Tangente, A C, mit der Sehne, A D, in dem Berührungspunkte, A, macht, ist dem Winkel, γ, im andern Abschnitt des Kreises gleich.

Demnach ist $\beta = \gamma$;

also auch $\delta = \alpha + \beta = C$;

folglich $AD = AC = BD$.

Hieraus ergibt sich ferner

$$\alpha = \gamma;$$

folglich $\delta = 2\gamma$

und endlich $C = 2\gamma = 2B$.

Also ist A B C das verlangte Dreieck.

71. **Aufgabe.** Aus dem Radius des umschriebenen Kreises die Seite des regelmäßigen Zehnecks zu finden.

Analysis. Denkt man sich das regelmäßige Zehneck vom Mittelpunkte aus durch Linien nach den Ecken in zehn gleiche Dreiecke zerlegt, so ist jedes derselben nicht nur gleichschenkelig, sondern es hat auch an der Spitze einen Winkel von $\frac{360}{10} = 36°$, während jeder der gleichen Winkel an der Grundlinie (Zehnecksseite) 72°, also gerade das Doppelte davon beträgt. Ueberdies ist die Seite eines solchen Dreiecks dem Radius des umschriebenen Kreises gleich. Demnach hat man nur noch den Radius (nach 69) so zu theilen, daß, wenn die Zehnecksseite = e ist, die Proportion entsteht:

$$r : e = e : r - e.$$

Hieraus folgt $r^2 - er = e^2$,

$$r^2 = e^2 + r\,e,$$

$$r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(e + \frac{r}{2}\right)^2;$$

folglich $e = -\frac{r}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$.

Die Construction dieser algebraischen Formel ist keine andere als die schon vorher gefundene. Man setzt nämlich den gegebenen Radius und dessen Hälfte unter einem rechten Winkel zusammen, zieht die Hypotenuse und schneidet von derselben eine Linie ab, die gleich der Hälfte des Radius ist. Das übrig bleibende Stück der Hypotenuse ist die verlangte Zehnecksseite.

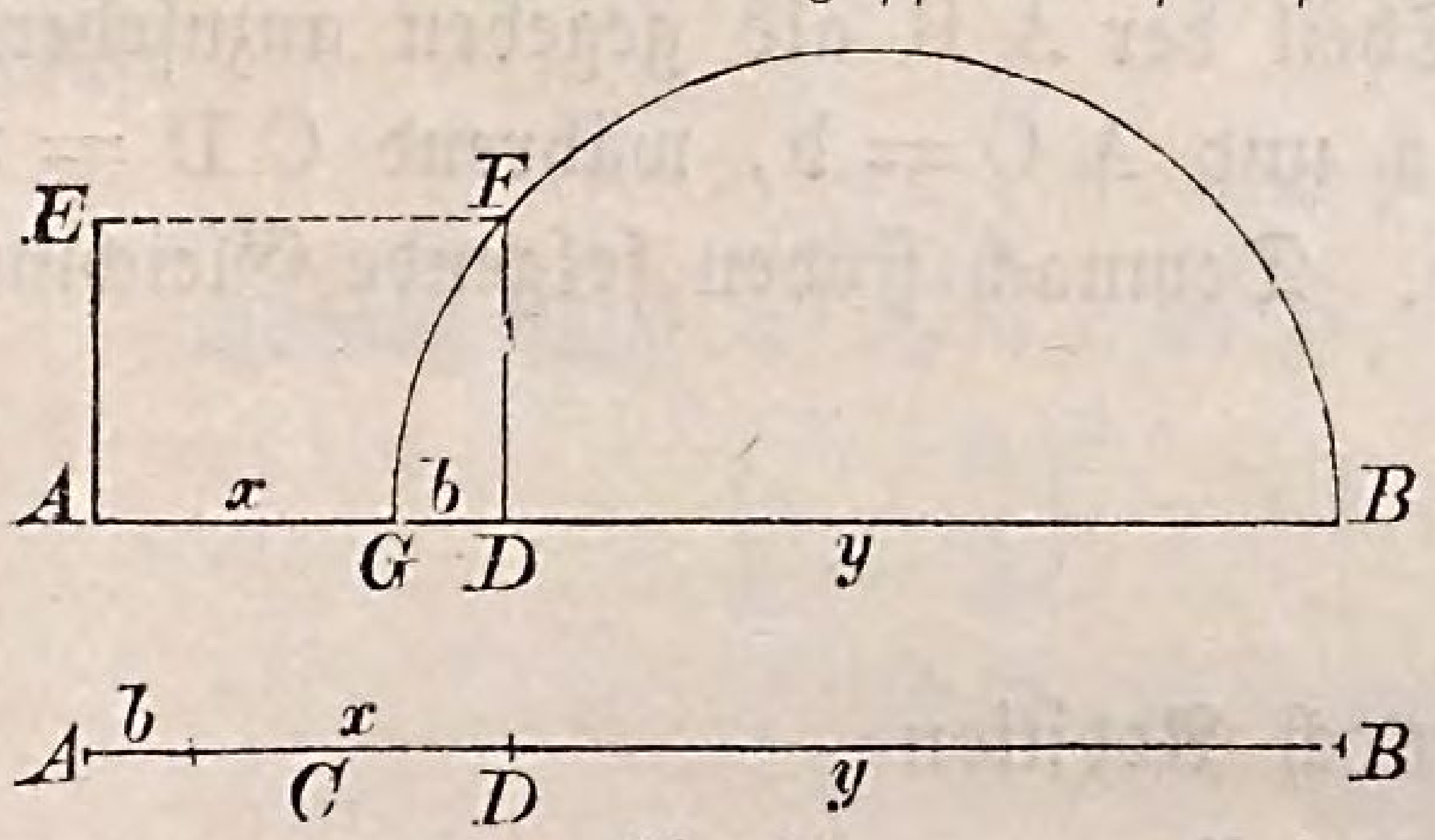


Fig. 42.

72. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie, A B = a, so in drei Theile zu theilen, daß der zweite, C D, die mittlere Proportionale zwischen dem ersten, A C, und dritten, B D, ist.

Construction. Man schneide von der A B ein beliebiges Stück, A G, ab, das jedoch höchstens der dritte Theil von A B sein darf; beschreibe über G B einen Halbkreis; errichte A E = A G senkrecht auf A B; ziehe E F || A B, und F D senkrecht auf A B, so sind C D, F D und D B die drei verlangten Theile. Weil F D = A G ist, so ist die A B selbst der Forderung gemäß getheilt worden. In Fig. 42 jedoch erscheint A G oder die mittlere Proportionale x als erster und das Stück G D = b als zweiter Theil und nur B D nimmt als dritter Theil seine richtige Stelle ein; deshalb wechsele man — wie auf der besonders gezeichneten A B zu sehen ist — mit dem ersten und zweiten Theil, sodaß A C der erste = b und der zweite C D = x gemacht wird.

Beweis. D F = A E = A G. Weil aber

G D : D F = D F : D B, so ergibt sich sogleich

G D : A G = A G : D B;

und weil (per constr.) A C = G D und C D = A G und D B = D B ist, so verwandelt sich diese Proportion ohne weiteres in die folgende:

$$AC : CD = CD : DB.$$

Anmerkung. Wenn A G = $\frac{1}{3}$ der A B genommen wird, so wird die senkrechte F D gleich dem Radius des Halbkreises oder = $\frac{1}{2}$ D B. Dasselbe gilt von der E A und von der A G. Da aber A G = $\frac{1}{2}$ D B geworden, so muß die A B selbst in drei gleiche Theile zerfallen; d. h.

dann ist A C = C D = D B = $\frac{1}{3}$ A B. — Ist jedoch A G größer als $\frac{1}{3}$ A B, so ist die Lösung unmöglich, weil dann E A oder F D über den Halbkreis hinausragt, also die Parallele E F denselben nicht treffen kann.

Algebraische Lösung. Da obige Aufgabe eine unbestimmte ist, so kann sie sehr verschiedenartig gelöst werden. Um aber für die Berechnung ein bestimmtes Resultat zu gewinnen, braucht man nur noch den ersten Theil der A B als gegeben anzusehen. Gegeben seien also A B = a und A C = b, während C D = x und D B = y zu suchen sind. Demnach finden folgende Gleichungen statt:

I. $b : x = x : y.$

II. $x + y = a - b.$

Aus I ergibt sich durch Addition

III. $b + x : b = x + y : x.$

Substituirt man den Werth von x + y (bei II) in III, so findet sich

IV. $b + x : b = a - b : x,$

worin nur eine Unbekannte vorkommt. Hieraus erhält man

V. $x^2 + b x = a b - b^2,$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = a b - \frac{3 b^2}{4};$$

folglich $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{a b - \frac{3 b^2}{4}}$ oder

$$= -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(a - \frac{3 b}{4}\right) b}.$$

Dieser zweite Ausdruck für den Theil x eignet sich vorzugsweise zur Construction. Man stellt nämlich zuerst eine Linie dar, welche um $\frac{3}{4}$ des ersten Theils kleiner ist als die gegebene A B, die also $= a - \frac{3 b}{4}$, und sucht zu ihr und b (d. i. dem ersten Theil) die mittlere Proportionale, von welcher zuletzt noch $\frac{b}{2}$ abgeschnitten wird. Der Rest ist der gesuchte zweite Theil. Der dritte Theil, y, ist a — b — a

$$\text{oder } a + \frac{b}{2} - \sqrt{(a - \tfrac{3}{4} b) b}.$$

73. Aufgabe. Eine gegebene Linie a um ein solches Stück (x) zu verlängern, daß sie mittlere Proportionale zwischen der Verlängerung und der ganzen Linie werde.

Lösung. Wird die gegebene Linie a um x verlängert, so wird daraus a + x. Demnach sind x und a + x die äußern Glieder einer stetigen Proportion. Man hat also der Aufgabe gemäß:

$$x : a = a : x + a,$$

woraus folgt $x^2 + a\,x = a^2$,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

welche Formel bereits in Nr. 69 construirt worden ist.

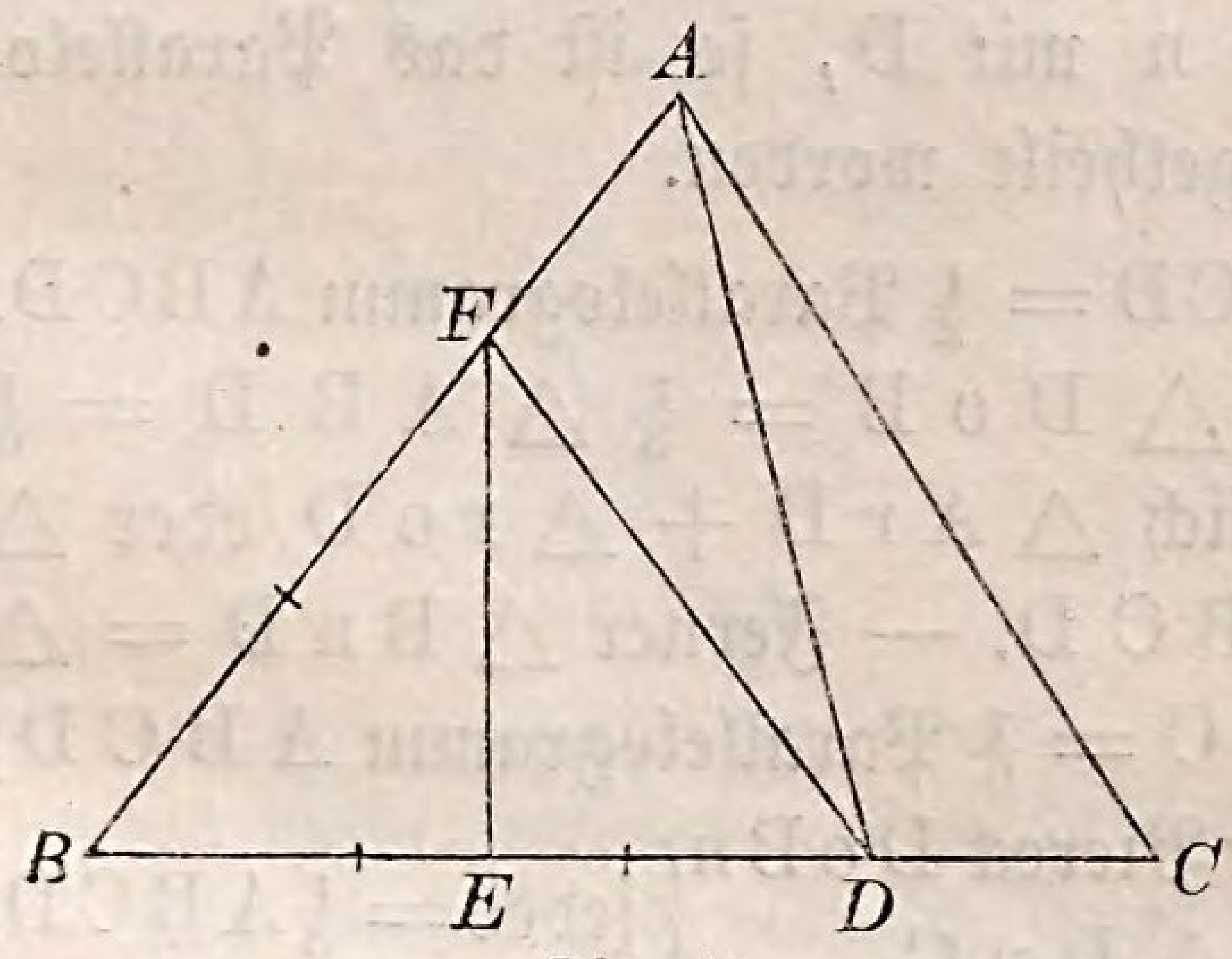


Fig. 43.

74. Aufgabe. Ein Dreieck A B C in vier gleiche Theile zu theilen durch Linien, die nicht parallel und untereinander in Verbindung sind.

Analysis. Schneidet man auf der Grundlinie B C ein Stück C D = $\frac{1}{4}$ B C ab und zieht A D, so ist △ A C D = $\frac{1}{4}$ △ A B C; also △ A B D = $\frac{3}{4}$ △ A B C. — Das jetzt zu theilende Dreieck ist A B D. Nimmt man $\frac{1}{3}$ desselben, so erhält man wieder $\frac{1}{4}$ △ A B C. Man schneide also auf der A B ein Stück A F = $\frac{1}{3}$ A B ab und ziehe F D, so ist △ A F D = $\frac{1}{3}$ △ A B D = $\frac{1}{4}$ △ A B C. — Die beiden gefundenen Dreiecke A C D und A D F betragen zusammengenommen $\frac{1}{2}$ △ A B C; folglich ist auch △ B F D = $\frac{1}{2}$ △ A B C. Man hat also nur noch B D zu halbiren und E F zu ziehen, um zwei neue Dreiecke, B E F und D E F zu erhalten, von denen jedes auch = $\frac{1}{4}$ △ A B C ist.

Construction und Beweis sind in der Analysis enthalten.

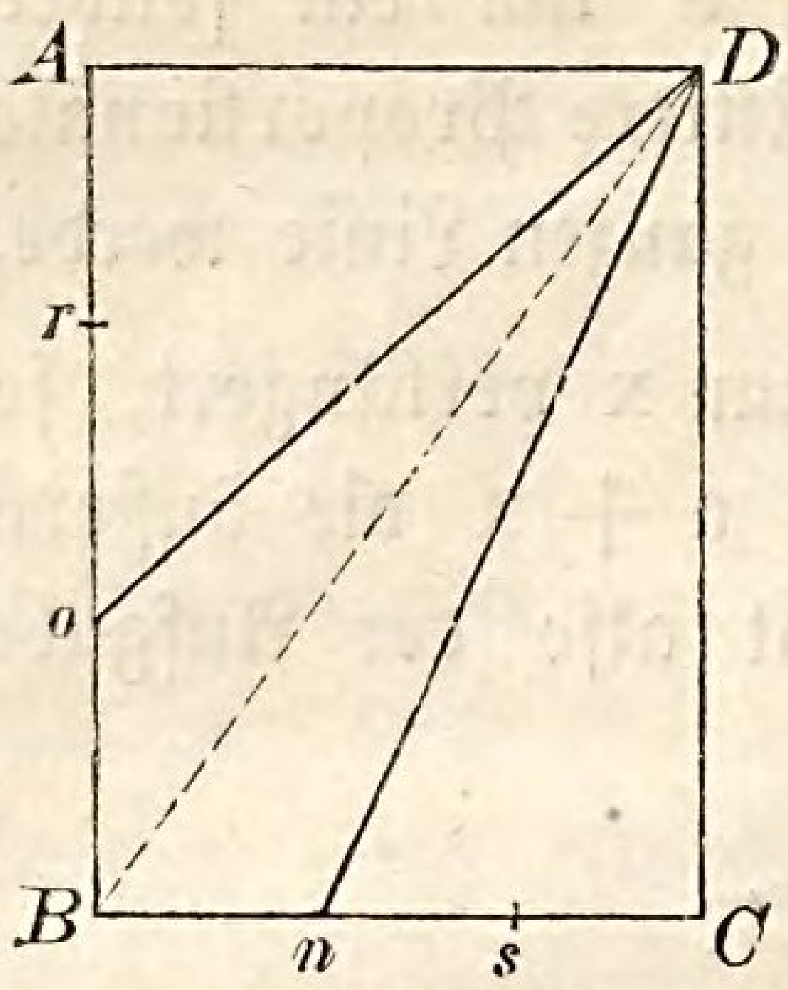


Fig. 44.

75. Aufgabe. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus in drei gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Denkt man sich in dem gegebenen Parallelogramm von der gegebenen Ecke D aus die Diagonale D B gezogen, so erhält man zwei gleiche Dreiecke D A B und D B C, von denen sich jedes durch Linien von D aus nach den Grundlinien, A B und B C, in drei gleiche Theile zerlegen läßt. Da jeder derselben $\frac{1}{6}$ des Parallelogramms ist, so braucht man nur zwei solcher Theile zusammen zu nehmen, um stets $\frac{1}{3}$ des Parallelogramms zu erhalten.

Construction. Man theile A B sowol als B C in drei gleiche Theile und verbinde die der Ecke B am nächsten liegenden beiden Theilpunkte o und n mit D, so ist das Parallelogramm der Forderung gemäß getheilt worden.

Beweis. $\triangle ABD = \triangle BCD = \frac{1}{2}$ Parallelogramm ABCD. — $\triangle ADr = \triangle Dro = \triangle DoB = \frac{1}{3} \triangle ABD = \frac{1}{6}$ Parallelogramm A B C D; folglich $\triangle ArD + \triangle roD$ oder $\triangle AoD = \frac{1}{3}$ Parallelogramm A B C D. — Ferner $\triangle BnD = \triangle nsD = \triangle sCD = \frac{1}{3} \triangle DBC = \frac{1}{6}$ Parallelogramm A B C D; folglich $\triangle BnD + \triangle DoB$ oder Viereck D o B n sowie $\triangle Dns + \triangle DsC$ oder $\triangle DnC$ } jedes $= \frac{1}{3}$ ABCD.

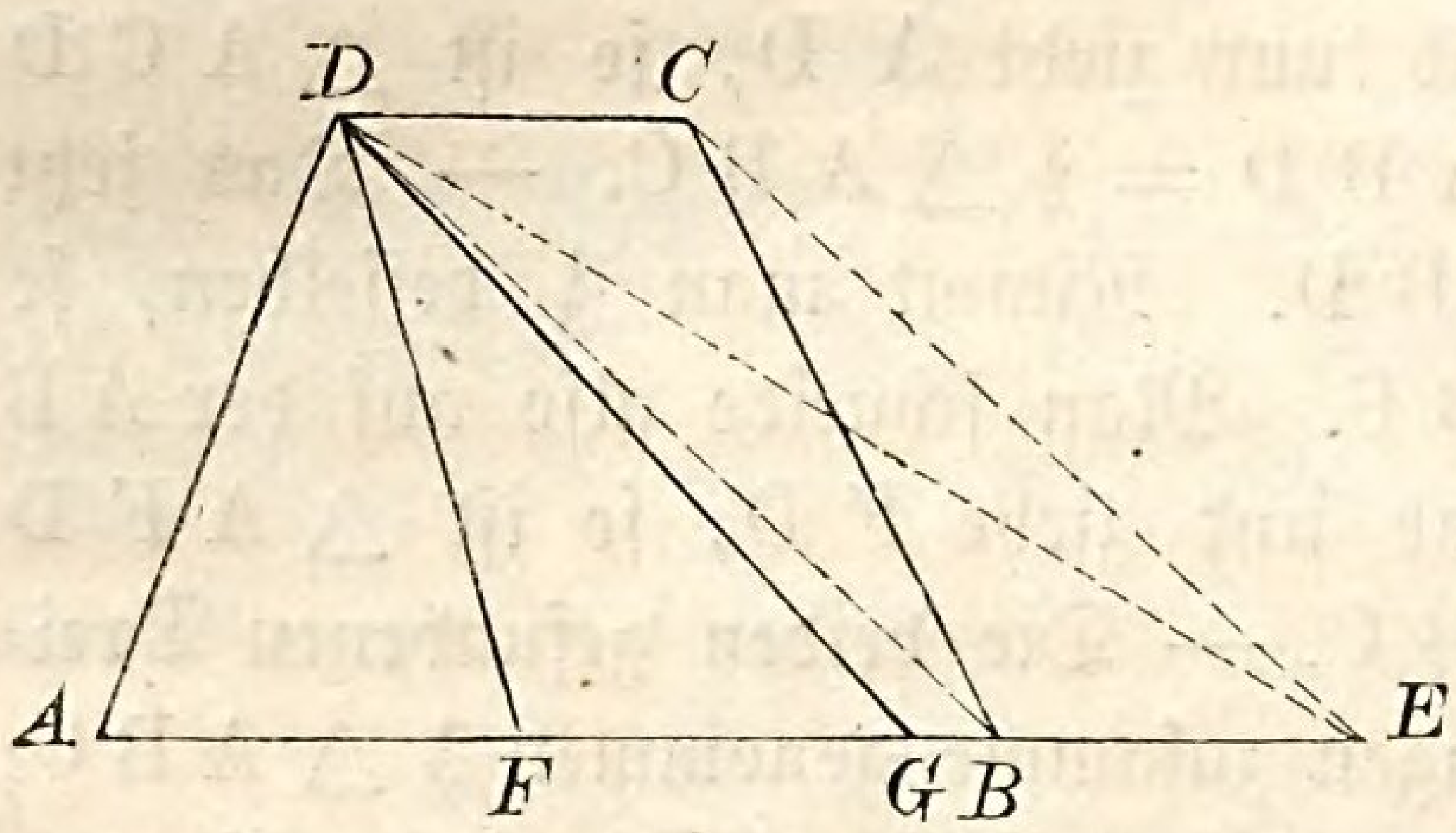


Fig. 45 a.

76. Aufgabe. Ein Trapez oder Trapezoid von einer Ecke aus in drei gleiche Theile zu theilen.

Construction. Man verwandle das Viereck in ein Dreieck D A E, dessen Spitze die gegebene Ecke ist; theile die Grundlinie dieses Dreiecks in drei gleiche Theile und verbinde die Theilpunkte F und G mit der gegebenen Ecke D, so ist das Viereck A B C D in drei gleiche Theile zerlegt; denn da $\triangle DAF = \triangle DFG = \frac{1}{3} \triangle$

A D E = $\frac{1}{3}$ Viereck A B C D, so muß auch das übrig bleibende Viereck B C D G = $\frac{1}{3}$ des gegebenen Vierecks A B C D sein.

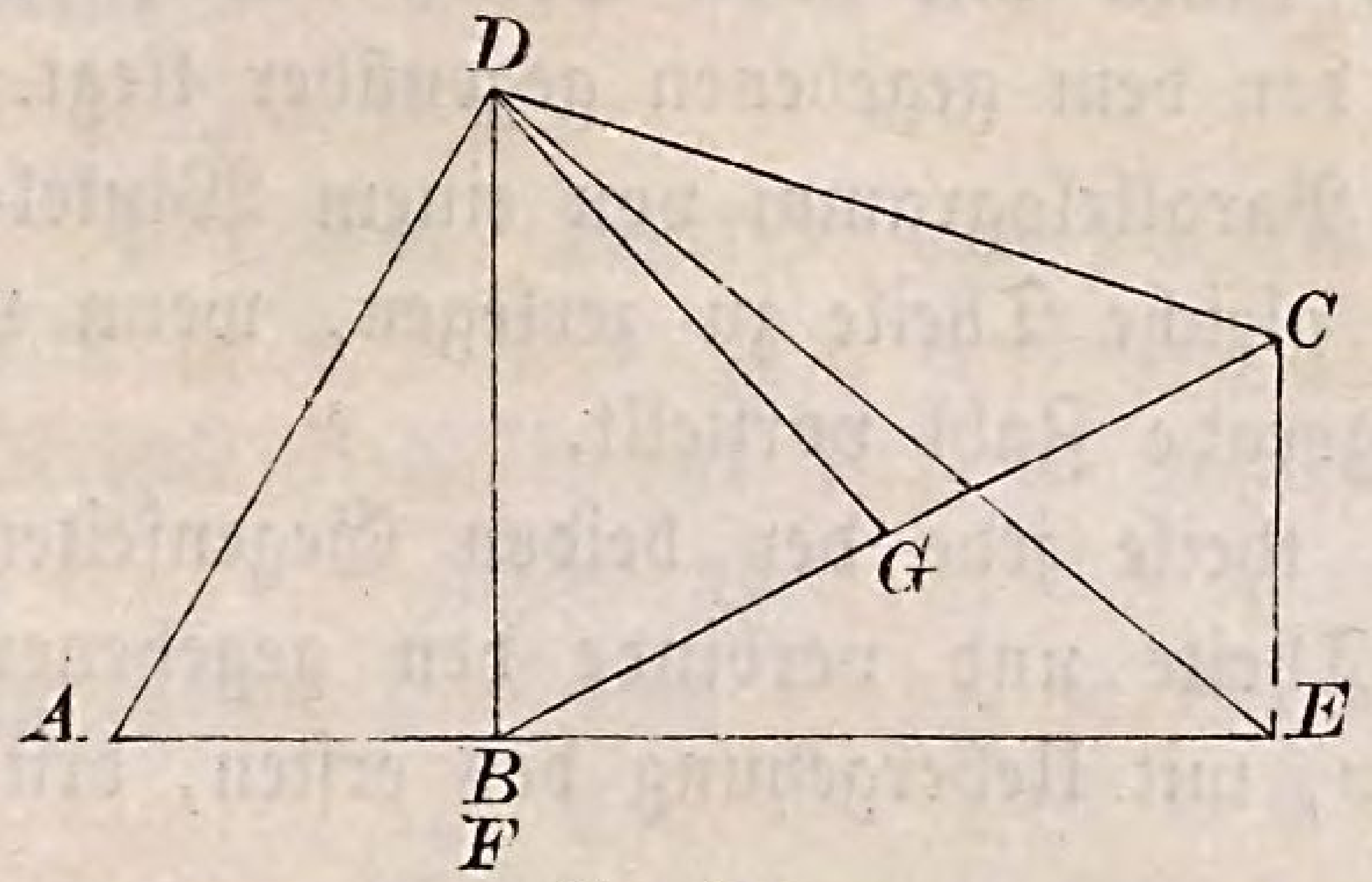


Fig. 45 b.

Anmerkung I. Wenn der Theilpunkt F, wie in Fig. 45 b, in die Ecke B fällt, so ist die Diagonale D B selbst die eine Theilungslinie und △ D A B = $\frac{1}{3}$ des Vierecks, während C D B auch ein Dreieck ist und $\frac{2}{3}$ des Vielecks beträgt. Die Halbirung des △ C D B geschieht dann durch D G, welche die gegebene Ecke mit der Mitte von B C verbindet.

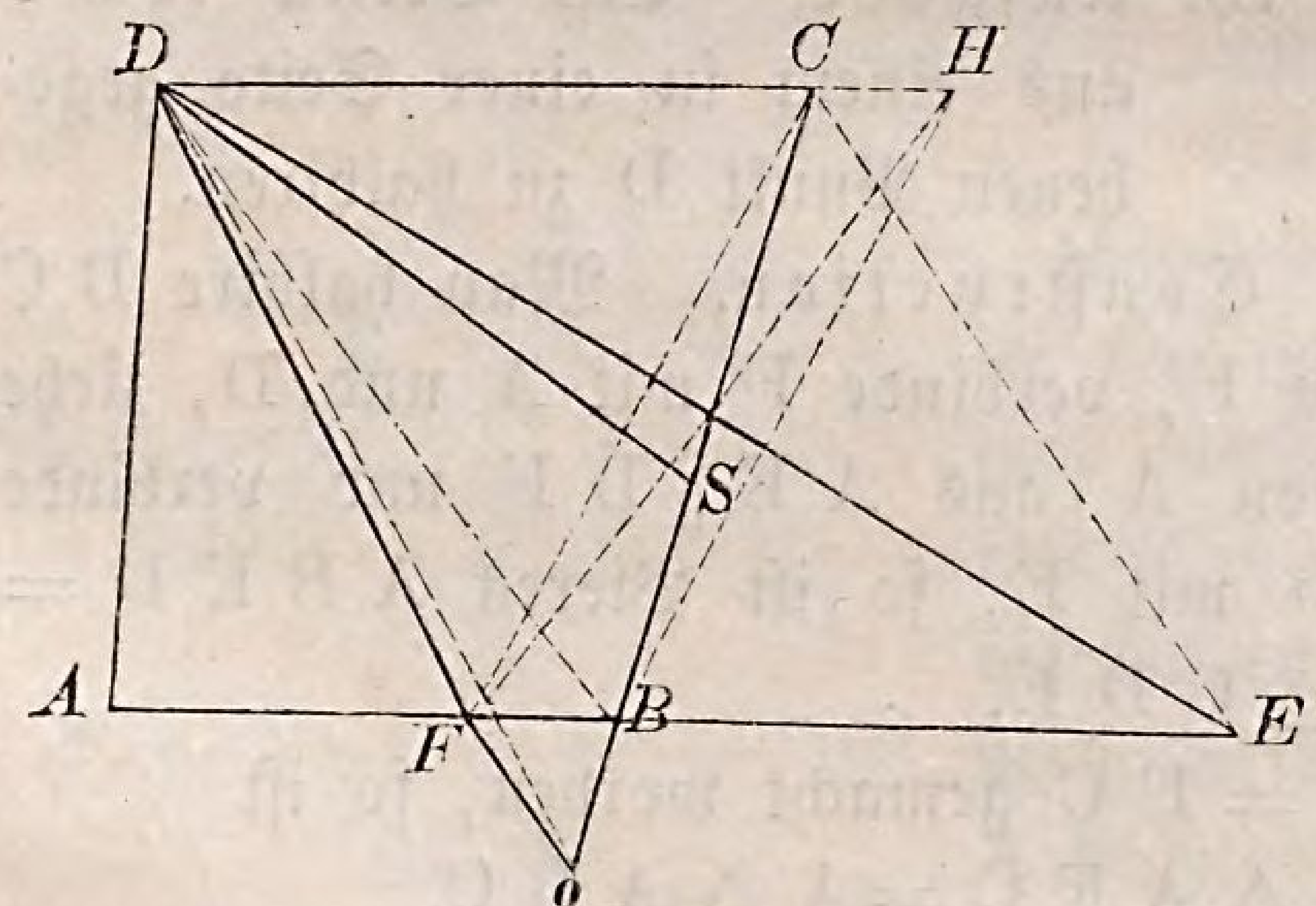


Fig. 45 c.

Anmerkung II. Fällt zwar, wie in Fig. 45 c, Punkt F, innerhalb der A B, aber Punkt G außerhalb, so muß das Viereck B C D F wieder erst in ein Dreieck verwandelt werden. Angenommen D F H oder D B H wäre dies Dreieck, so wäre durch eine Linie von D aus auf die Mitte von F H oder B H die verlangte Halbirung des übrig gebliebenen Vierecks B C D F nicht ausführbar. Das erforderliche Dreieck muß nämlich längs der B C, der einen Seite des Vierecks, zu liegen kommen. Zu diesem Zwecke könnte man die B C entweder über B oder über C hinaus verlängern. Im erstern Falle legt man durch F mit der Diagonale D B die Parallele F o, welche in o auf die verlängerte B C trifft, und zieht D o, sodaß △ D o C dem Viereck B C D F gleich ist. Dann halbire man o C und verbinde den Halbirungspunkt mit D, so ist die verlangte Theilung geschehen, nämlich △ D S C = Viereck D F B C = $\frac{1}{3}$ des gegebenen Vierecks A B C D. Im zweiten Falle jedoch, d. h. wenn die Verlängerung der B C über B hinaus geschieht, zeigt sich bald, daß zwar ein dem Viereck gleiches Dreieck entsteht, dessen Spitze aber nicht in der gegebenen Ecke D liegt. Es darf demnach die Verlängerung von C B nur über B hinaus geschehen.

77. Aufgabe. Ein Parallelogramm von einem Winkelpunkt aus in eine beliebige, aber gerade Anzahl gleicher Theile zu zerlegen.

Construction. Man theile jede der beiden Gegenseiten des Punktes in halb soviel gleiche Theile als verlangt werden, und verbinde den gegebenen Punkt mit allen Theilpunkten, sowie mit dem Winkelpunkte, der dem gegebenen gegenüber liegt.

78. Aufgabe. Ein Parallelogramm von einem Winkelpunkt aus in n gleiche Theile zu zerlegen, wenn n eine beliebige ungerade Zahl vorstellt.

Construction. Man theile jede der beiden Gegenseiten des Punktes in n gleiche Theile und verbinde den gegebenen Punkt mit allen Theilpunkten, mit Uebergehung des ersten, dritten, fünften u. s. w.

Der Beweis wird wie in Nr. 75 geführt.

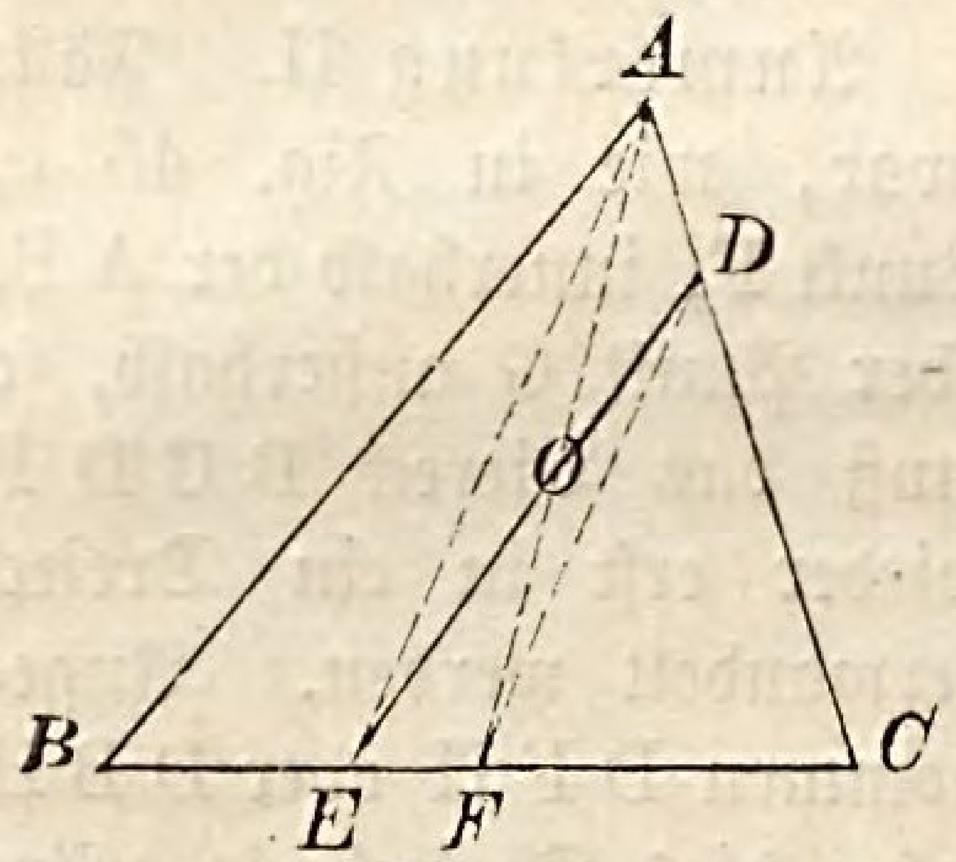


Fig. 46.

79. Aufgabe. Ein Dreieck A B C aus einem in einer Seite gegebenen Punkt D zu halbiren.

Construction. Man halbire B C in F, verbinde F mit A und D, ziehe von A aus A E || D F und verbinde D mit E, so ist Viereck A B E D = △ C D E.

Beweis. Weil B F = F C gemacht worden, so ist

△ A B F = △ A F C = ½ △ A B C.

Nun ist aber, weil A E mit D F parallel läuft,

△ A D E = △ A E F,

die das △ A E O gemeinschaftlich haben. Folglich ist

△ A D O = △ E F O.

Daher ist △ A B F + △ A D O — △ E F O = △ A F C — △ A D O + △ E F O, d. h. Viereck A B E D = △ D E C = ½ △ A B C.

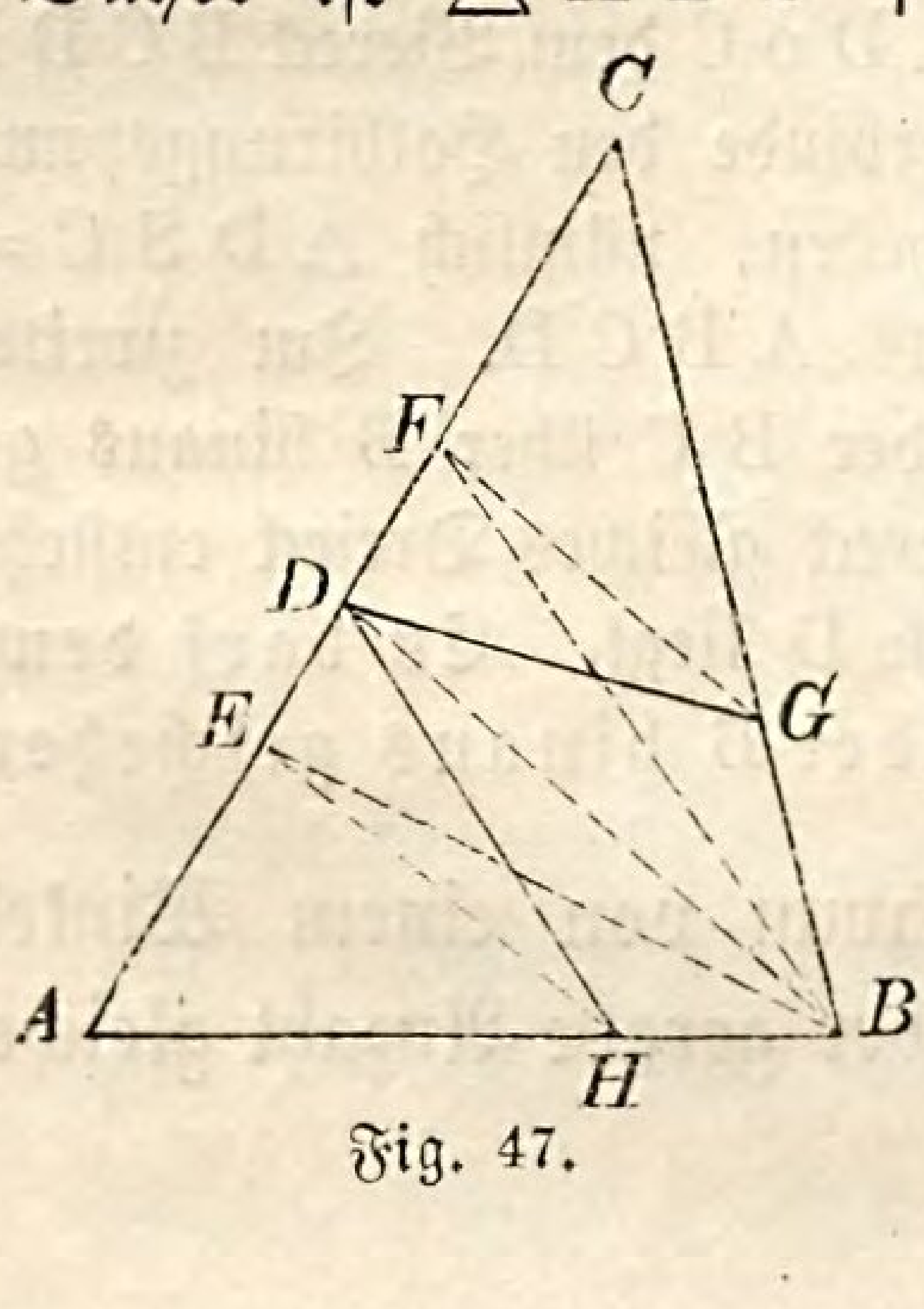


Fig. 47.

80. Aufgabe. Ein Dreieck A B C aus einem in einer Seite gegebenen Punkt D in drei gleiche Theile zu zerlegen.

Construction. Man theile A C in drei gleiche Theile, ziehe D B und damit parallel die Linien E H und F G,

bis sie die Seiten des gegebenen Dreiecks schneiden, und verbinde die Durchschnittspunkte H und G mit dem gegebenen Punkt D, so ist △ A D H = Viereck D H B G = △ D G C = $\frac{1}{3}$ △ A B C.

Beweis. Werden noch die Linien E B und F B gezogen, so ist △ A D H = △ A E B = $\frac{1}{3}$ △ A B C (wegen der gleichen Dreiecke D E H und B E H zwischen den Parallelen D B und E H). — Weil aber △ B F G = △ D F G (zwischen den Parallelen D B und F G), so ist auch

△ D C G = △ F C B = $\frac{1}{3}$ △ A B C;

folglich Viereck D H B G auch $\frac{1}{3}$ △ A B C.

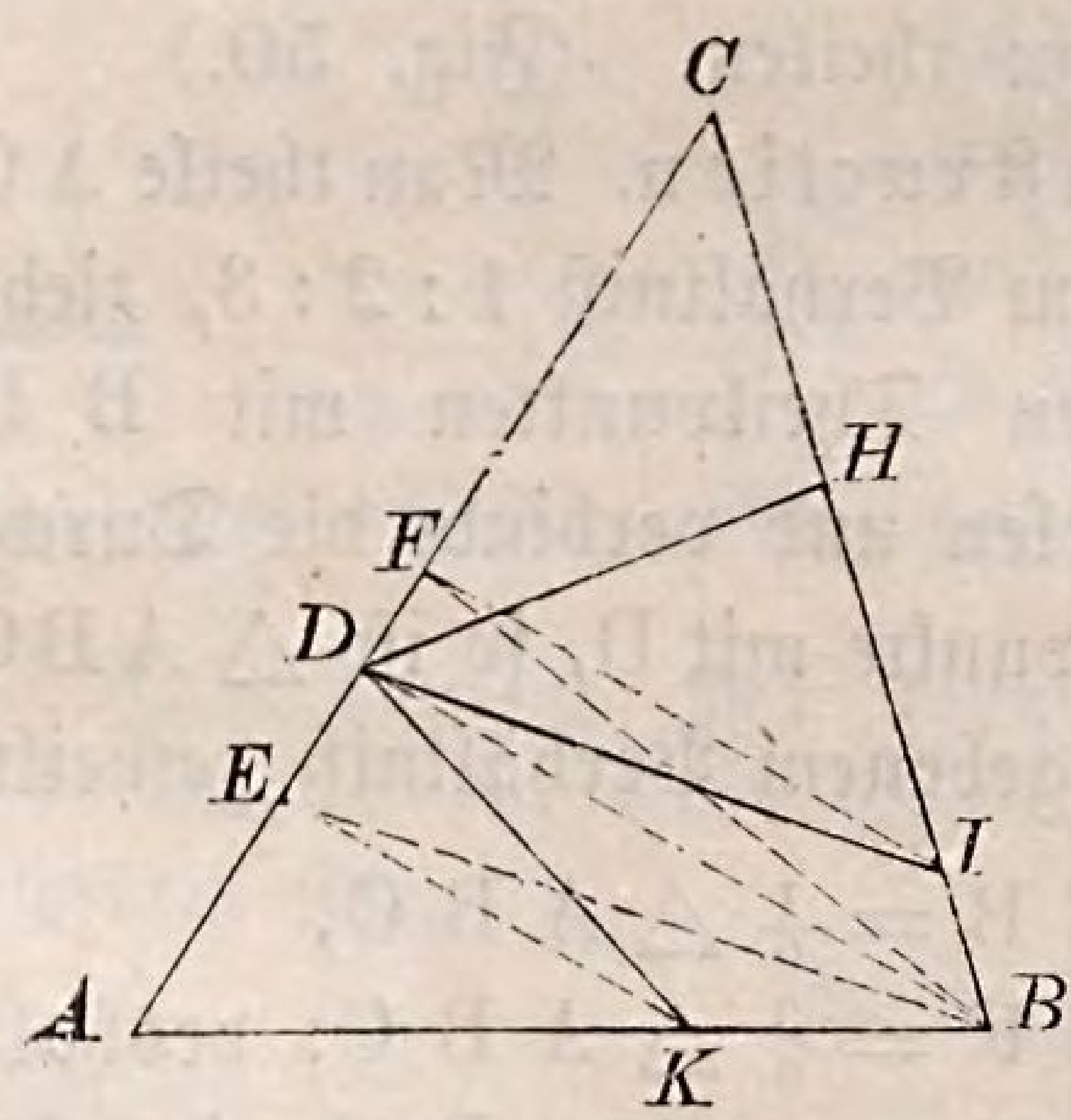


Fig. 48.

81. Aufgabe. Dreieck A B C von D aus in vier gleiche Theile zu theilen.

Construction. Man theile A C in vier gleiche Theile, ziehe D B und damit parallel die Linien E K und F I, welche in K und I auf die Seiten des Dreiecks treffen, und verbinde K und I mit D: so ist △ A D K = Viereck D K B I = $\frac{1}{4}$ △ A B C, folglich △ C D I = $\frac{1}{2}$ △ A B C. Nun ziehe man D H auf die Mitte der Linie C I, so ist auch △ C D I halbirt, nämlich

△ D I H = △ D H C = $\frac{1}{4}$ △ A B C.

Behufs des Beweises, der wie in der vorigen Aufgabe zu führen ist, ziehe man noch E B und F B.

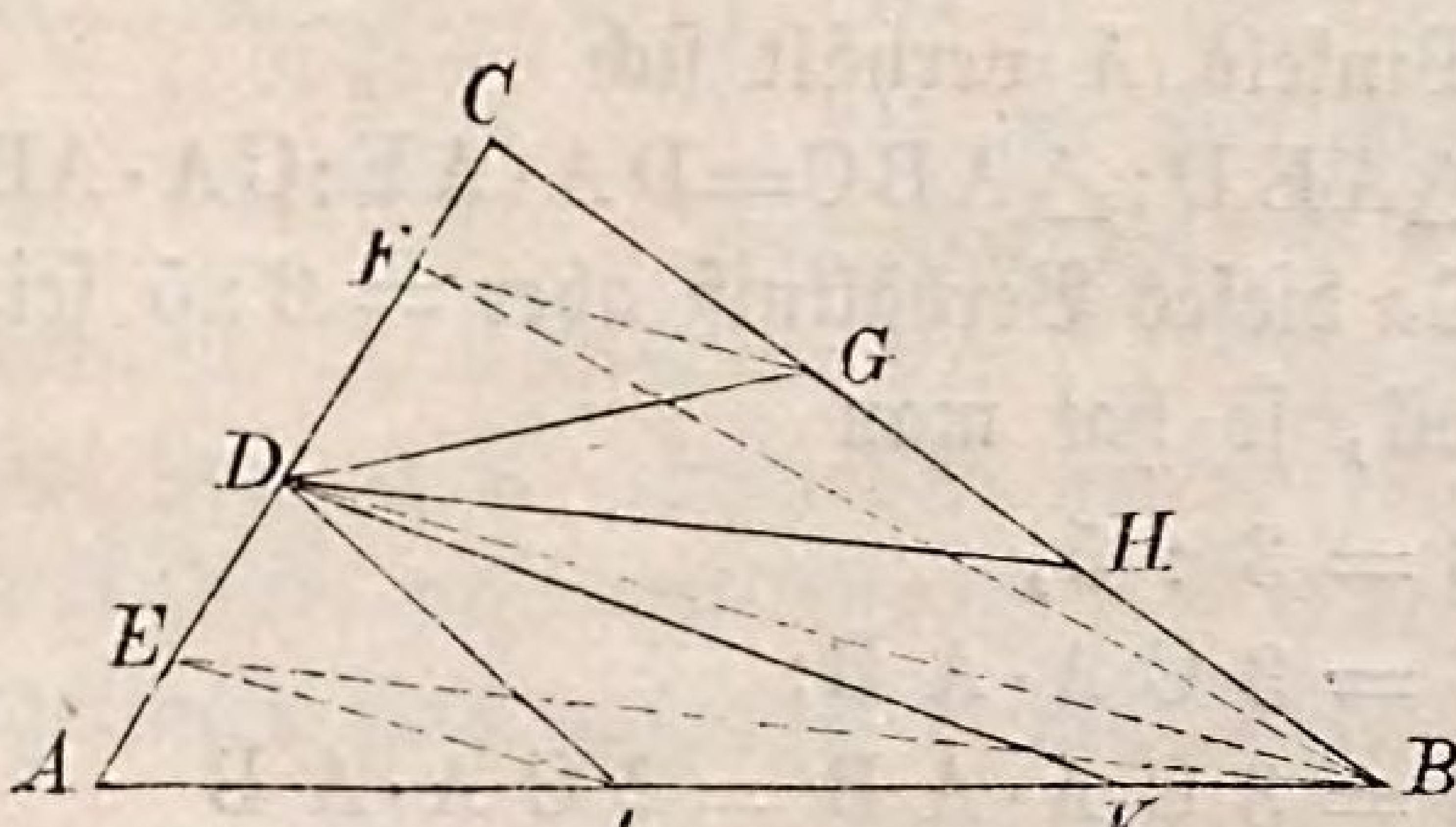


Fig. 49.

82. Aufgabe. Dreieck A B C von D aus in fünf gleiche Theile zu zerlegen.

Construction. Man mache A E = F C = $\frac{1}{5}$ A C, ziehe B D, lege durch E und F mit B D Parallelen bis zum Durchschnitt mit den Seiten, dann trage man

A I auf A B und C G auf B C so oft auf, als es angeht; ziehe aus I, K, H und G Linien nach D, so ist △ A B C in fünf gleiche Theile getheilt.

Beweis. △ A I D = △ A E B = $\frac{1}{5}$ △ A B C
und △ A I D = △ I K D = △ D G C = △ D G H, weil jedes derselben = $\frac{1}{5}$ △ A B C ist; folglich ist auch das übrig bleibende Viereck D H B K = $\frac{1}{5}$ △ A B C.

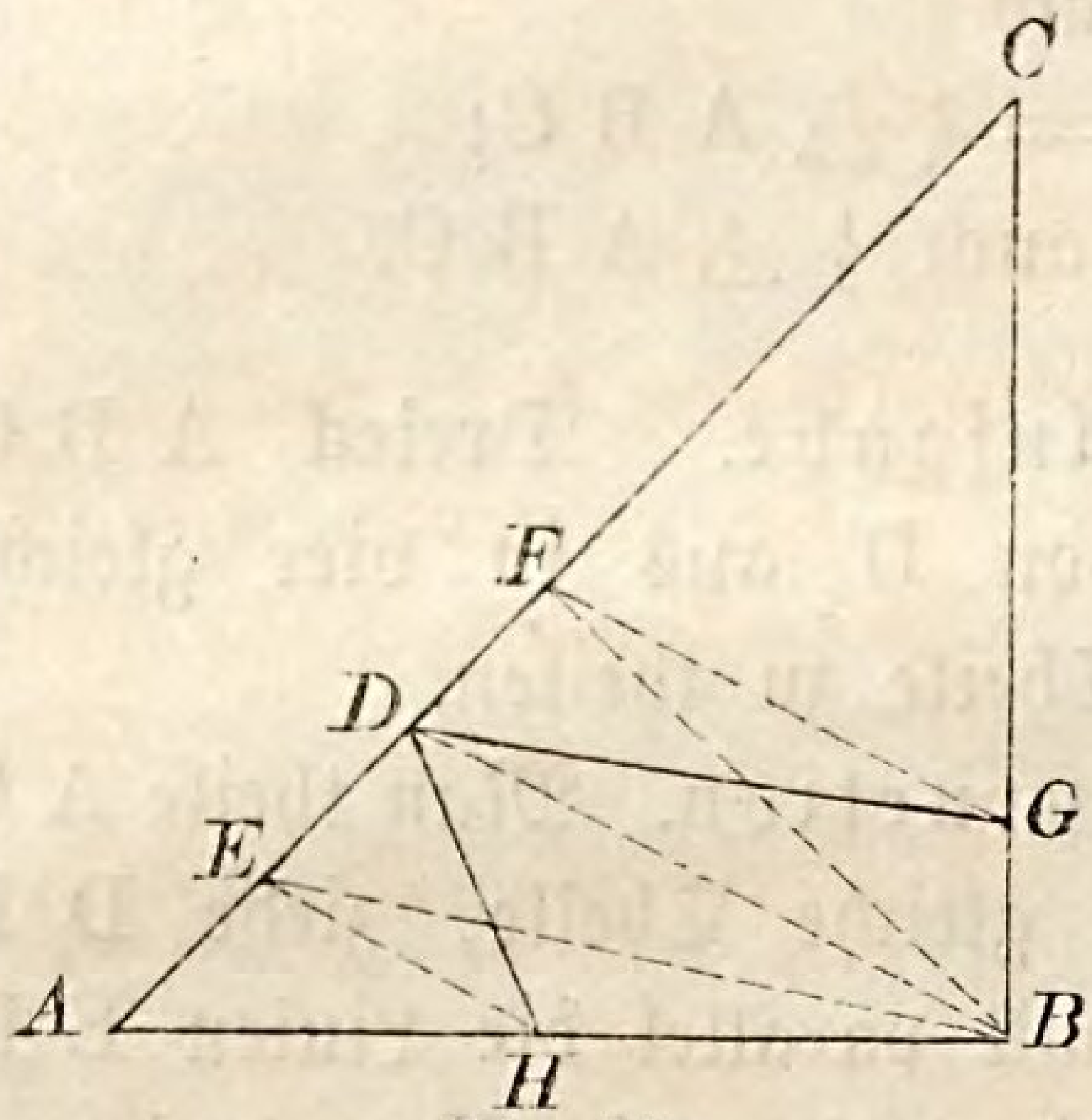


Fig. 50.

83. Aufgabe. Dreieck A B C von D aus nach einem gegebenen Verhältniß (1 : 2 : 3) zu theilen. (Fig. 50.)

Construction. Man theile A C nach dem Verhältniß 1 : 2 : 3, ziehe aus den Theilpunkten mit B D Parallelen und verbinde die Durchschnittspunkte mit D, so ist △ A B C nach gegebenem Verhältniß getheilt.

Beweis. △ A D H = △ A E B = $\frac{1}{6}$ △ A B C,
△ C D G = △ B C F = $\frac{3}{6}$ △ A B C; deshalb
Viereck B G D H = $\frac{2}{6}$ △ A B C, folglich
△ A D H : Viereck B G D H : △ C D G = 1 : 2 : 3.

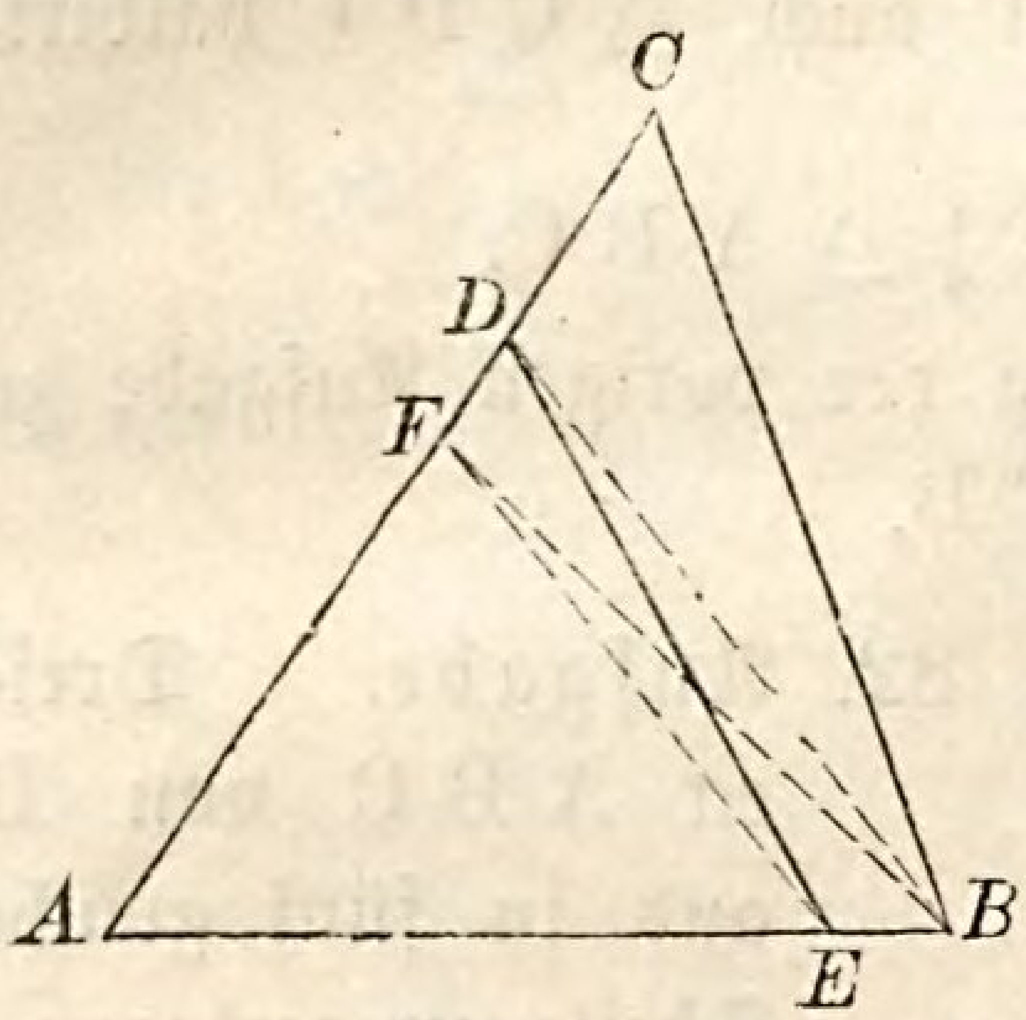


Fig. 51.

84. Aufgabe. Im Dreieck A B C von D aus eine Linie D E so zu ziehen, daß das Dreieck A D E = $\frac{3}{5}$ des Dreiecks A B C werde.

Analysis. Wegen des gleichen Winkels A verhält sich
△ A E D : △ A B C = D A · A E : C A · A B.
Da dieses Verhältniß aber = 3 : 5 sein soll, so hat man

$$D A \cdot A E : C A \cdot A B = 3 : 5,$$
$$\text{oder } 5\, D A \cdot A E = 3\, C A \cdot A B;$$
$$\text{folglich } A E = \frac{3\, C A \cdot A B}{5\, D A} = \frac{\frac{3}{5} C A \cdot A B}{D A},$$

d. h. A E ist die vierte Proportionallinie zu D A, $\frac{3}{5}$ C A und A B.

Construction. Diese Proportionallinie wird nach Nr. 82 gefunden, wenn man A C in fünf gleiche Theile theilt, von A aus drei derselben nimmt und durch den dritten Theilpunkt mit D B eine Parallele zieht, welche die A B in E trifft. Die Verbindungslinie zwischen D und E ist die oben verlangte Theilungslinie.

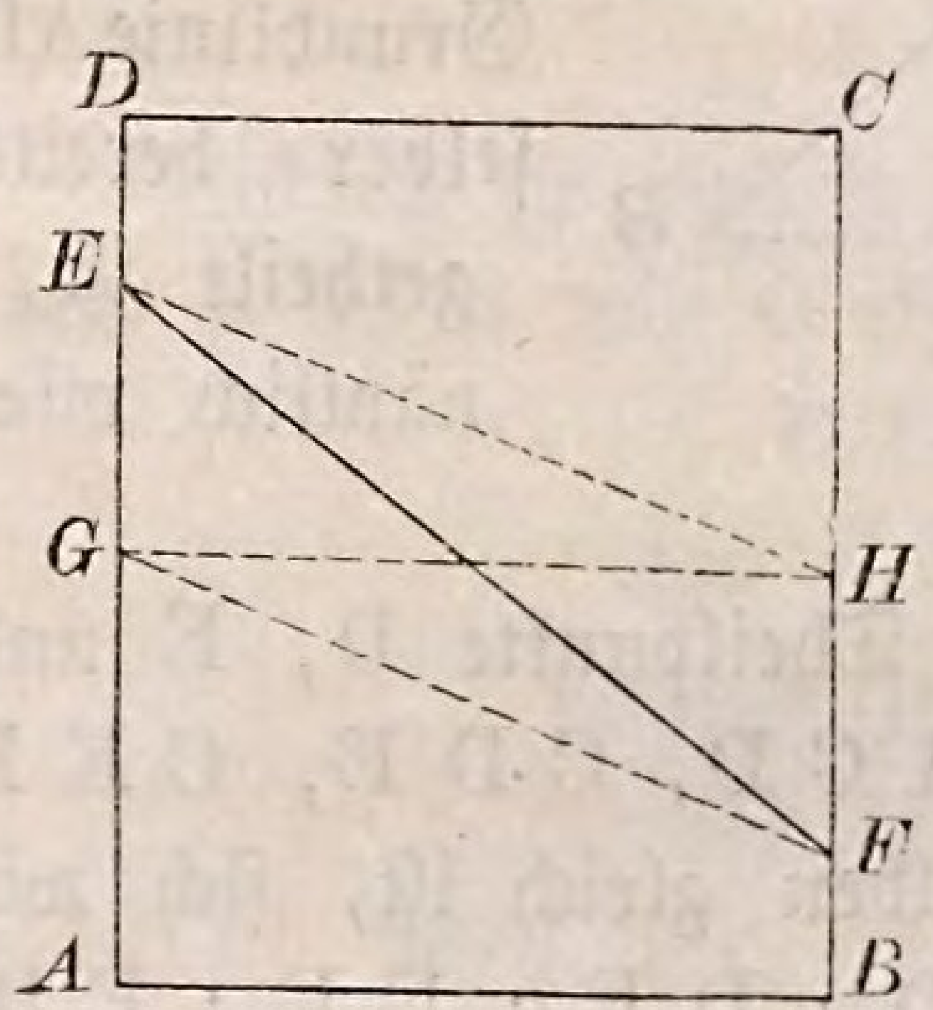


Fig. 52.

85. Aufgabe. Ein Parallelogramm von einem in einer Seite befindlichen Punkt E aus zu halbiren.

Construction. Man halbire die beiden parallelen Seiten A D und B C, ziehe G H und E H, alsdann von G aus G F || E H und verbinde E mit F: so ist

Viereck A B F E = Viereck C D E F = $\frac{1}{2}$ Parallelogramm ABCD.

Anmerkung. Man kann auch B F = D E machen und E mit F verbinden; da die beiden Theile, in welche das Parallelogramm zerfällt, congruent sind.

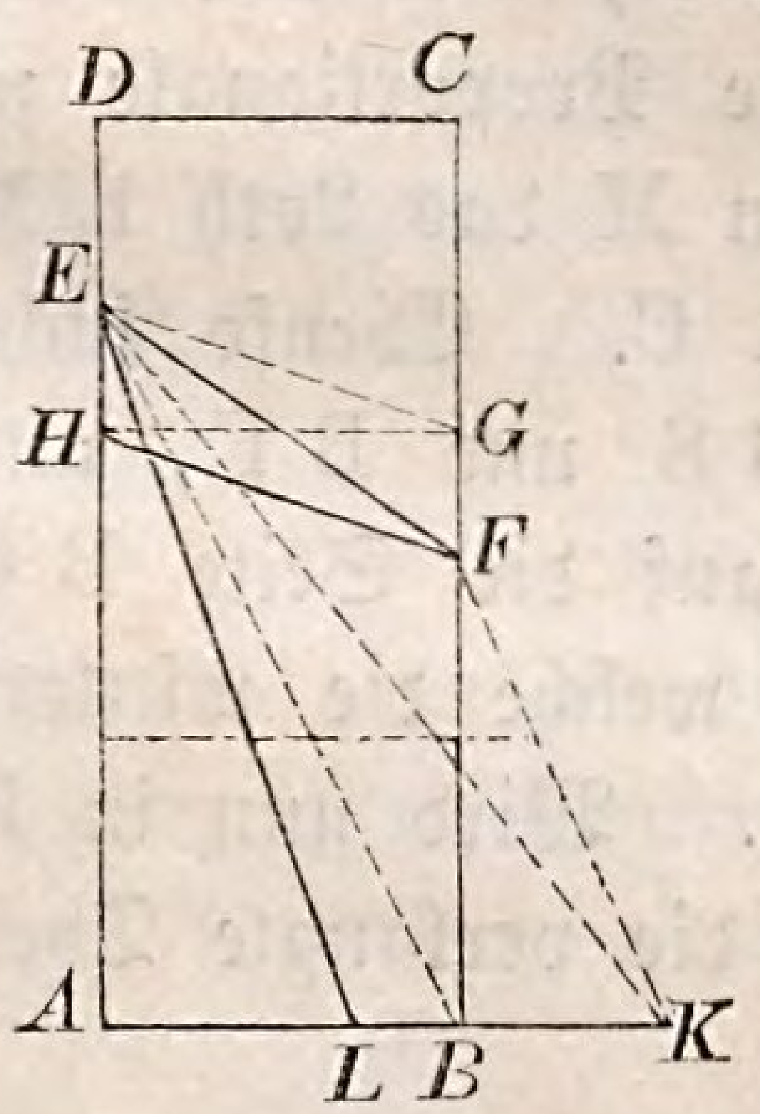


Fig. 53.

86. Aufgabe. Parallelogramm A B C D von E aus in drei gleiche Theile zu zerlegen.

Construction. Man theile die beiden parallelen Seiten A D und B C in drei gleiche Theile, ziehe E G und aus dem Theilungspunkt H mit E G eine Parallele H F und verbinde E mit F, so ist E D C F = $\frac{1}{3}$ ABCD. Ferner ziehe man E B, und aus F bis zur Verlängerung von A B mit E B eine Parallele F K und verbinde E mit K. Dann ist $\triangle$ A E K = $\frac{2}{3}$ A B C D, und wenn noch E mit der Mitte von A K verbunden wird, so erhält man $\triangle$ E A L = $\frac{1}{3}$ A B C D, also auch Viereck E F B L = $\frac{1}{3}$ A B C D. Die Theilungslinien sind daher E F und E L.

87. Aufgabe. Ein Dreieck A B C durch Linien, die senkrecht auf der Grundlinie stehen, in mehrere Theile

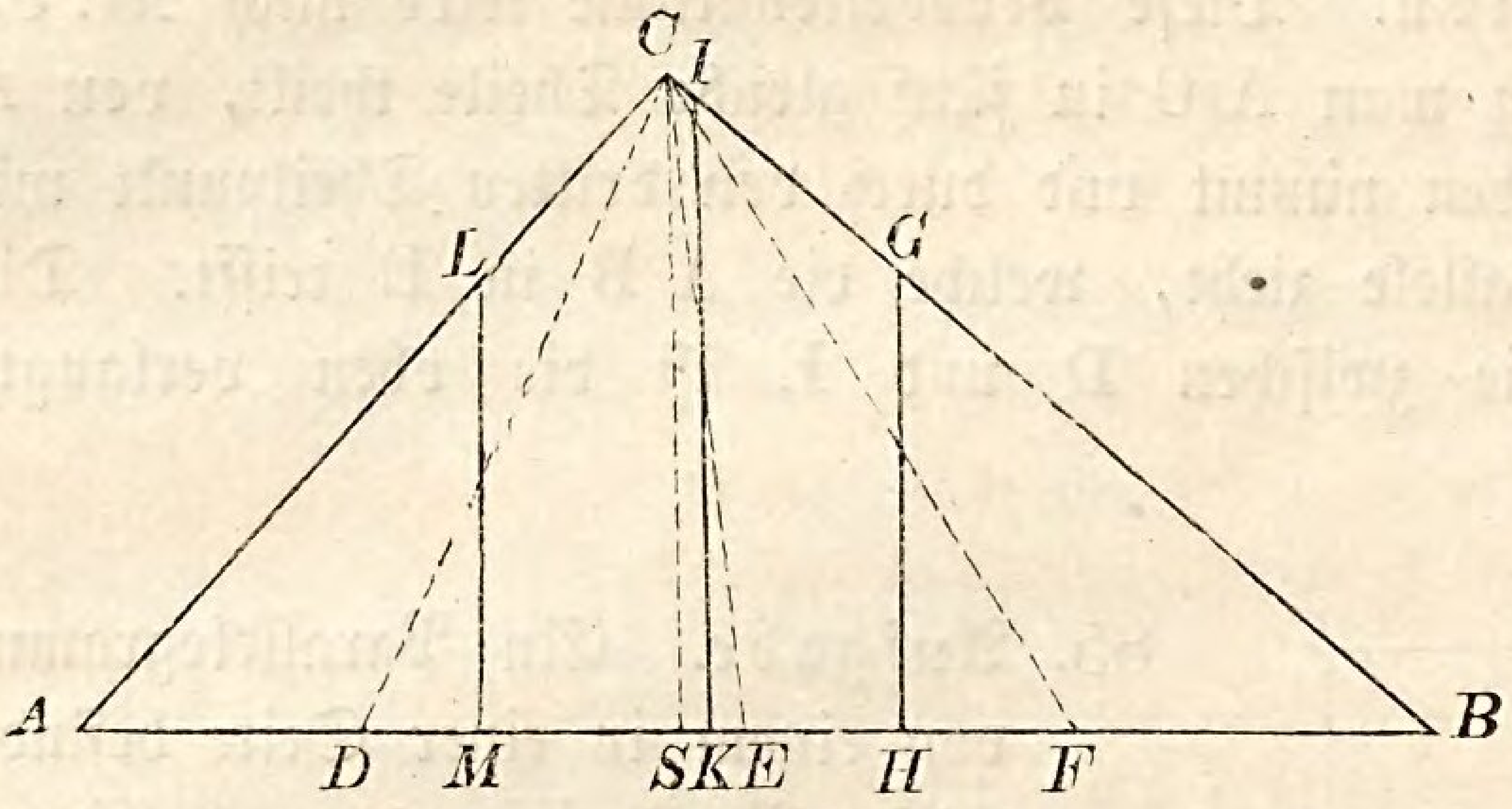


Fig. 54.

so zu zerlegen, daß sich dieselben wie diejenigen Theile verhalten, in welche die Grundlinie AB selber bereits getheilt ist, nämlich wie

A D : D E : E F : F B.

Analysis. Durch Verbindung der Theilpunkte D, E und F mit C erhält man die vier Dreiecke A C D, C D E, C E F und C F B, welche, da die Höhe derselben gleich ist, sich wie ihre Grundlinien verhalten, also wie A D : D E : E F : F B. Werden nun die Dreiecke A C D und A C E, welche den Winkel A gemein haben, und die Dreiecke B C F und B C E, bei denen der Winkel B derselbe ist, in rechtwinkelige Dreiecke verwandelt (nach Nr. 57), so ist die Aufgabe gelöst.

Construction. Man ziehe die Linien C D, C E und C F, sowie die Höhe C S und suche die mittlere Proportionale zu A D und A S, nämlich A M, und errichte in M das Loth L M bis zum Zusammentreffen mit der Seite A C. Ebenso suche man B H, die mittlere Proportionale zu B S und B F, und errichte in H die senkrechte H G, bis sie auf die Seite B C trifft. Zuletzt ist noch B K zu ermitteln, welche die mittlere Proportionallinie zwischen B S und B E ist. Wird nun in K das Loth K I bis zur B C errichtet, so ist die verlangte Theilung des Dreiecks A B C ausgeführt.

Beweis. Weil A M die mittlere Proportionale zwischen A D und A S ist, so hat man

$$AD : AM = AM : AS;$$

und weil C S parallel mit L M läuft, also die Dreiecke A L M und A C S ähnlich sind, so ist

$$CS : LM = AS : AM.$$

Wenn beide Proportionen miteinander multiplicirt werden, so ergibt sich

$$AD \cdot CS = AM \cdot LM,$$
d. h. $\triangle ACD = \triangle ALM$.

Ferner ist B H die mittlere Proportionale zwischen B F und B S, und deshalb

$$BF : BH = BH : BS;$$
und weil noch $CS : GH = BS : BH$, so folgt hieraus, daß

$$\triangle BCF = \triangle BGH \text{ ist.}$$

Endlich ist noch B K die mittlere Proportionale zwischen B E und B S, so wie $GH \parallel IK$; demnach

$$BE : BK = BK : BS$$
und $CS : IK = SB : KB$,

folglich $BE \cdot CS = BK \cdot IK$

oder $\triangle CEB = \triangle IKB$.

Weil aber $\triangle CEB = \triangle IKB$

und $\triangle CFB = \triangle GHB$,

so ist $\triangle CEB - \triangle CFB = \triangle IKB - \triangle GHB$,

d. h. $\triangle CEF =$ Viereck I K H G.

Nun ist $\triangle CAM = \triangle ALM$,

$\triangle CFB = \triangle GHB$,

$\triangle CEF =$ Viereck I K H G,

und demgemäß

$\triangle ABC - \triangle CAM - \triangle CFB - \triangle CEF = \triangle ABC - \triangle ALM - \triangle GHB -$ Viereck I K H G,

d. h. $\triangle CDE =$ Fünfeck L M K I C;

woraus zum Schluß folgt, daß sich die durch die senkrechten Linien entstandenen Theile des Dreiecks wie die gegebenen Theile der Grundlinie verhalten.

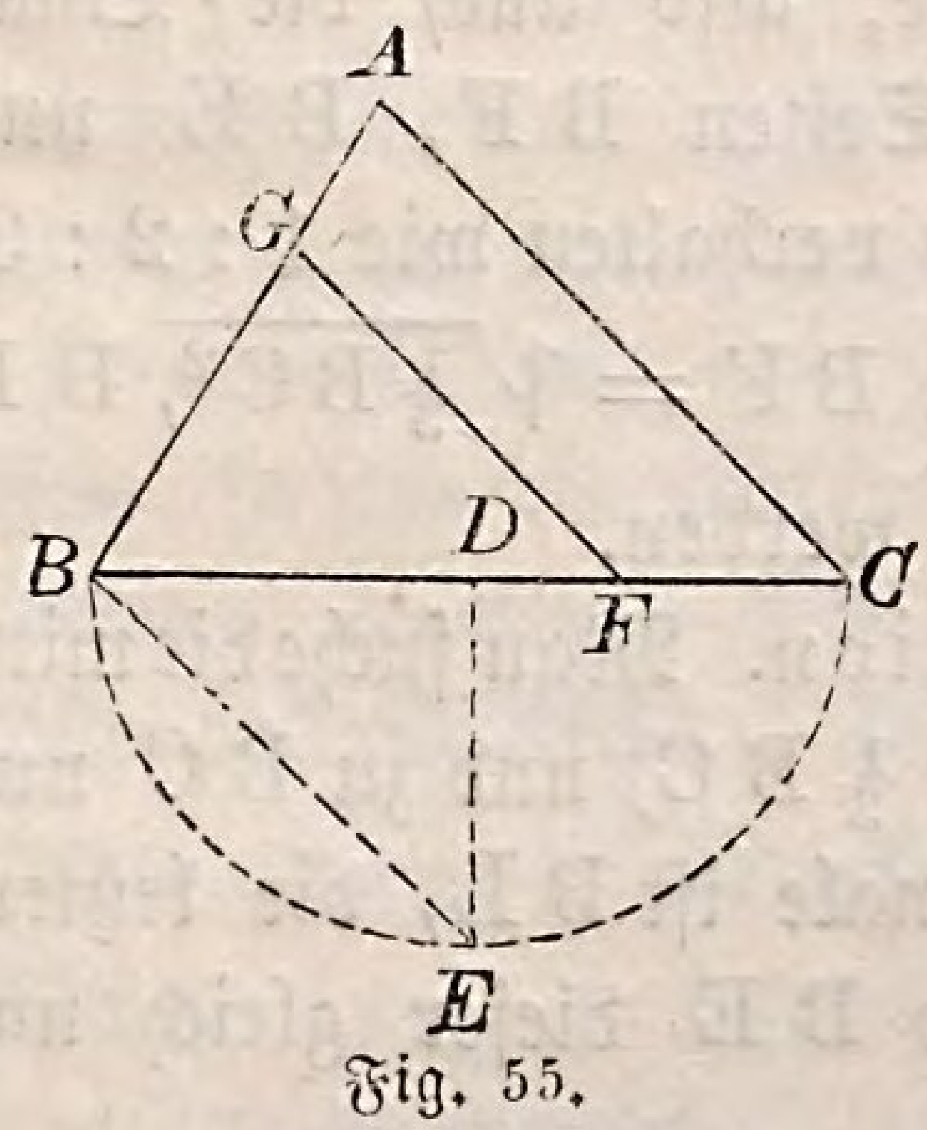


Fig. 55.

88. Aufgabe. Ein Dreieck A B C durch eine Linie G F, welche mit einer Seite desselben parallel laufen soll, zu halbiren.

Analysis. Weil G F und A C parallel laufen, so sind die Dreiecke B G F und B A C einander ähnlich, und verhalten sich deshalb dieselben wie die Quadrate zweier homologen Seiten, d. h. wie

$BF^2 : BC^2$, oder, da das gegebene Dreieck halbirt werden soll, wie 1 : 2. Man hat also die Proportion

$$BF^2 : BC^2 = 1 : 2,$$

woraus sich ergibt

$$BF = \sqrt{BC \cdot \frac{BC}{2}},$$

d. h. B F muß die mittlere Proportionale zwischen B C und $\frac{1}{2}$ B C sein.

Construction. Man errichte in der Mitte von B C ein Loth und verlängere es bis zum Zusammentreffen mit der Peripherie des auf B C ruhenden Halbkreises, verbinde dann den Durchschnittspunkt E mit B, so ist B E die erforderliche mittlere Proportionale. Nun mache man B F = B E und ziehe von F aus mit A C eine Parallele, bis dieselbe die A B in G schneidet, so ist Dreieck B G F die Hälfte des Dreiecks A B C.

Beweis. Weil B F = B E (per constr.), so ist

$$BF^2 = BE^2 = \tfrac{1}{2} BC.$$

Demnach verhält sich $BF^2 : BC^2 = 1 : 2$

und, als ähnliche Figuren, auch

$$\triangle BFG : \triangle ABC = 1 : 2.$$

Hieraus folgt $\triangle BFG$ = Trapez $ACFG = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

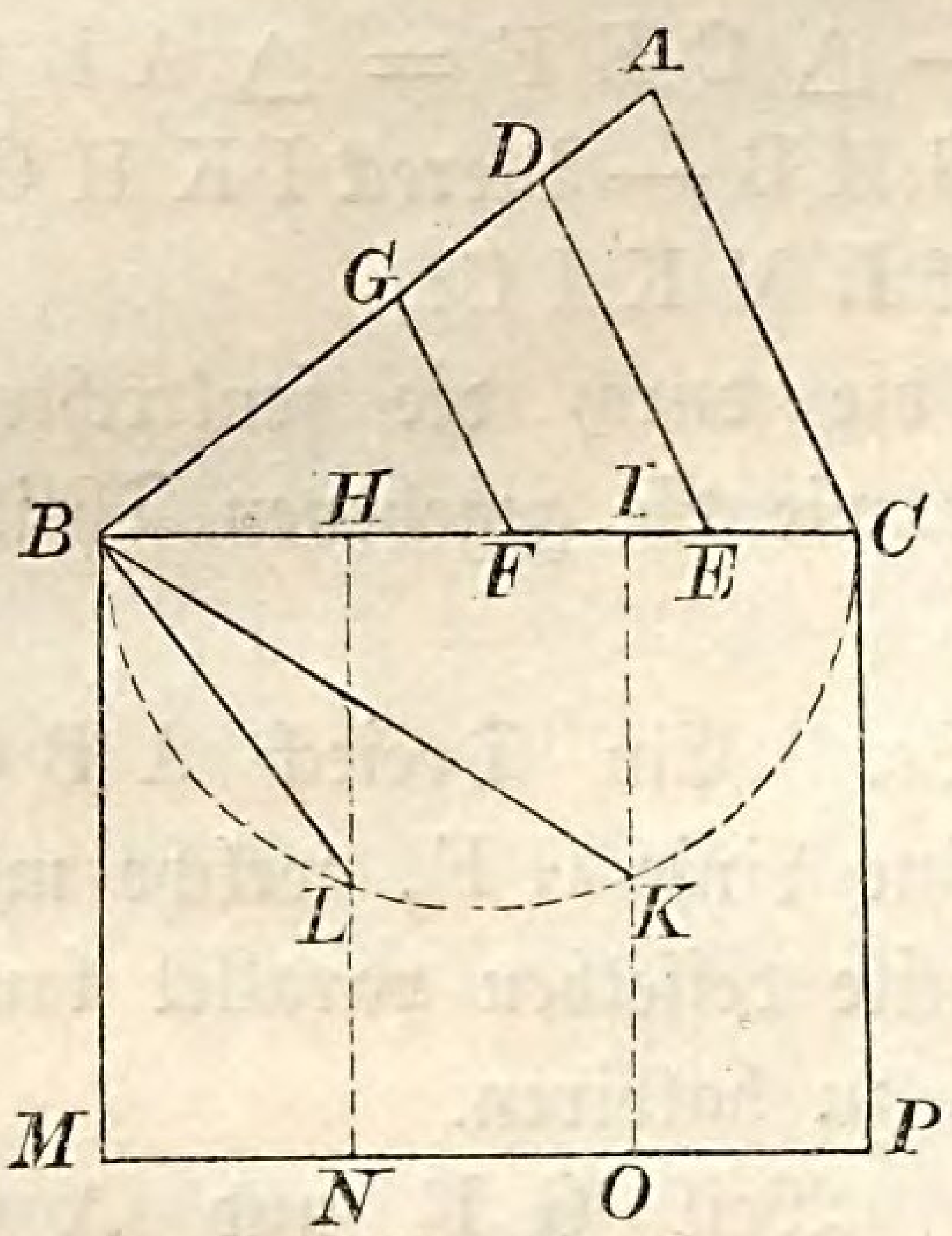


Fig. 56.

89. Aufgabe. Ein Dreieck durch zwei mit einer Seite parallele Linien in drei gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Die durch die zu ziehenden Parallelen entstehenden ähnlichen Dreiecke, also auch die Quadrate ihrer Seiten B F, B E und B C, sollen sich verhalten wie 1 : 2 : 3. Demnach muß $BF = \sqrt{\frac{1}{3} BC^2}$, $BE = \sqrt{\frac{2}{3} BC^2}$ werden.

Construction. Man suche die mittlere Proportionale zu B C und B H (oder $\frac{1}{3}$ B C) und zu B C und B J (oder $\frac{2}{3}$ B C). Die erstere Proportionale ist B L, die letztere B K. Dann mache man B F jener und B E dieser gleich und

ziehe von F und E aus mit A C Parallelen, bis sie auf A B treffen, so ist

$\triangle$ B F G = Trapez F G D E = Trapez D E C A = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ A B C.

Beweis. BH:BL = BL:BC,

$BL^2 = BH \cdot BC$;

also auch $BF^2 = BH \cdot BC$ = Parallelogramm BHNM $= \frac{1}{3}BC^2$.

Ferner BJ : BK = BK : BC,

$BK^2 = BJ \cdot BC$;

folglich auch $BE^2 = BJ \cdot BC$ = Parallelogramm BJOM $= \frac{2}{3}BC^2$.

Da sich verhält

$\triangle BFG : \triangle BAC = BF^2 : BC^2$, so verhalten sie sich auch $= 1 : 3$.

Aus demselben Grunde ist

$\triangle BDC : \triangle BAC = BE^2 : BC^2 = 2 : 3$.

Folglich hat man $\triangle$ B D E — $\triangle$ B G F oder Trapez F G D E $= \frac{1}{3}$ A B C = $\triangle$ B G F, sodaß auch Trapez D E C A $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ A B C sein muß.

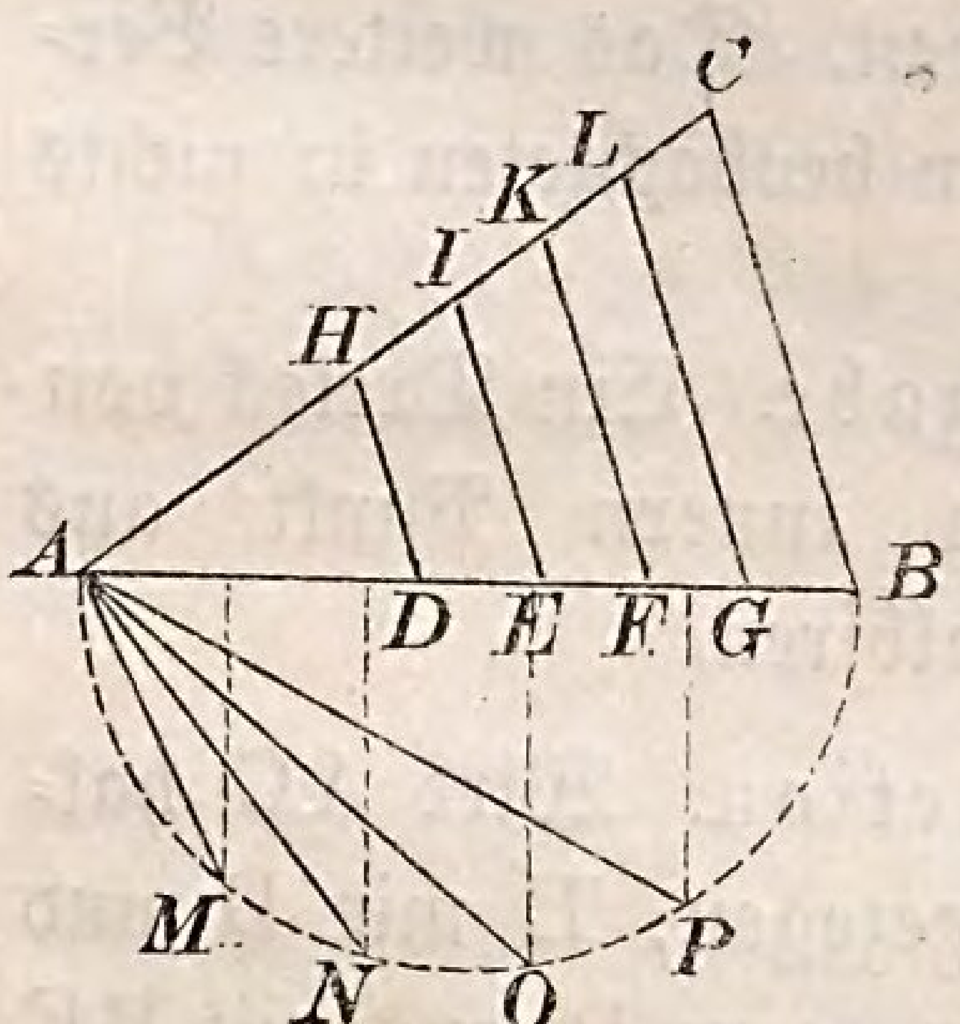


Fig. 57.

90. Aufgabe. Ein Dreieck durch vier mit einer Seite parallele Linien in fünf gleiche Theile zu theilen.

Analysis. Die Quadrate von A D, A E, A F, A G und A B müssen sich wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 verhalten. Demnach ist AB in fünf gleiche Theile zu theilen und die mittlere Proportionale zu suchen zwischen der ganzen A B und bezüglich $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ A B.

Construction. Die vier gefundenen mittlern Proportionallinien trage man von A aus auf die A B und ziehe aus D, E, F und G mit B C Parallelen, bis sie auf die Seite A C treffen, so sind die zwischen diesen Parallelen liegenden Theile des gegebenen Dreiecks A B C einander gleich, und zwar von der Größe des Dreiecks A D H = $\frac{1}{5}$ $\triangle$ A B C.

Der Beweis ist wie in den beiden vorherigen Aufgaben zu führen.

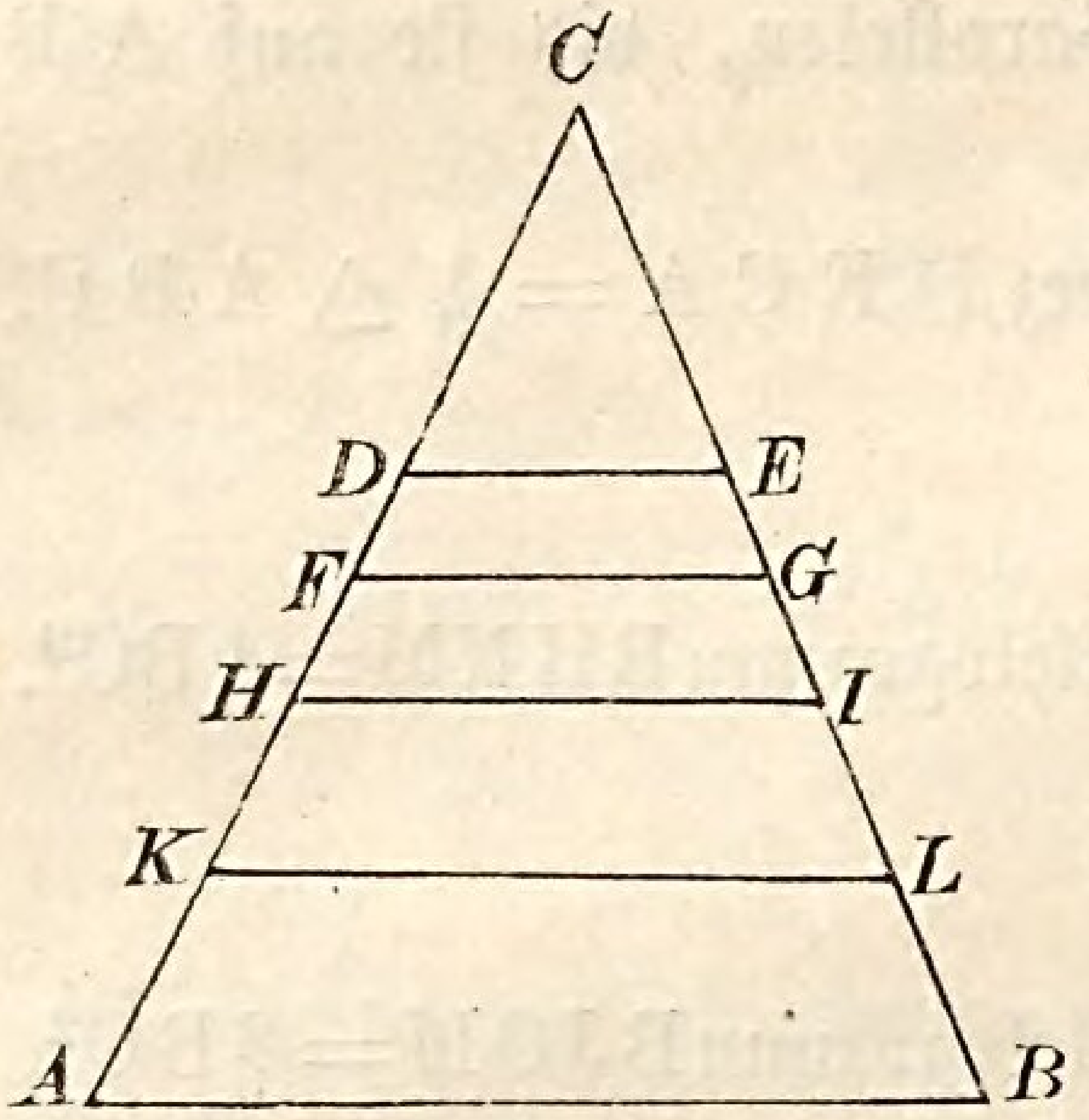


Fig. 58.

91. Aufgabe. Ein Dreieck A B C durch Linien, welche mit A B parallel laufen, in fünf Theile zu theilen, daß sich dieselben zueinander verhalten wie die Zahlen

6 : 4 : 5 : 7 : 9.

Analysis. Die Dreiecke C D E, C F G, C H I, C K L und C A B müssen alle einander ähnlich werden, und sie sollen sich verhalten wie die Zahlen

6 : 6 + 4 : 6 + 4 + 5 : 6 + 4 + 5 + 7 : 6 + 4 + 5 + 7 + 9, d. h. wie
6 : 10 : 15 : 22 : 31.

Daher hat man nur die Seiten C D, C F, C H und C K derjenigen Quadrate zu suchen, welche sich zu CA^2 verhalten wie 6 : 10 : 15 : 22 : 31.

Construction. Man theile die C A nach dem gegebenen Verhältniß und suche die mittlere Proportionale zwischen der ganzen C A und dem bezüglichen Abschnitt derselben. Das weitere Verfahren ist von dem in den vorigen Aufgaben beobachteten in nichts verschieden.

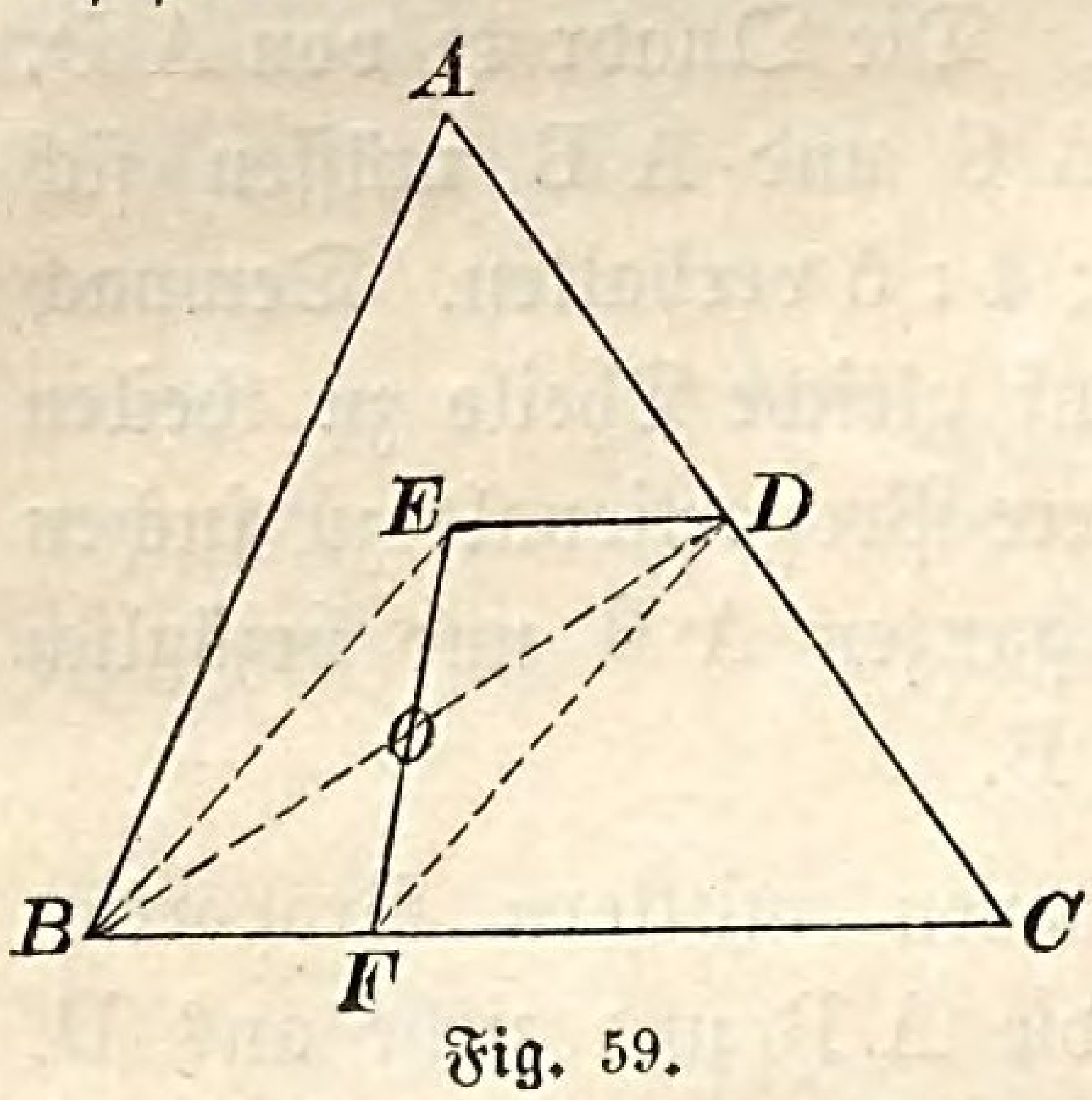


Fig. 59.

92. Aufgabe. Ein Dreieck von einem innern Punkt aus zu halbiren.

Construction. Wird A C halbirt, B D gezogen, E mit D und B verbunden, von D aus mit B E eine Parallele D F gelegt, bis diese in F auf die B C trifft, und verbindet man noch F mit dem gegebenen Punkt E; so sind E D und E F die verlangten Theilungslinien.

Beweis. $\triangle BAD = \triangle BCD = \frac{1}{2} \triangle ABC$,
$\triangle DEO = \triangle BFO$;

also $\triangle BAD - \triangle DEO + \triangle BFO$ oder Fünfeck $ABFED = \frac{1}{2} \triangle ABC$
und $\triangle BCD + \triangle DEO - \triangle BFO$ oder Viereck $CDEF = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

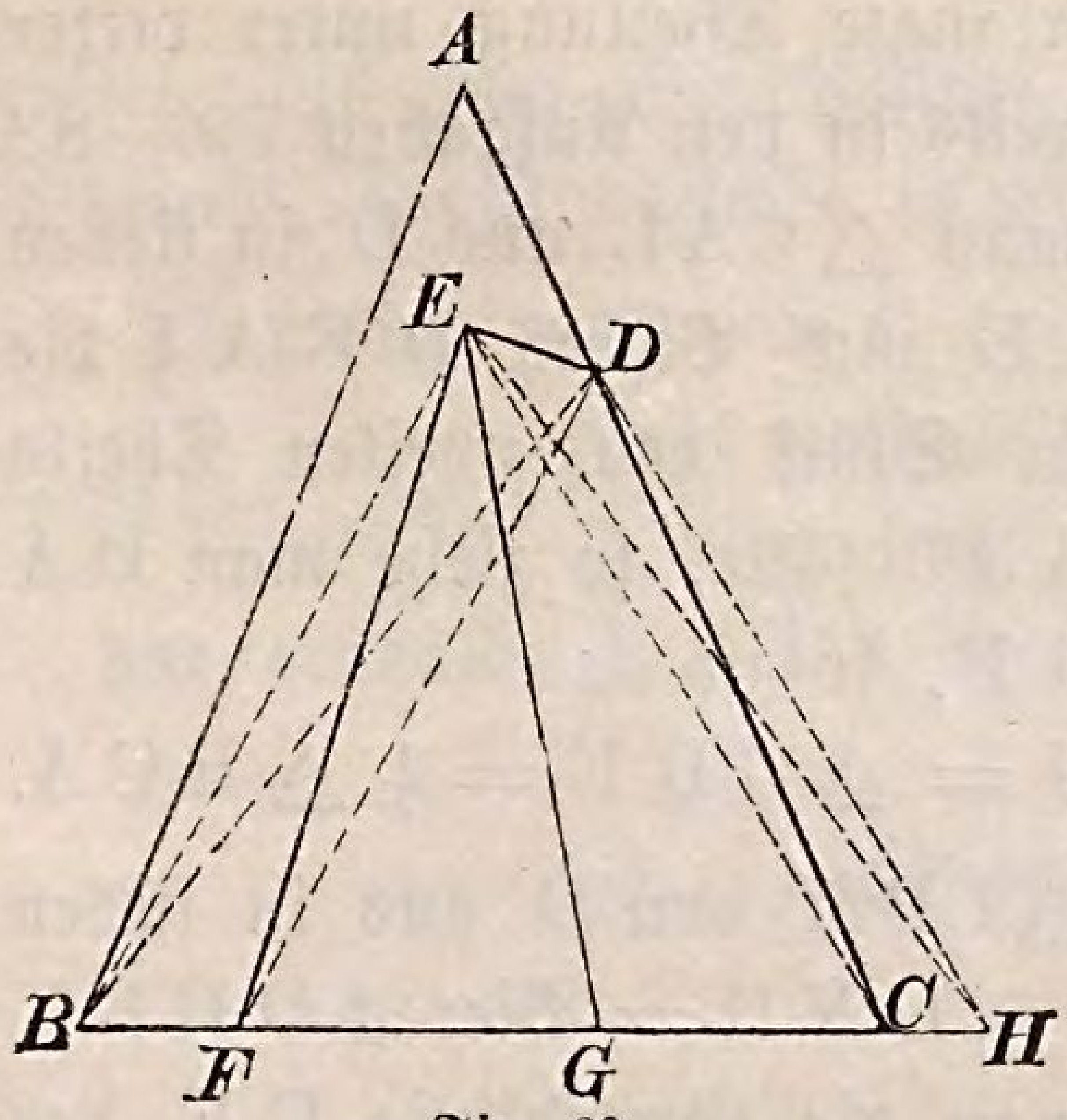


Fig. 60.

93. Aufgabe. Ein Dreieck von einem innern Punkt aus in drei gleiche Theile zu theilen.

Construction. Man mache AD $= \frac{1}{3}$ AC, ziehe BD, EB und ED und von D aus mit BE eine Parallele DF, welche in F auf die BC trifft. Wird nun EF gezogen, so ist

Fünfeck ABFED $= \triangle$ ABD $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC
und Viereck CDEF $= \frac{2}{3} \triangle$ ABC.

Zieht man in diesem Viereck die Diagonale EC und mit ihr parallel, von D aus, DH bis auf die Verlängerung von BC und verbindet man noch E mit H, so ist

Viereck CDEF $= \triangle$ EFH.

Nun halbire man FH und verbinde G mit E, so ist das Viereck selbst halbirt, nämlich

$\triangle$ EFG $= \frac{1}{2} \triangle$ EFH $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC,
folglich auch Viereck CDEG $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC;
demnach Fünfeck ABFED $= \triangle$ EFG $=$ Viereck CDEG $= \frac{1}{3} \triangle$ ABC.

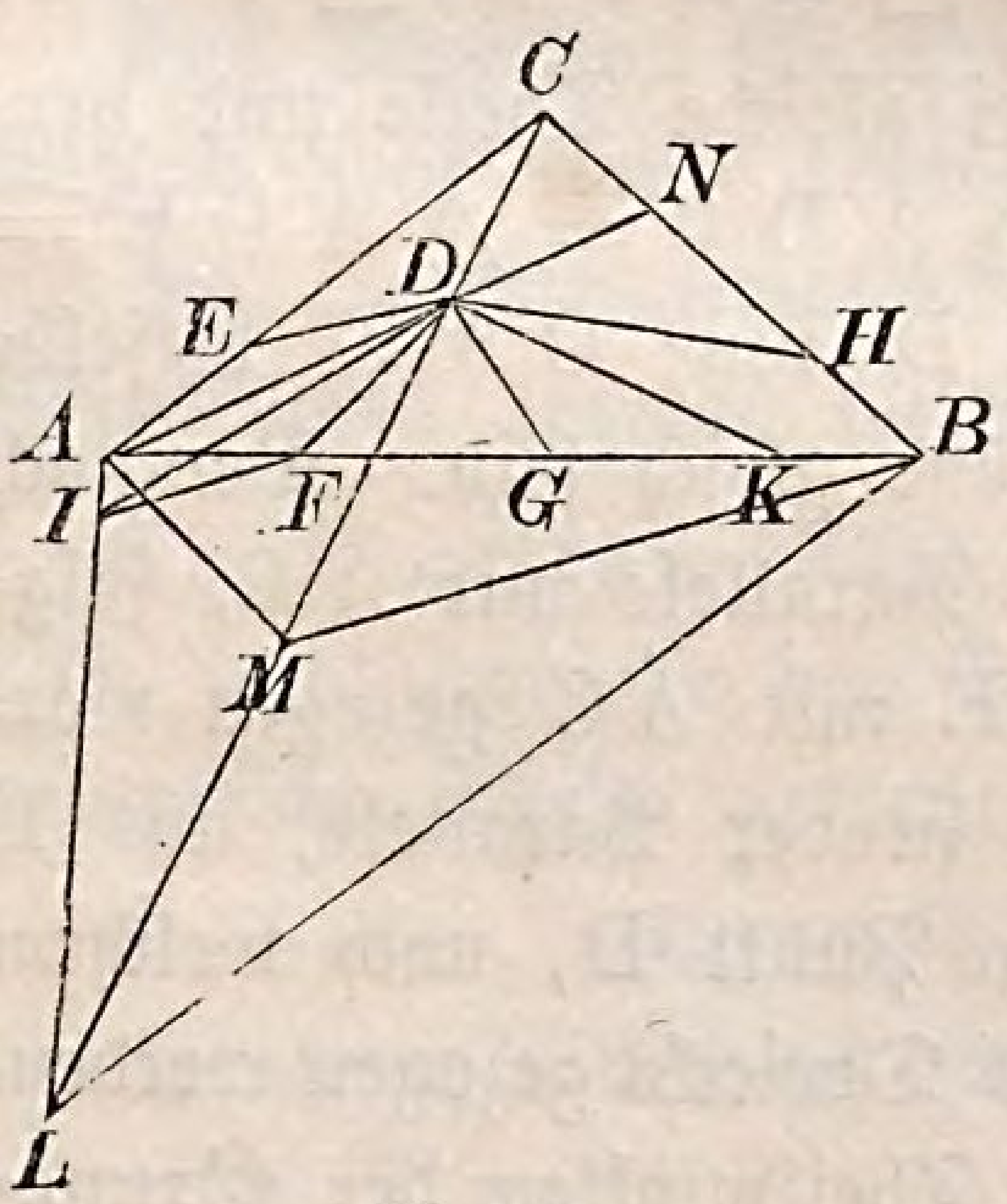


Fig. 61.

94. Aufgabe. Ein Dreieck ABC von einem innern Punkt D aus durch gerade Linien nach den Dreiecksseiten in sieben gleiche Theile zu theilen.

Construction. Man lege durch A mit CB parallel die Linie AM und durch B parallel mit AC die Linie BL, bis sie in M und L auf die verlängerte CD treffen, so erhält man zwei Dreiecke ACL und BCM, von denen jedes dem gegebenen Dreieck ABC gleich ist. Ueberdies ergibt sich nun der Vortheil, daß der gegebene Punkt D nicht mehr innerhalb der Fläche, sondern in einer Seite, CM

oder C L, liegt. Wie aber die verlangte Theilung unter dieser Voraussetzung zu bewirken sei, ist bereits in den Aufgaben 79—83 dargethan worden. Hiernach theile man △ CAL aus D in sieben gleiche Theile, von denen △ C D E und Viereck D E A I die beiden ersten sind. Weil aber ein Stück des zweiten Theils außerhalb des gegebenen Dreiecks ABC fällt, so ziehe man D A und durch I die mit ihr parallele I F, so ist

Viereck D E A F = Viereck D E A I = △ C D E = $\frac{1}{7}$ △ B C A.

Auf dieselbe Weise theile man △ CBM von D aus in sieben gleiche Theile, sodaß △ D C N = △ D N H = Viereck D H B K = $\frac{1}{7}$ △ B C A. Zuletzt halbire man die Grundlinie F K des Dreiecks D F K, dann ist auch △ D F G = △ D G K = $\frac{1}{7}$ △ B C A, also die verlangte Theilung vollendet.

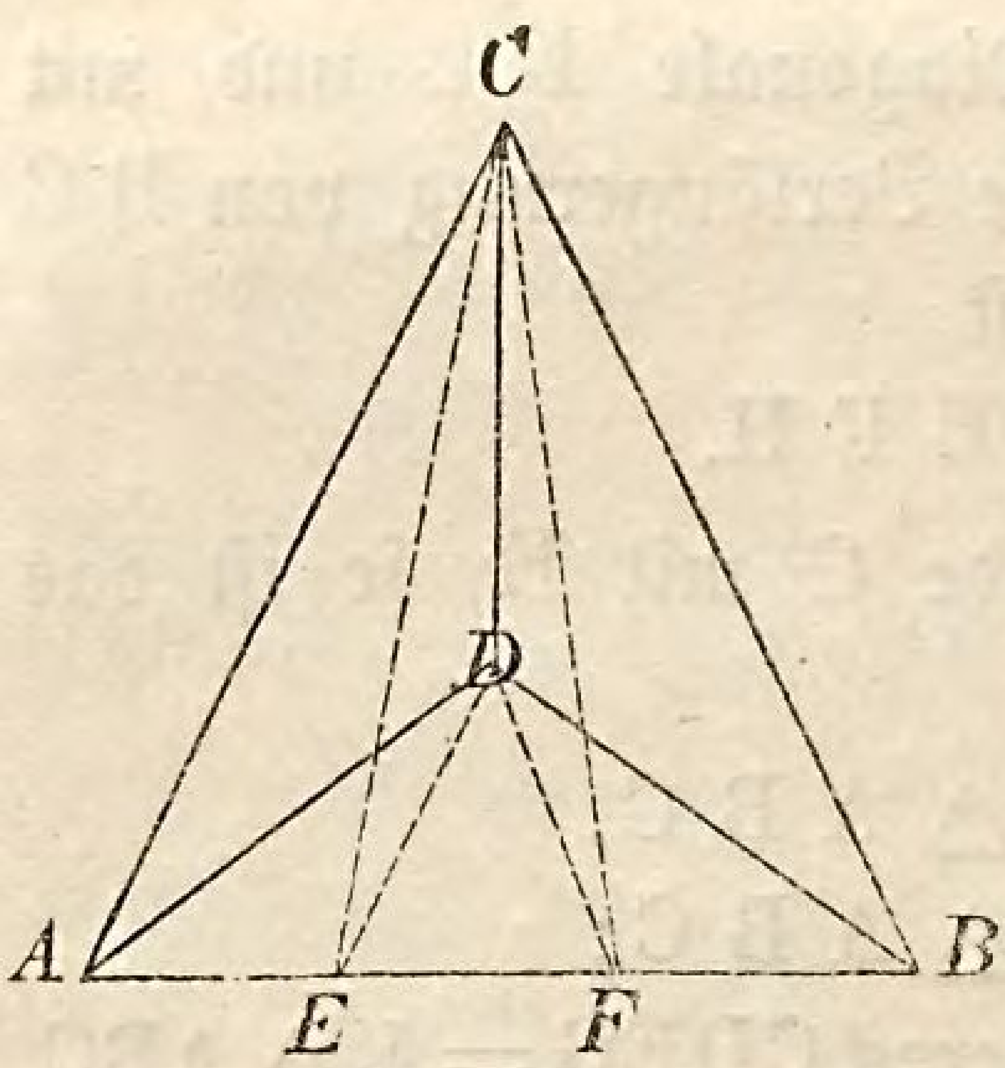


Fig. 62a.

95. Aufgabe. Ein Dreieck ABC durch die drei Linien aus den Spitzen nach einem innerhalb der Fläche gelegenen Punkte, der aber noch unbekannt ist, in drei gleiche Theile zu theilen.

Erste Lösung.

Analysis. Angenommen, es sei △ A D C = △ A B D = △ B C D.

Theilt man die Grundlinie A B in drei gleiche Theile und verbindet die Theilpunkte mit C, so ist △ A D C = △ A C E = $\frac{1}{3}$ △ A B C. Da die Dreiecke C A D und C A E dieselbe Grundlinie haben, so muß auch ihre Höhe gleich sein. Demnach liegen ihre Spitzen D und E in einer Parallele mit A C, folglich liegt D in der Parallele, die aus E mit A C gezogen worden. Aus demselben Grunde muß D in der Parallele, aus F mit B C gezogen, liegen. Folglich liegt Punkt D, nach welchem die Theilungslinien aus den Spitzen des Dreiecks gezogen werden, im Durchschnitt der Parallelen aus den Theilpunkten der Grundlinie mit den andern Seiten des Dreiecks.

Construction. Man theile die Grundlinie AB in drei gleiche Theile, ziehe aus E mit A C, und aus F mit B C eine Pa-

rallele bis zum Durchschnitt, verbinde D mit den Spitzen des Dreiecks, so ist dasselbe in drei gleiche Theile getheilt.

Beweis. $\triangle ADC = \triangle AEC = \frac{1}{3} \triangle ABC$,
$\triangle BDC = \triangle BFC = \frac{1}{3} \triangle ABC$,
also auch $\triangle ABD = \frac{1}{3} \triangle ABC$
und deshalb $\triangle ADC = \triangle BDC = \triangle ABD$.

Zweite Lösung.

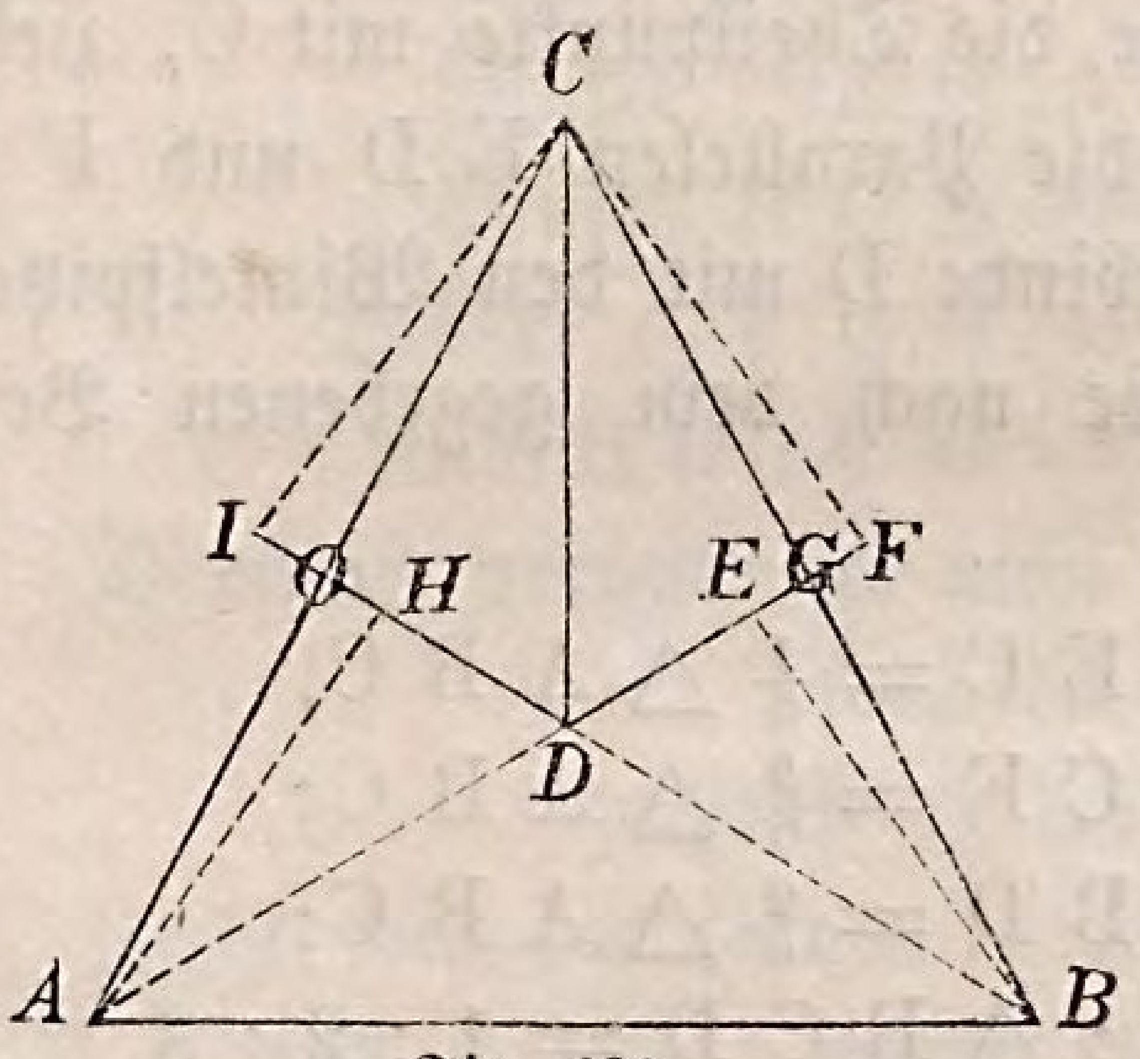


Fig. 62 b.

Analysis. Angenommen, es sei $\triangle ADC = \triangle BDC = \triangle ABD$. — $\triangle ADC$ und $\triangle ABD$ haben gleiche Grundlinien AD, folglich auch gleiche Höhen, also
$CE = BF$,
Winkel CEG = Winkel GFB (als R.)
Winkel CGE = Winkel BGF (als Scheitelwinkel)
und deshalb $\triangle CEG \cong \triangle BFG$,
woraus sich ergibt $CG = BG$;
d. h. BC ist halbirt worden.

Aus demselben Grunde ist $AO = CO$, also auch AC halbirt. Folglich liegt Punkt D im Durchschnitt derjenigen Linien, welche aus den Halbirungspunkten der Seiten nach den entgegengesetzten Winkelspitzen gezogen werden.

Construction. Man halbire AC und BC, ziehe BO und AG, und verbinde den Durchschnitt mit C, so ist $\triangle ABC$ in drei gleiche Theile getheilt.

Beweis. Weil $BG = CG$ und Winkel CGB = Winkel CGE, so wie Winkel BFG = Winkel CEG, so ist:
$\triangle BCG \cong \triangle CEG$,
und $BF = CE$;
also $\triangle ADC = \triangle ADB$
und aus demselben Grunde auch $\triangle ABD = \triangle BCD$,
folglich $\triangle ADC = \triangle ABD = \triangle BCD$.

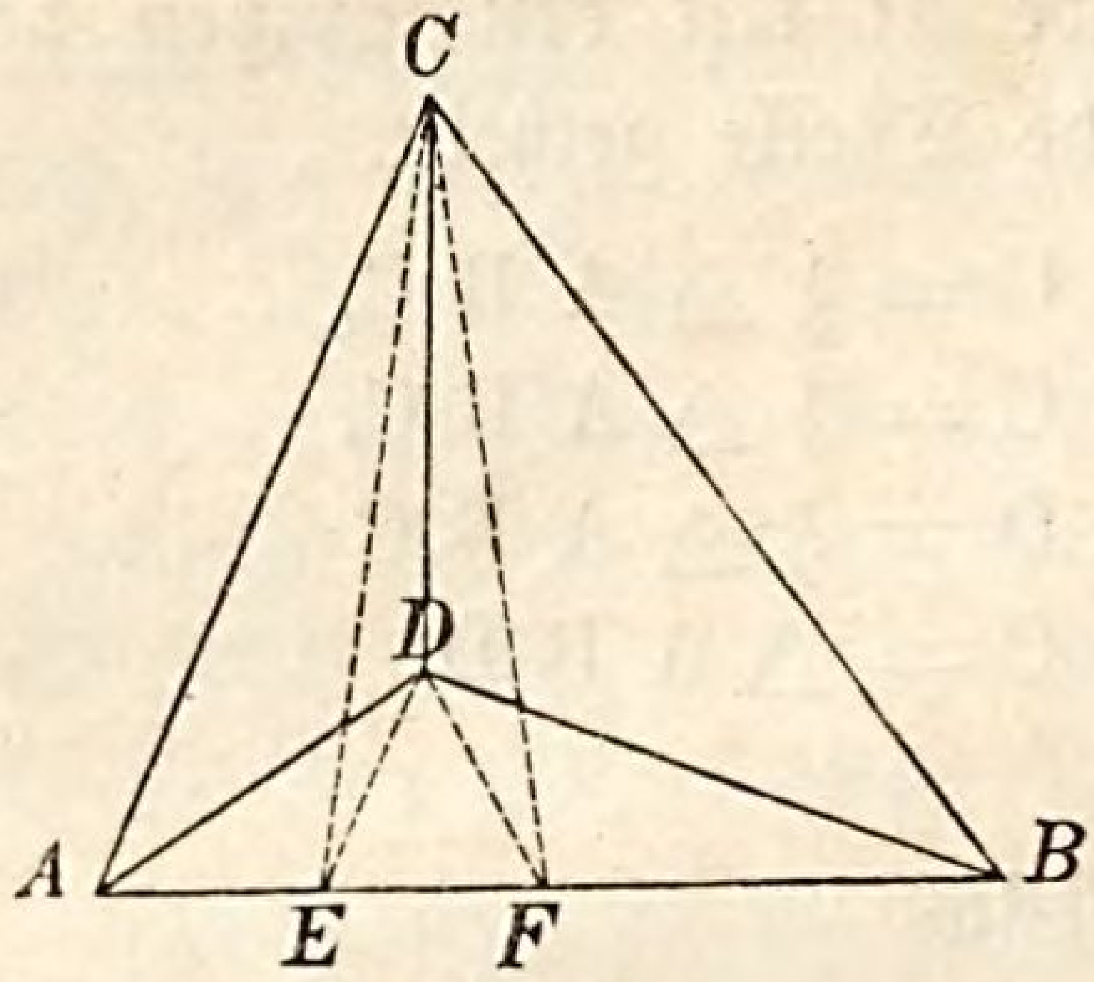


Fig. 63.

96. Aufgabe. Einen Punkt D in dem gegebenen Dreieck A B C so zu finden, daß sich die Dreiecke A D C, A B D und BCD verhalten wie die Zahlen 1 : 2 : 3.

Construction. Man theile die Grundlinie nach dem Verhältniß 1:2:3, verbinde die Theilpunkte mit C, ziehe aus E und F mit A C und B C die Parallelen E D und F D bis zum Durchschnitt in D und verbinde D mit den Winkelspitzen des Dreiecks A B C, so ist dasselbe nach dem gegebenen Verhältniß getheilt.

Beweis. $\triangle ADC = \triangle AEC = \frac{1}{6} \triangle ABC$,
$\triangle BDA = \triangle BCF = \frac{3}{6} \triangle ABC$;
also $\triangle ABD = \frac{2}{6} \triangle ABC$;
folglich $\triangle ACD : \triangle ABD : \triangle BCD = 1 : 2 : 3$.

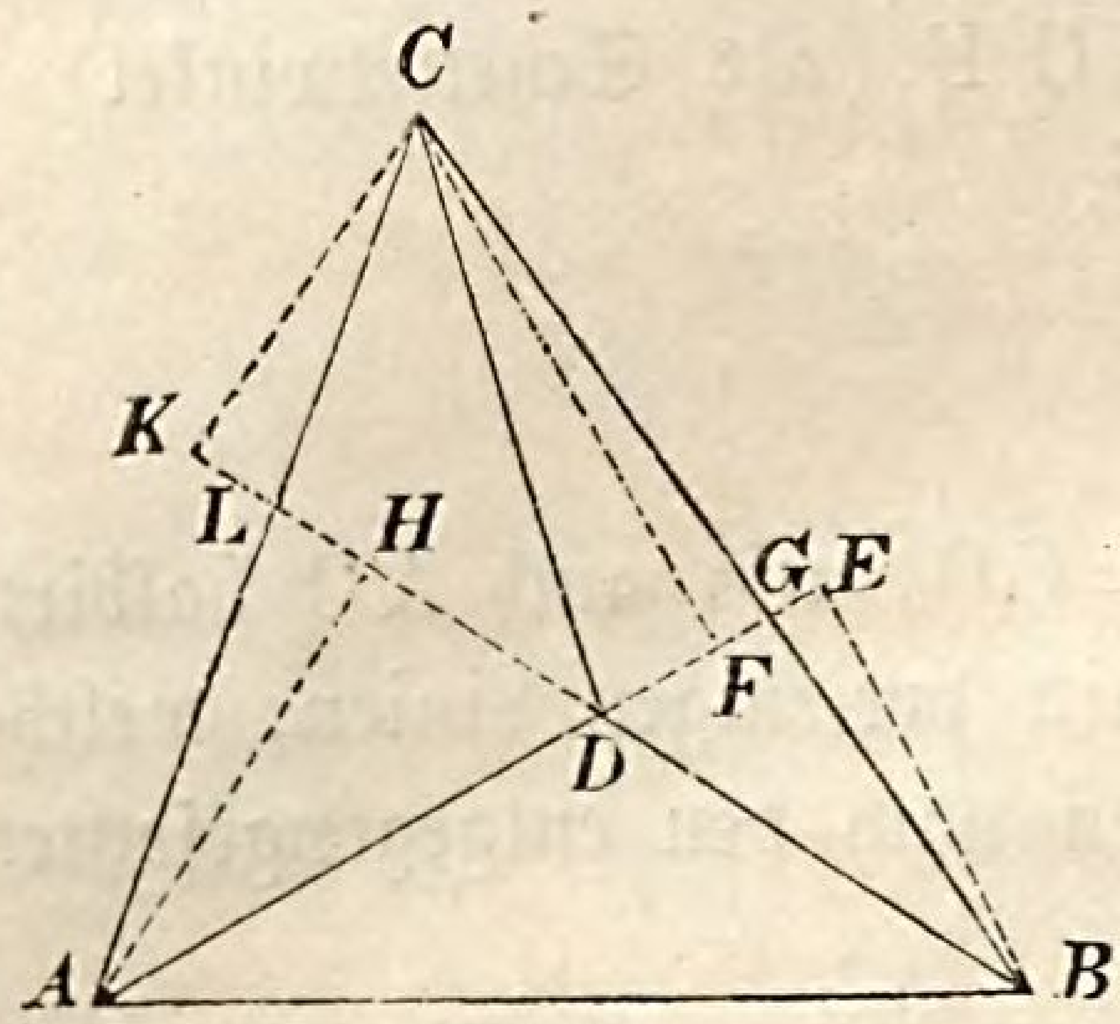


Fig. 64.

97. Aufgabe. Man soll innerhalb des Dreiecks ABC einen Punkt D finden, daß sich die drei Dreiecke, welche entstehen, wenn man von D aus nach den Ecken gerade Linien zieht, wie m : n : p verhalten.

Analysis. Punkt D sei der gesuchte, und $\triangle ABD : \triangle ACD : \triangle BCD = m : n : p$. — Da die beiden Dreiecke A B D und ACD, die sich wie m : n verhalten, gemeinschaftliche Grundlinie A D haben, so verhalten sich ihre Höhen B F und E C wie n : m, und weil $\triangle BFG \sim \triangle CEG$, auch $BG : CG = n : m$. — Weil ferner $\triangle ABD : \triangle BCD = n : p$ und beide Dreiecke gemeinschaftliche Grundlinie BD haben, so ist $AH : CK = n : p$; und weil $\triangle ALH \sim \triangle CLK$, verhält sich auch $AL : CL = n : p$. Demgemäß theile man BC so, daß $BG : CG = n : m$ und AC so, daß $AL : CL = n : p$,

ziehe A G und B L, so ist deren Durchschnitt D der Punkt, nach welchem die Theilungslinien zu ziehen sind.

Construction. Man theile BC so, daß BG : CG = n : m, und A C so, daß A L : C L = n : p; ziehe A G und B L, deren Durchschnitt D der verlangte Punkt ist, alsdann noch CD, so ist

$$\triangle ABD : \triangle ACD : \triangle BCD = n : m : p.$$

Beweis. Zieht man die Höhen B F und C E der beiden Dreiecke A B D und A C D, welche die gemeinschaftliche Grundlinie A D haben, so ist

Winkel C E G = Winkel B F G = 1 Radius,
Winkel B G E = Winkel C G F;
daher $\triangle FGB \sim \triangle CEG$
und B G : C G = B F : C E.

Demnach verhält sich nicht blos BG : CG = n : m,
sondern auch BF : CE = n : m;
folglich $\triangle ABD : \triangle ACD = n : m$.

Zieht man die Höhen A H und C K in den beiden Dreiecken A B D und A C D, welche die gemeinschaftliche Grundlinie B D haben, so ist

Winkel A L H = Winkel C L K,
Winkel A H L = Winkel C K L = 1 Radius,
deshalb $\triangle AHL \sim \triangle CKL$
und A H : C K = A L : L C.

Weil aber A L : L C = n : p sich verhält, so auch
A H : C K = n : p;
folglich $\triangle ABD : \triangle BCD = n : p$
und daher zuletzt $\triangle ABD : \triangle ACD : \triangle BCD = n : m : p$.

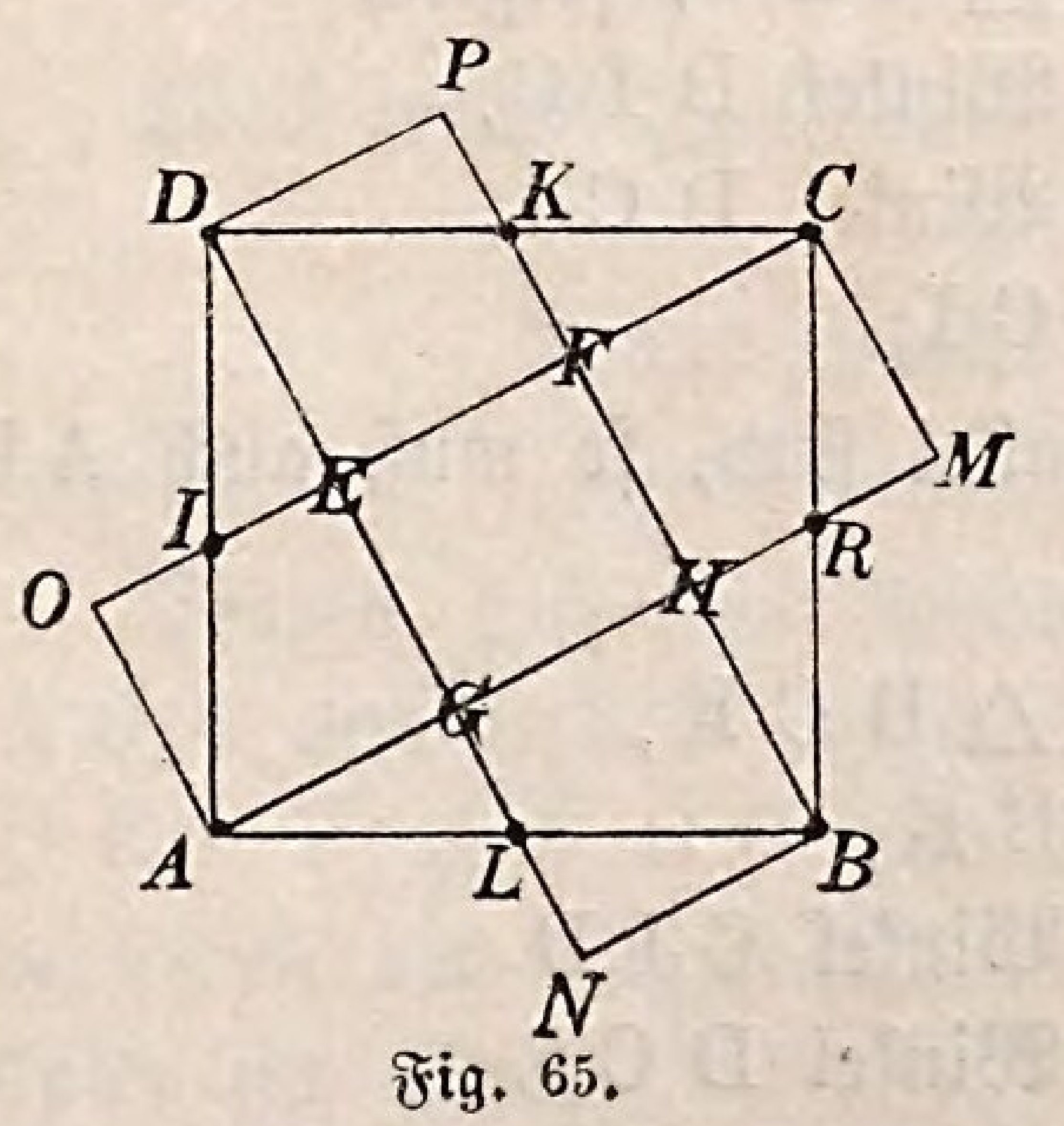


Fig. 65.

98. Aufgabe. Ein Quadrat durch vier gerade Linien so zu theilen, daß die Theile gehörig zusammengesetzt fünf gleiche Quadrate bilden.

Analysis. Angenommen, im Quadrat A B C D sei die verlangte Theilung geschehen, sodaß EFHG ein Quadrat ist und die andern Theile, gehörig zusammengesetzt, vier

Quadrate bilden, von denen jedes dem Quadrat E F H G gleich ist. Dann müßten

a) die im Quadrat A B C D entstandenen Dreiecke Ergänzungen der Trapeze zu Quadraten sein,

b) im △ B H R Seite B R = C R,
im △ C F K Seite C K = D K,
im △ D E I Seite D I = A I,
im △ A G L Seite A L = L B sein.

c) Die Seiten des Quadrats wären also halbirt.

d) Hieraus ergibt sich die Richtung der Theilungslinien, sodaß nun die Theilung ausgeführt werden kann.

Construction. Man halbire die Seiten des gegebenen Quadrats A B C D, verbinde A mit R, B mit K, C mit I, D mit L, so ist die verlangte Theilung geschehen.

Beweis. Verlängert man jede der Linien H R, G L, I E und F K um sich selbst, und zieht man C M, B N, A O und D P,

so ist A D = B C,
A L = C K,
Winkel L A D = Winkel B C K;
folglich △ A D L ≅ △ C B K
und Winkel A D C = Winkel C B K,
sowie Winkel A L D = Winkel B K C,
auch D L = B K,

und da D K und B L gleich und parallel sind, so ist auch D L || B K.

Ebenso hat man △ A B R ≅ △ C D I, folglich
Winkel A R B = Winkel D I C,
Winkel B A R = Winkel D C I,
A R = C I;

und da CR und AI gleich und parallel sind, so muß auch AR mit C I parallel laufen.

Ferner erweist sich △ C D I ≅ △ B C K,
folglich C I = B K,
Winkel B K C = Winkel C I D
und Winkel C B K = Winkel D C I.

Ebenso ist $\triangle ABR \cong \triangle ADL$;
folglich $AR = DL$,
Winkel ALD = Winkel ARB
und Winkel ADL = Winkel BAR.

Es ist nun $BR = AL$, Winkel HRB = Winkel ALG, und Winkel HBR = Winkel LAG, demnach

$\triangle BHR \cong \triangle AGL$,
folglich $BH = AG$
und Winkel BHR = Winkel AGL.

Da nun BK und DL gleich und parallel sind, so ist auch
Winkel BHR = Winkel LGA
und Winkel LGH = Winkel LGA,
folglich Winkel $LGA = 1R$.

Weil $AR \parallel CI$ ist, so sind auch die Winkel um G, H, E und F Rechte.

Es ist ferner $\triangle BHR \cong \triangle CKF$, folglich
$BH = CF$,
$HR = FK$.

Endlich ist $\triangle BRH \cong \triangle DEI \cong \triangle ALG \cong \triangle FCK$, folglich

$BH = DE = AG = CF$
und $HR = IE = LG = FK$.

Demnach ist $AR - AG - HR = CI - CF - IE =$
$BK - BH - FK = DL - DE - GL$,
oder $GH = EF = FH = EG$,
also $EFHG$ ein Quadrat.

Weil ferner $\triangle BRH \cong \triangle CRM$ ist, so ergibt sich
$BH = CM = FH$
und Winkel RHB = Winkel CMR = einem R,
folglich $CFHM$ ein Quadrat und gleich dem Quadrat $EFHG$.

Ebenso sind die Dreiecke CFK, DPK, IED, AIO, AGL und BLN congruent, folglich sind die Parallelogramme $DEFP$, $AGEO$ und $BHGN$ Quadrate und, weil jedes derselben den Flächeninhalt des Quadrats $EFHG$ hat, auch unter sich gleich.

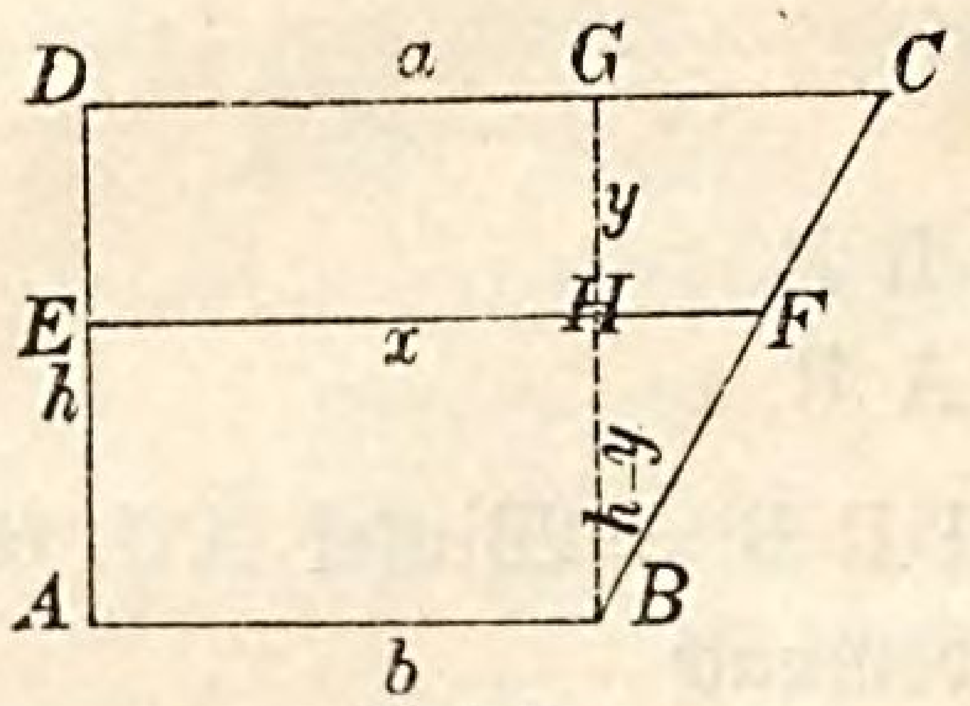


Fig. 66.

99. Aufgabe. Ein Trapez durch eine gerade Linie zu halbiren, die mit den parallelen Seiten parallel läuft.

Algebraische Lösung. Es sei gegeben die größere Parallele = a, die kleinere = b und ihr senkrechter Abstand = h. Die gesuchte Theilungslinie sei = x, und der senkrechte Abstand derselben von der Parallele a sei = y.

Angenommen die Linie E F wäre die gesuchte Theilungslinie x, so würde der Flächeninhalt des Trapezes D C F E von der Höhe y = $\left(\frac{a + x}{2}\right)$ y sein, oder die Hälfte von dem gegebenen Trapezium A B C D, d. i. $\left(\frac{a + b}{4}\right)$ h. Da zwei unbekannte Größen, nämlich x und y, zu finden sind, so bedarf es noch einer andern Gleichung. Um diese zu erlangen, ziehe man B G || A D; dann verhält sich im Dreieck B C G:

$$C G : F H = B G : B H,$$

$$\text{d. h. } a - b : x - b = h : h y$$

$$\text{oder } a - b : a - x = h : y,$$

woraus gefunden wird $y = \left(\frac{a - x}{a - b}\right) h$; und $x = \frac{a h - a y + b y}{h}$.

Weil aber der Flächeninhalt des Trapezium C D E F oben zweimal ausgedrückt worden ist, so entsteht dadurch folgende Gleichung:

$$\left(\frac{a + x}{2}\right) y = \left(\frac{a + b}{4}\right) h$$

$$\text{oder } (a + x)\, 2\, y = (a + b)\, h,$$

$$\text{woraus sich ergibt: } y = \frac{(a + b)\, h}{(a + x)\, 2}.$$

Hiermit bildet der vorhin gefundene Werth von y eine neue Gleichung, nämlich

$$\frac{a + b}{a + x} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a - x}{a - b} \cdot h$$

$$\text{oder } \frac{a + b}{a + x} = \frac{2\,(a - x)}{a - b},$$

woraus sich ergibt $a^2 - b^2 = 2(a^2 - x^2)$,

$$\text{ferner } x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}};$$

und da $y = \frac{a - x}{a - b} \cdot h$ sein soll, so ist $y = \left(\frac{a - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}{a - b}\right) \cdot h.$

Zusatz. In derselben Weise ist zu verfahren, wenn das Trapez durch Linien, die mit den parallelen Seiten parallel laufen, in mehr als zwei gleiche Theile zerlegt werden soll. Wenn nämlich die Zahl der Theile $= m$ ist, und die Theilungslinien von a aus x^{I}, x^{II}, x^{III}, ... x^{n}, die zugehörigen Abstände von a der Reihe nach y^{I}, y^{II}, y^{III}, ... y^{n} heißen, so hat man die Gleichungen:

$$\text{I.)}\quad \frac{n}{m}\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot h = \frac{x^n + a}{2} \cdot y^n$$

$$\text{II.)}\quad a - b : x^n - b = h : h - y^n.$$

Hieraus wird gefunden:

$$y^n = \frac{h}{a - b} \cdot \left\{a - \sqrt{a^2 - \frac{n}{m}(a^2 - b^2)}\right\}$$

$$y^{I} = \frac{h}{a - b} \cdot \left\{a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{m}(a^2 - b^2)}\right\}$$

$$y^{II} = \frac{h}{a - b} \cdot \left\{a - \sqrt{a^2 - \frac{2}{m}(a^2 - b^2)}\right\} \text{ u. s. w.}$$

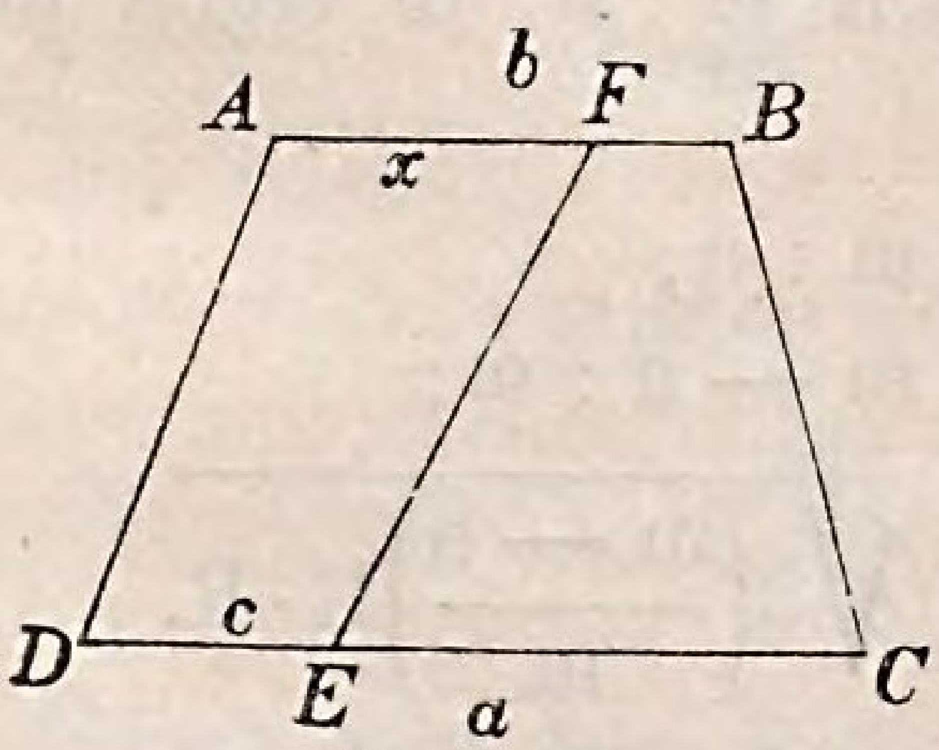


Fig. 67.

100. Aufgabe. Ein Trapez A B C D aus einem bestimmten Punkt E einer seiner Parallelen C D nach einem gegebenen Verhältniß in zwei Theile zu theilen.

Lösung. Das abgeschnittene Trapez A D E F verhalte sich zu A B C D wie n : m; A B sei $= b$, C D $= a$, D E $= c$ gegeben. Dann ist A F $= x$ zu finden.

Der Flächeninhalt von A D E F ist $= \frac{c + x}{2} \cdot h$, und der von A B C D $= \frac{a + b}{2} \cdot h$. Da das gegebene Verhältniß $= n : m$ ist, so hat man die Proportion:

$$\frac{c + x}{2} \cdot h : \frac{a + b}{2} \cdot h = n : m$$

oder $c + x : a + b = n : m$,

woraus sich ergibt $x = \frac{n}{m}(a + b) - c$.

101. Aufgabe. Die Fläche eines Kreises durch einen concentrischen Kreis zu halbiren.

Auflösung. Ist der Radius des gegebenen Kreises $= R$, der des gesuchten $= r$, so ist der Flächeninhalt des entstehenden Kreisringes $= R^2 \pi - r^2 \pi$, und, da er der Aufgabe gemäß die Hälfte des gegebenen Kreises betragen soll, auch $= \frac{1}{2} R^2 \pi$. Dadurch entsteht folgende Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} R^2 \pi = R^2 \pi - r^2 \pi,$$

oder $r^2 \pi = \frac{1}{2} R^2 \pi$;

folglich $r = \sqrt{\frac{1}{2} R^2} = \sqrt{R \cdot \frac{1}{2} R}$.

102. Aufgabe. Die Fläche eines Kreises durch einen concentrischen Kreis nach einem vorgeschriebenen Verhältniß zu theilen.

Auflösung. Die Radien der beiden concentrischen Kreise seien bezüglich R und r, und der gegebene Kreis verhalte sich zum Kreisringe dem Flächeninhalt nach wie $m : n$, so ergibt sich folgende Proportion:

$$R^2 \pi : R^2 \pi - r^2 \pi = m : n,$$

oder $r^2 : R^2 = m - n : m$;

folglich $r = \sqrt{\left(\frac{m - n}{m}\right) R \cdot R}$.

Zusatz. Sollte sich dem Flächeninhalt nach der kleinere Kreis zum Kreisringe verhalten wie $m : n$, so würde folgende Gleichung zu lösen sein:

$$r^2 \pi : R^2 \pi - r^2 \pi = m : n$$

$$\text{oder } r^2 : R^2 = m : m + n$$

$$\text{folglich } r = \sqrt{\left(\frac{m}{m+n}\right) R \cdot R.}$$

103. Aufgabe. Ein kreisförmiges Stück Land vom Halbmesser R soll unter vier Personen getheilt werden. Von

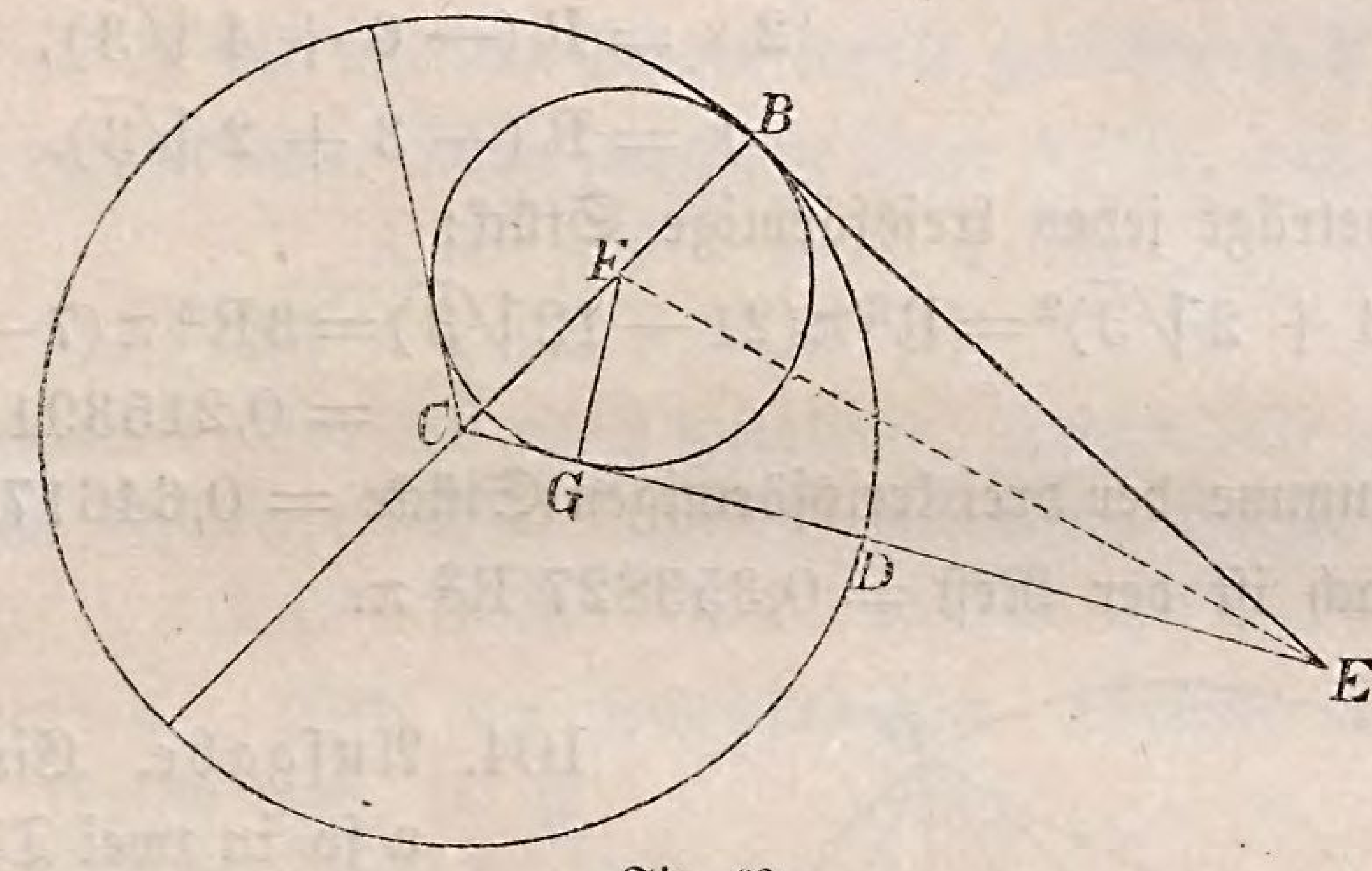


Fig. 68.

drei Personen soll jede eins der kreisförmigen Stücke erhalten, welche als die größten im Kreise beschrieben werden können. Der Rest ist der Antheil des Vierten. Wie viel erhält jeder?

Lösung. Sind die Winkel um C jeder $= 120°$, so sind die größten Kreise in den entstandenen Ausschnitten die Antheile dreier Personen.

Macht man $DE = CD$ und zieht BE, so ist Winkel $CBE = 90°$ und

$$\triangle EFG \cong \triangle BEF,$$

$$\text{Winkel } GEF = \text{Winkel } BEF,$$

$$EG = BE;$$

$$\text{mithin } (EG)^2 = (BE)^2 = (2R)^2 - R^2,$$

$$\text{also } EG = R\sqrt{3}$$

$$\text{und } CG = 2R - R\sqrt{3} = R(2 - \sqrt{3}.$$

Setzen wir nun FG, den Radius des eingeschriebenen Kreises, $= x$, so ist $CF = R - FB = R - x$; und nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich

$$(C\,G)^2 + x^2 = (R - x)^2 = R^2 - 2\,R\,x + x^2$$

oder $(C\,G)^2 = R^2 - 2\,R\,x$,

d. i. $R^2 (2 - \sqrt{3})^2 = R^2 - 2\,R\,x$.

Wird diese Gleichung durch R dividirt, und $2 - \sqrt{3}$ ins Quadrat erhoben, so findet man

$$R\,(7 - 4\sqrt{3}) = R - 2\,x$$

$$2\,x = R\,(-6 + 4\sqrt{3}),$$

$$x = R\,(-3 + 2\sqrt{3}).$$

Also beträgt jedes kreisförmige Stück:

$$R^2 \pi\,(-3 + 2\sqrt{3})^2 = R^2 \pi (21 - 12\sqrt{3}) = 3R^2 \pi\,(7 - 4\sqrt{3})$$

$$= 0{,}215391\ R^2 \pi$$

und die Summe der drei kreisförmigen Stücke $= 0{,}646173\ R^2 \pi$.

Demnach ist der Rest $= 0{,}353827\ R^2\ \pi$.

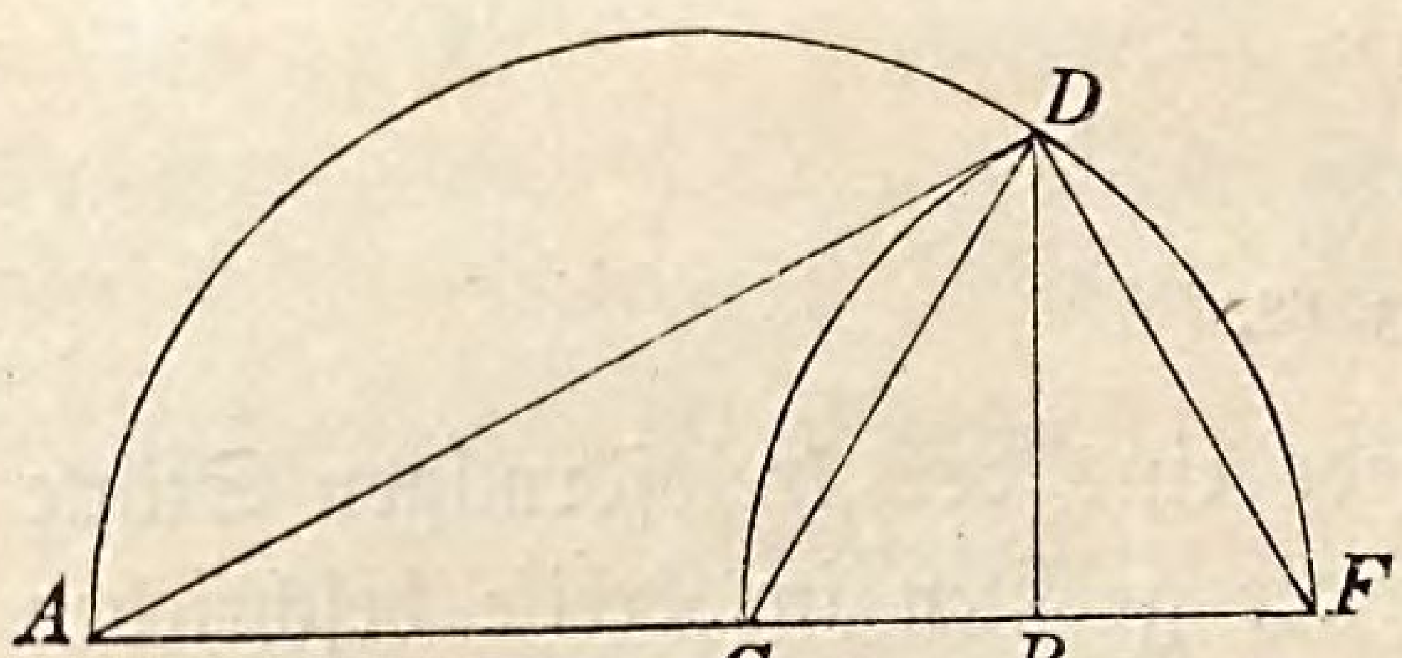


Fig. 69.

104. Aufgabe. Eine Linie a so in zwei Theile zu theilen, daß sich die Quadrate derselben wie zwei Zahlen m : n verhalten.

Geometrische Lösung.

Analysis. A B sei die zu theilende Linie, und es verhalte sich $A\,C^2 : B\,C^2 = m : n$. Wird A B um ein Stück B F so verlängert, daß sich verhält $A\,F : B\,F = m : n$, so erhält man

$$A\,C^2 : B\,C^2 = A\,F : B\,F,$$

oder, wenn man die beiden letzten Glieder mit A F multiplicirt,

$$A\,C^2 : B\,C^2 = A\,F^2 : A\,F \cdot B\,F.$$

Um auch $A\,F \cdot B\,F$ in ein Quadrat zu verwandeln, braucht zu diesen beiden Linien nur die mittlere Proportionale gesucht zu werden. Zu diesem Zweck ist über A F ein Halbkreis zu beschreiben und in B ein Loth B D bis zur Peripherie zu errichten. Wird dann D mit F verbunden, so ist $AF \cdot B\,F = D\,F^2$, und daher

$$A\,C^2 : B\,C^2 = A\,F^2 : D\,F^2 = m : n$$

oder $A\,C : B\,C = A\,F : D\,F$.

Beschreibt man nun aus F mit D F einen Bogen C D, so ist C F = D F, und demnach der Theilpunkt C gefunden, sodaß sich jetzt verhält:

$$AC : BC = AF : CF$$

oder $AC^2 : BC^2 = AF^2 : CF^2 = AF : BF$,

woraus zugleich folgt:

$$AF : CF = CF : BF,$$

d. h. C F ist die mittlere Proportionale zwischen A F und B F.

Construction. Man suche eine Linie AF so, daß sich verhält

$$AB : AF = m - n : m,$$

also auch $AF : BF = m : n$,

und construire über AF einen Halbkreis, errichte BD senkrecht auf A F und beschreibe mit D F von F aus einen Bogen C D, so ist

$$AC^2 : BC^2 = AF : BF = m : n.$$

Beweis. Weil die rechtwinkeligen Dreiecke A D F und B D F ähnlich sind, so ist

$$AF : DF = DF : BF,$$

auch $AF - DF : DF - BF = AF : DF$,

d. h. $AC : BC = AF : DF$ (weil $DF = CF$ gemacht worden),

daher $AC^2 : BC^2 = AF^2 : DF^2$.

Weil aber $DF^2 = AF \cdot BF$ ist, so verhält sich

$$AC^2 : BC^2 = AF^2 : AF \cdot BF,$$

oder, wenn mit A F dividirt wird, $AC^2 : BC^2 = AF : BF = m : n$.

Algebraische Lösung.

Die beiden Theile der Linie a seien x und a — x, so ergibt sich die Proportion:

$$x^2 : (a - x)^2 = m : n,$$

woraus folgt: $(m - n)\, x^2 - 2\, a\, m\, x = - a^2\, m$,

$$\text{also } x^2 - \frac{2\,a\,m}{m-n}\,x = - \frac{a^2\,m}{m-n},$$

$$\text{daher } x = a\left(\frac{m \pm \sqrt{m\,n}}{m - n}\right), \text{ und}$$

$$a - x = a\left(\frac{-n \mp \sqrt{m\,n}}{m - n}\right).$$

Von den ($\pm$) Zeichen darf man hier nur das untere nehmen, weil x als Theil von a kleiner als a, und a — x als Linie positiv sein muß. Werden in diese Formeln die obengefundenen Linien $AF = m$; $BF = n$ und $AB = a = m - n$ gesetzt, so findet sich $AC = AF - \sqrt{AF \cdot BF}$ und $BC = - BF + \sqrt{AF \cdot BF}$.

Vierter Abschnitt.

Bestimmung der Lage von Punkten und Linien in Beziehung aufeinander oder in Winkelflächen.

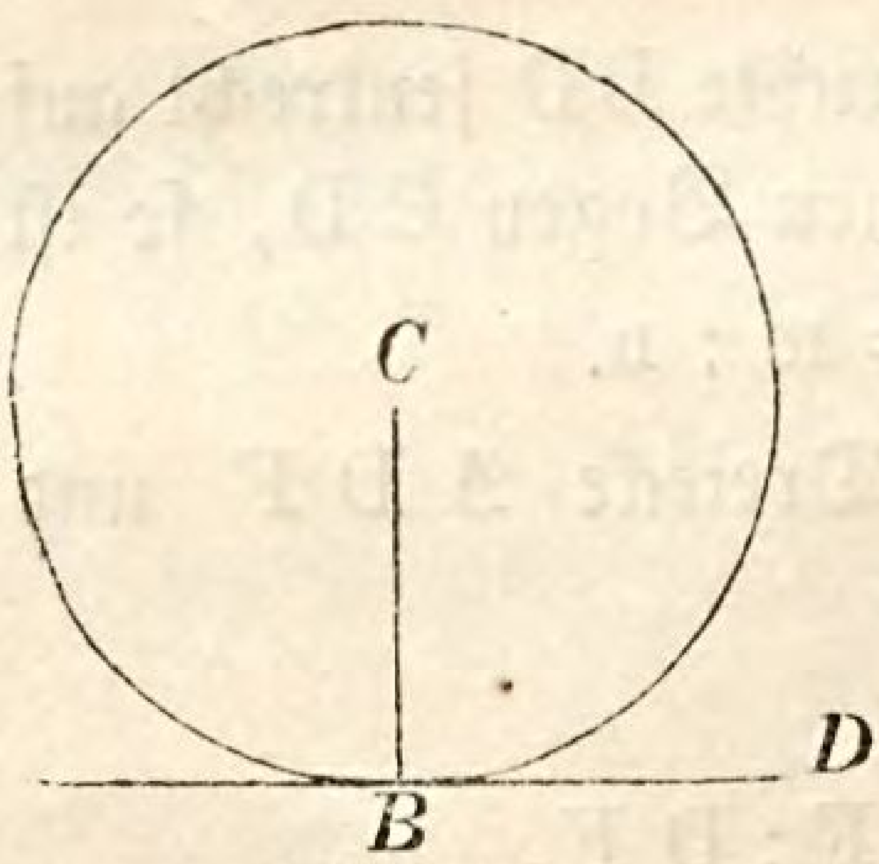


Fig. 70.

105. Aufgabe. Eine Tangente an eine Kreislinie von einem in der Peripherie gegebenen Punkt B aus zu legen.

Construction. Man ziehe den Radius C B und errichte auf denselben in B eine senkrechte Linie B D, so ist diese die verlangte Tangente.

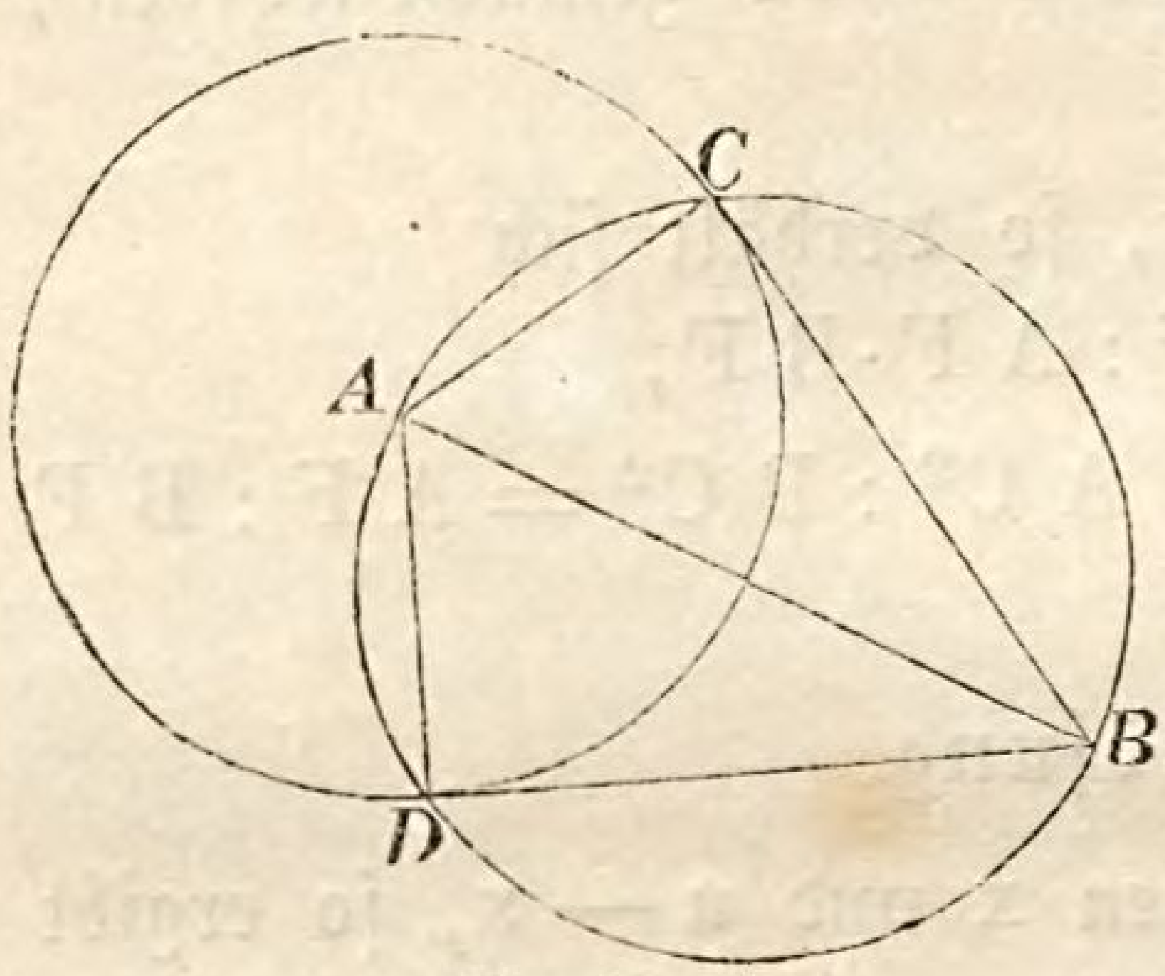


Fig. 71.

106. Aufgabe. Von einem Punkt B außerhalb des Kreises eine Tangente an denselben zu legen.

Construction. Man verbinde B mit A, dem Mittelpunkt des Kreises; beschreibe über oder unter A B einen Halbkreis, der den gegebenen Kreis bezüglich in C und D schneidet; ziehe die Radien A C und A D, und zuletzt die Linien B C und B D, so ist sowol B C als auch B D die verlangte Tangente.

107. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente zu construiren.

Erster Fall.

Die gesuchte Tangente soll die beiden Kreislinien auf ein und derselben Seite der Centrale berühren.

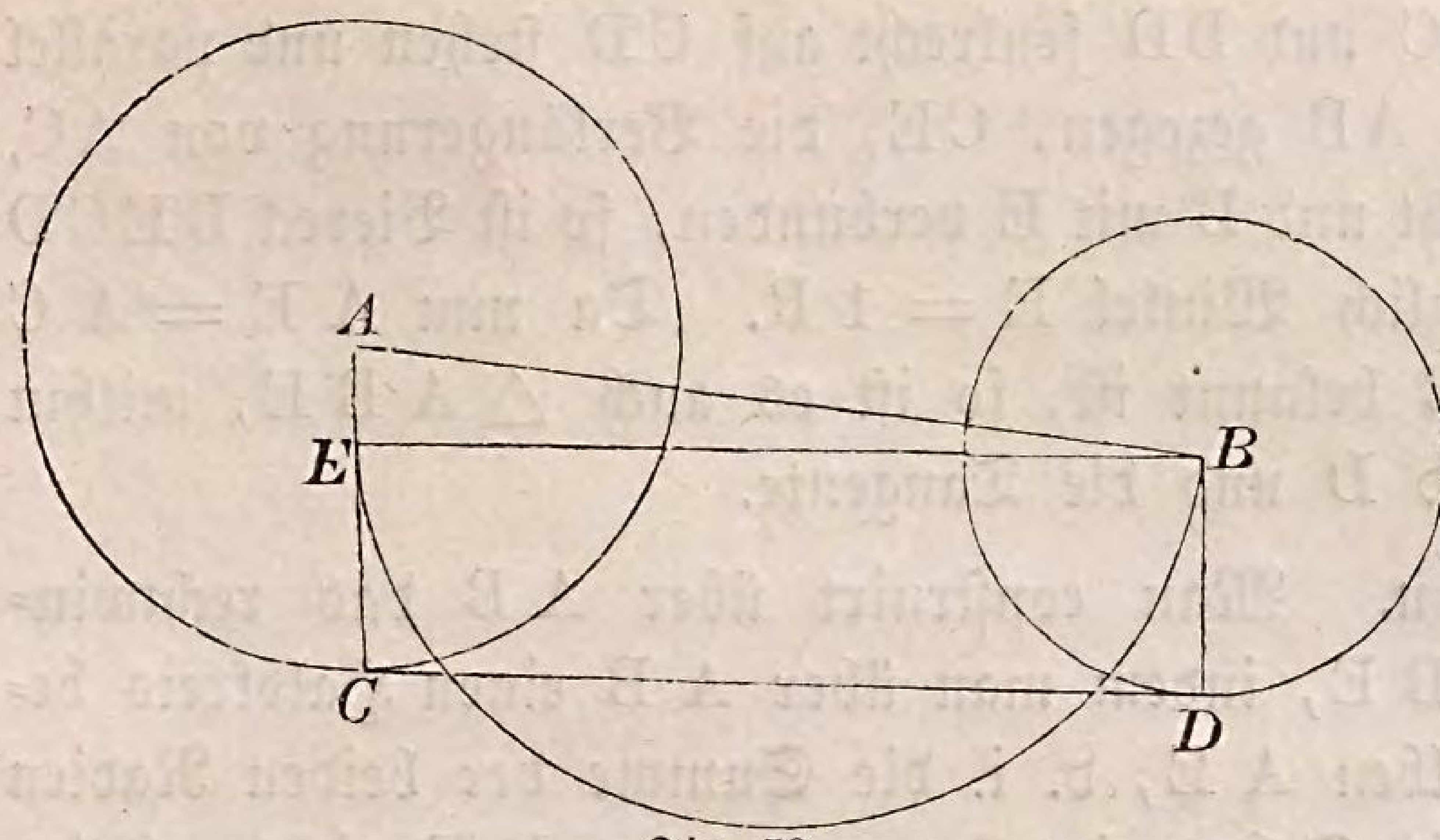


Fig. 72.

Analysis. Angenommen, C D sei die verlangte Tangente, und berühre die beiden Kreise in C und D, so müßten die nach diesen Punkten gezogenen Halbmesser bei C und D Rechte bilden. Verbindet man A und B, und zieht man aus B mit C D eine Parallele B E bis A C, so ist Winkel A E B = einem R., und A E = A C — C E = A C — B D. Da nun auch A B bekannt ist, so ist es gleichfalls das ganze Dreieck A B E, mithin die Punkte C und D, folglich auch die gesuchte Tangente.

Construction. Man construire über A B das rechtwinkelige Dreieck A B E; — dies geschieht, wenn über der Centrale ein Halbkreis beschrieben, in diesem A E = A C — B D als Sehne eingetragen und B E gezogen wird; — verlängere A E bis zur Peripherie, ziehe B D || A C und verbinde C mit D, so ist C D die gemeinschaftliche Tangente.

Beweis. Weil C E und B D gleich und parallel sind und Winkel B E C ein Radius ist, so ist B C D E ein Rechteck. Demnach sind die Winkel E C D und B D C Rechte; folglich C D die verlangte Tangente.

Zusatz. Auch auf der andern Seite der Centrale A B läßt sich auf dieselbe Weise eine solche gemeinschaftliche Tangente construiren.

Zweiter Fall.

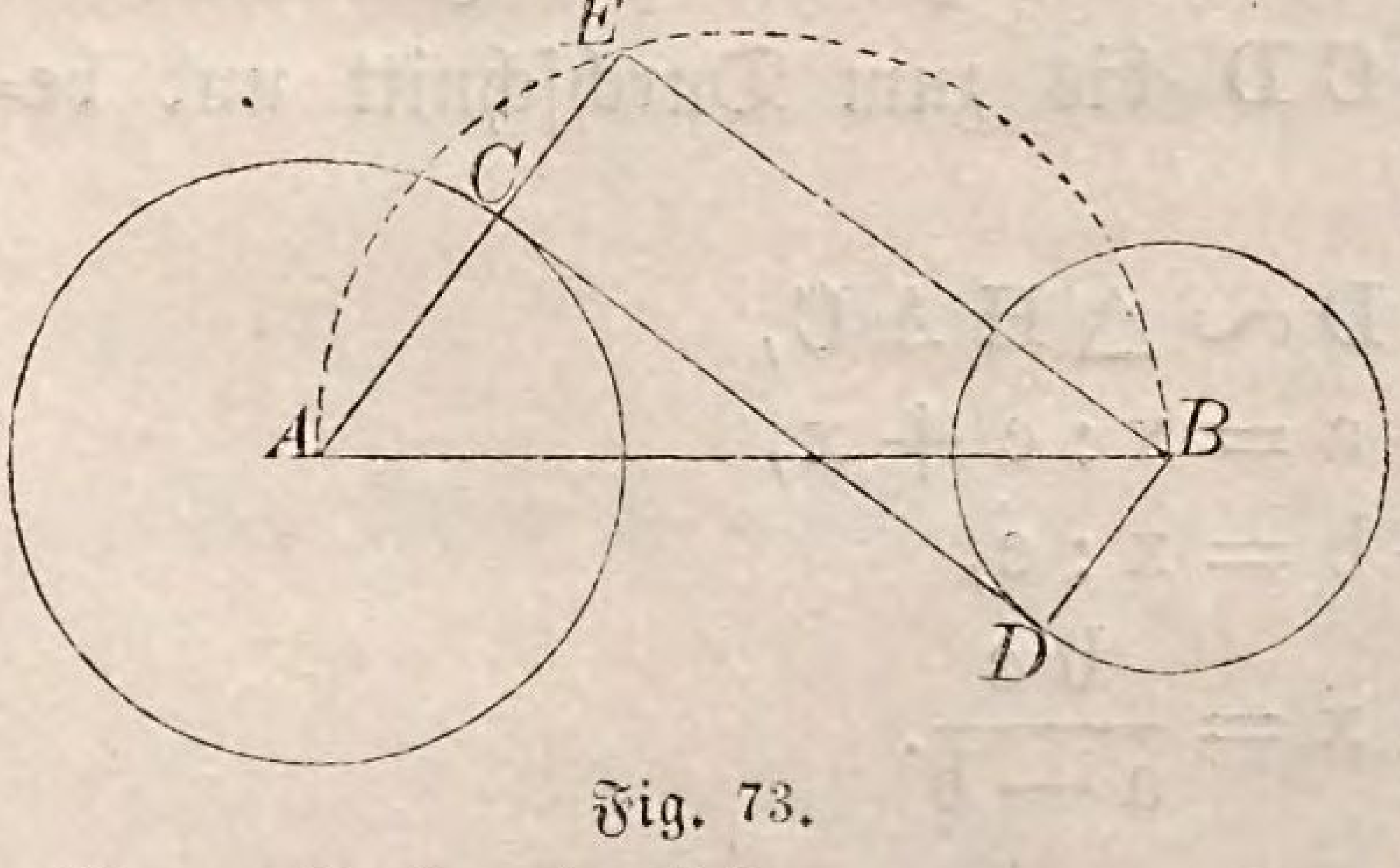


Fig. 73.

Die gemeinschaftliche Tangente soll die Centrale schneiden.

Analysis. Angenommen, C D sei die verlangte Tangente, und sie berühre die Kreise in C und D, so müß-

ten die Radien A C und B D senkrecht auf C D stehen und parallel sein. Wird nun AB gezogen, CE, die Verlängerung von AC, gleich BD gemacht und B mit E verbunden, so ist Viereck BECD ein Rechteck, folglich Winkel E = 1 R. Da nun A E = A C + B D und A B bekannt ist, so ist es auch △ A B E, mithin die Punkte C und D und die Tangente.

Construction. Man construirt über A B das rechtwinkelige Dreieck A B E, indem man über A B einen Halbkreis beschreibt, in denselben A E, d. i. die Summe der beiden Radien A C und B D als Sehne einträgt und dann B E zieht. Wird nun noch CD || BE gezogen, so ist C D die verlangte Tangente.

Der Beweis ergibt sich aus der Analysis.

Anmerkung. Um das Dreieck A B E zu construiren, kann man auch im ersten Fall mit der Differenz, und im zweiten Fall mit der Summe der beiden Radien um A einen Kreis beschreiben, an diesen von B aus eine Tangente legen und D C ziehen.

108. Aufgabe. Aus den Halbmessern a und b zweier Kreise und der Centrale c die Bestimmungen zur

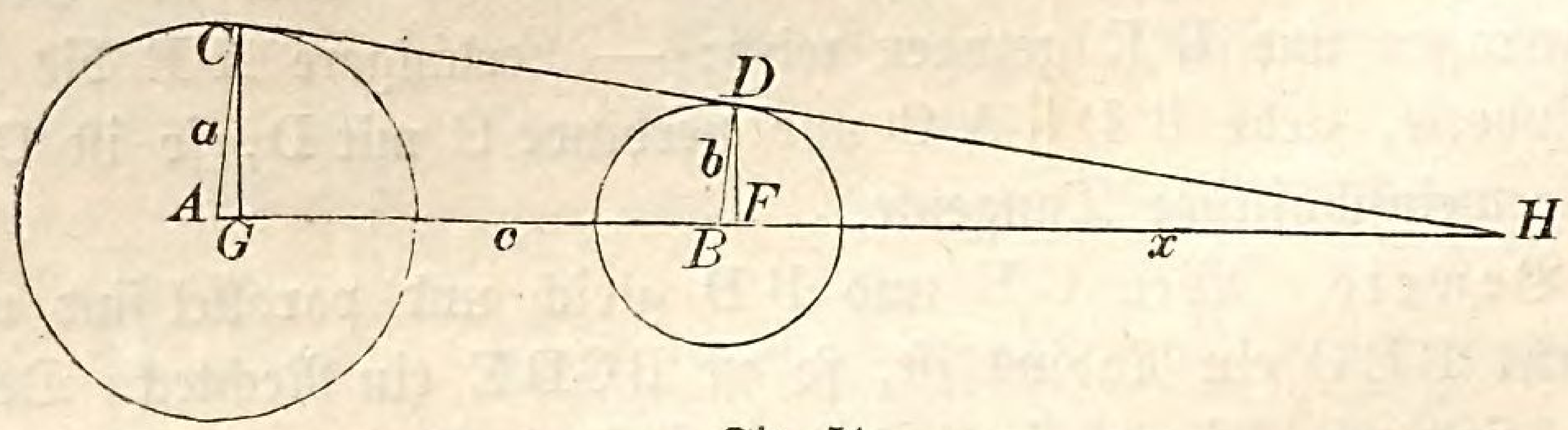


Fig. 74.

Construction der gemeinschaftlichen Tangente zu berechnen.

Lösung I. Es sei A C = a und B D = b sowie A B = c gegeben, und außerdem stelle C D die gesuchte Tangente vor.

Man verlängere c und C D bis zum Durchschnitt und bezeichne B H mit x, so ist

$$\triangle HBD \sim \triangle HAC,$$

$$\text{also } b : a = x : c + x,$$

$$\text{oder } b : a - b = x : c,$$

$$\text{folglich } x = \frac{b\,c}{a - b}.$$

Demnach ist HB, sowie Punkt H bekannt, von welchem man eine Tangente an den Kreis um B zieht. Die Verlängerung dieser Tangente ist die verlangte gemeinschaftliche Berührungslinie.

Lösung II. Werden die Lothe C G und D F gefällt, so ergibt sich

$$A G : a = a : c + \frac{b c}{a - b} \text{ und } B F : b = b : \frac{b c}{a - b}$$

$$\text{folglich } A G = \frac{a (a - b)}{c}. \qquad \text{folglich } B F = \frac{b (a - b)}{c}.$$

Die Punkte F und G sind also bekannt, in welchen man Lothe errichtet, um die Berührungspunkte zu finden.

$$\text{Ferner ist } (C G)^2 = a^2 - \left(\frac{a (a - b)}{c}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{c^2} (c^2 - a^2 + 2 a b - b^2);$$

$$\text{folglich } C G = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2 + 2 a b - b^2}.$$

$$\text{Ebenso ist } (D F)^2 = b^2 - \left(\frac{b (a - b)}{c}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{c^2} (c^2 - a^2 + 2 a b - b^2);$$

$$\text{folglich } D F = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - a^2 + 2 a b - b^2}.$$

$$\text{Ferner ist } H C^2 = (c + x)^2 - a^2,$$

$$= c^2 + \frac{b^2 c^2}{(a - b)^2} + \frac{2 b c^2}{a - b} - a^2,$$

$$= \frac{a^2 (b^2 + c^2 + 2 a b - a^2)}{(a - b)^2},$$

$$\text{also } H C = \frac{a}{a - b} \sqrt{b^2 + c^2 + 2 a b - a^2}.$$

$$\text{Endlich kennt man } (H D)^2 = x^2 - b^2,$$

$$= \frac{b^2 c^2}{(a - b)^2} - b^2,$$

$$= \frac{b^2 (c^2 + \sqrt{2\,a\,b - b^2 - a^2});}{(a - b)^2}$$

$$\text{folglich } H\,D = \frac{b}{a - b} \sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2\,a\,b}.$$

Nun ist aber $C\,D = H\,C - H\,D$,

$$= \frac{a}{a-b}\sqrt{b^2 + c^2 + 2\,a\,b - a^2} - \frac{b}{a-b}\sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2\,a\,b};$$

$$\text{also } C\,D = \frac{1}{a-b}\left(a\sqrt{b^2 + c^2 + 2\,a\,b - a^2} - b\sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}\right).$$

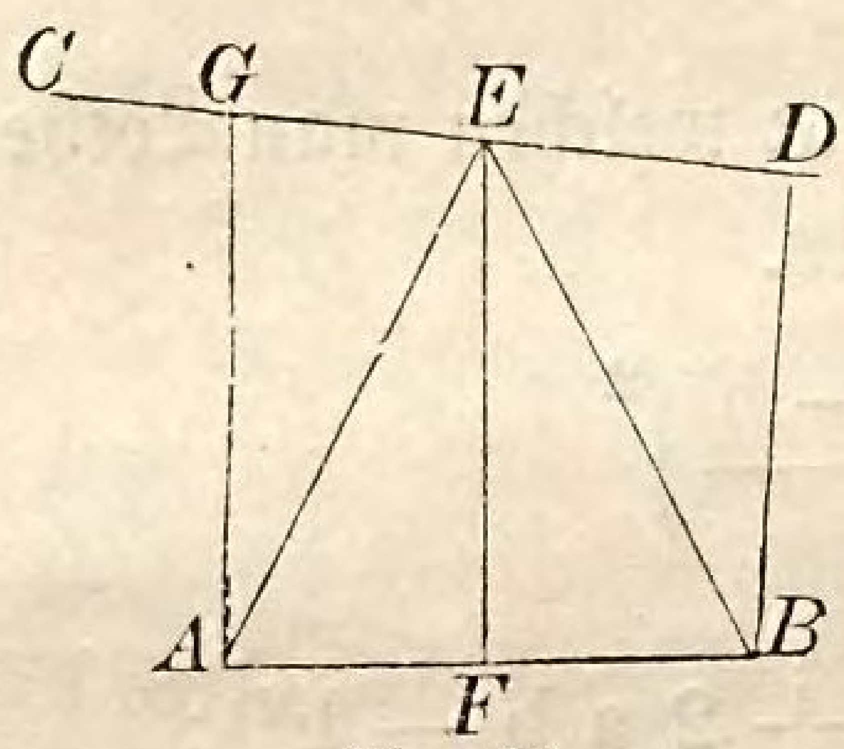


Fig. 75.

109. Aufgabe. In einer Ebene sind gegeben zwei Punkte A und B, und eine Linie C D. Man soll in letzterer einen Punkt E finden, der von A und B gleichweit entfernt ist.

Analysis. Angenommen, Punkt E sei der verlangte, so wäre $A\,E = B\,E$, mithin, wenn man A B zieht, Dreieck A B E gleichschenkelig. Es ist also die Spitze E des Dreiecks A B E in der auf der Mitte von A B errichteten senkrechten E F gelegen.

Construction. Man verbinde Punkt A mit B, halbire A B, und errichte auf der Mitte F ein Loth bis zum Durchschnitt mit C D, so ist Punkt E der verlangte.

Beweis. Weil $A\,F = B\,F$, $E\,F = E\,F$ und Winkel $A\,F\,E =$ Winkel $B\,F\,E$, so ist $\triangle A\,F\,E \cong \triangle B\,F\,E$, und folglich $A\,E = B\,E$.

Algebraische Lösung. Fällt man A G und B D senkrecht auf C D, so ist A G, B D und G D bekannt. Wird $G\,E = x$ gesetzt, so ergibt sich $A\,G^2 + G\,E^2 = D\,E^2 + B\,D^2$.

Es sei ermittelt worden $A\,G = a$, $G\,D = c$, $B\,D = b$, so ist $D\,E = c - x$; und hiernach verwandelt sich obige Gleichung in folgende:

$$a^2 + x^2 = (c - x)^2 + b^2,$$

$$\text{woraus } 2\,c\,x = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$\text{folglich } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$$

sich ergibt.

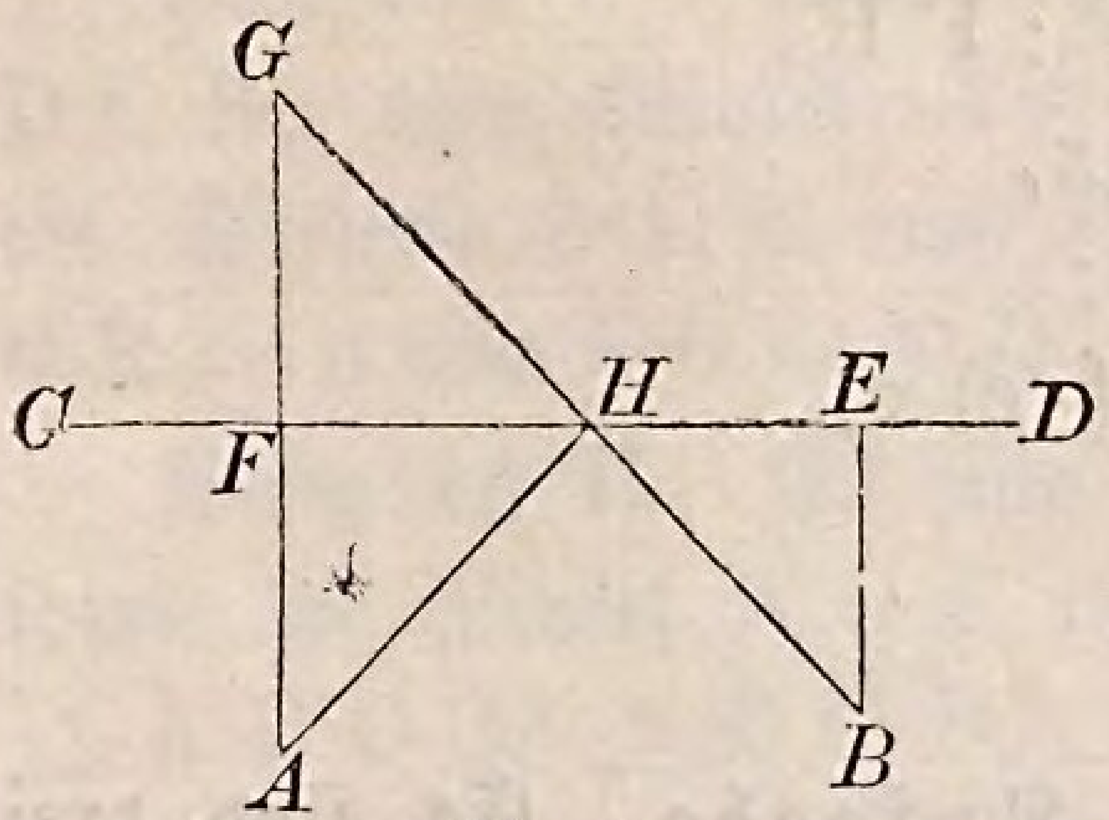


Fig. 76.

110. Aufgabe. In einer Ebene sind gegeben zwei Punkte A und B, und eine Linie C D. Man soll in letzterer einen Punkt H finden, sodaß A H und B H mit der C D gleiche Winkel bilden.

Analysis. Angenommen, die Winkel C H A und B H D wären einander gleich. Verlängert man nun B H über H hinaus, so ist Winkel G H C = Winkel B H D, also auch = Winkel C H A. Deshalb müssen, wenn jetzt von A aus auf C D eine senkrechte Linie A F errichtet und bis zum Durchschnitt mit der Richtung B H oder B G verlängert wird, die rechtwinkeligen Dreiecke A H F und G H F congruent sein. Zu diesem Zwecke hat man die senkrechte Linie A F so zu verlängern, daß F G = F A ist, und alsdann G mit B zu verbinden. Der Durchschnittspunkt der beiden Linien G B und C D ist der gesuchte Punkt H.

Construction. Man fälle von A aus ein Loth A F auf die C D; verlängere A F um sich selbst, sodaß F G = A F wird, und ziehe G B. Dadurch findet sich Punkt H, der noch mit dem Punkte A zu verbinden ist. Dann sind die Winkel A H C und B H D einander gleich.

Beweis. Weil A F = F G und F H = F H, sowie Winkel A F H = Winkel G F H ist, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke A F H und G F H congruent; folglich Winkel A H F = Winkel F H G. Da aber Winkel F H G = Winkel D H B (als Scheitelwinkel) ist, so muß auch Winkel C H A = Winkel B H D sein.

Algebraische Lösung. Werden von A und B aus die Senkrechten A F = a und B E = b auf C D errichtet, so sind nicht nur diese, sondern auch F E = c bekannt. Um Punkt H zu bestimmen, muß man F H kennen. Wenn F H = x angenommen wird, so ist E H = c — x; und da die Dreiecke A F H und B E H ähnlich sind, so verhält sich

$$BE : EH = AF : FH$$
oder $b : c - x = a : x$,
woraus folgt $ac - cx = bx$;
also ist $ac = (b + c)x$,
folglich $\frac{ac}{b + c} = x$.

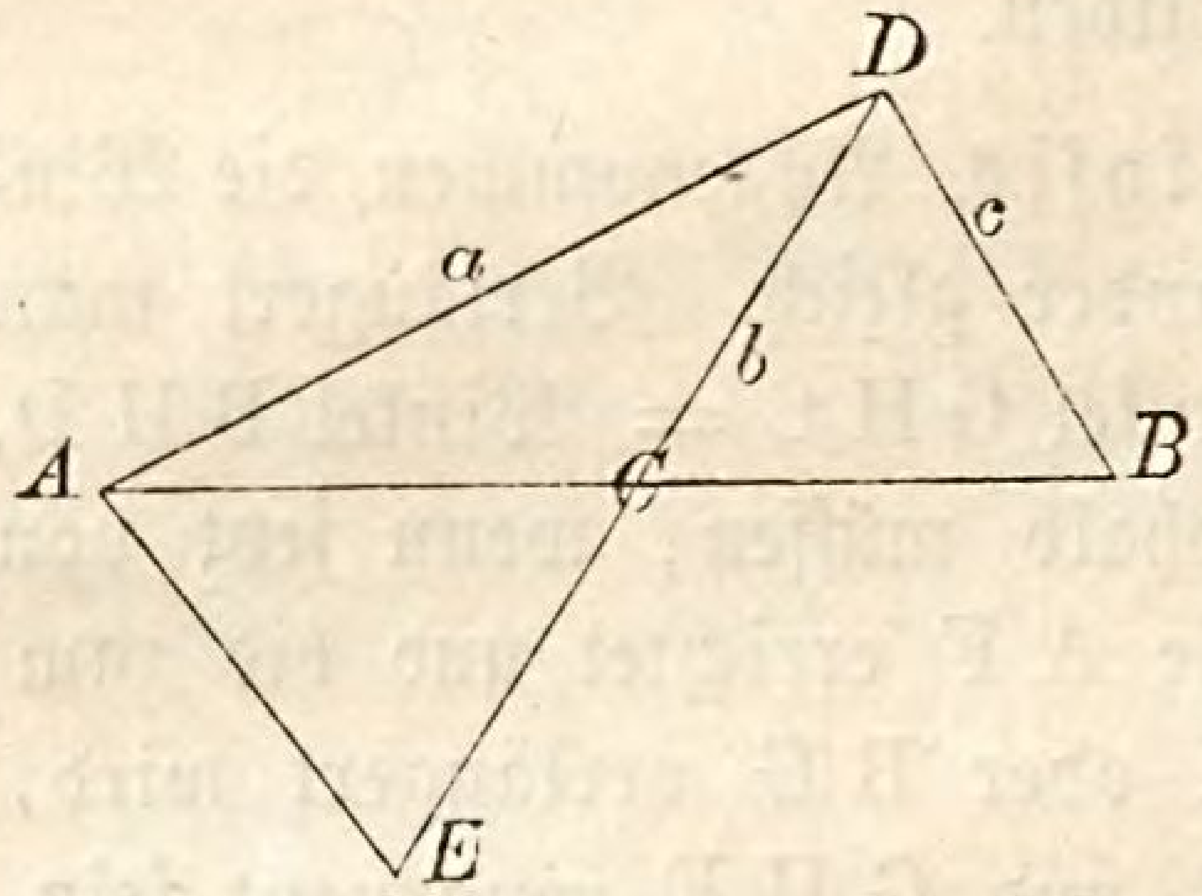


Fig. 77.

111. Aufgabe. Es sind drei gerade Linien, a, b und c, und ein Punkt D gegeben, an welchen man sie unter solchen Winkeln antragen soll, daß die Endpunkte nicht nur in einer geraden Linie liegen, sondern auch gleichweit voneinander entfernt sind.

Analysis. Es sei $AD = a$, $CD = b$, $BD = c$ und $AC = BC$. Ziehen wir aus A mit DB eine Parallele AE und verlängern CD bis zum Durchschnitt mit derselben, so ist Dreieck $ACE \cong \triangle BCD$. Folglich ist die Seite $CD = CE$, also $DE = 2\,CD = 2\,b$, und $AE = BD = c$. Demnach sind bekannt:

a) das Dreieck AED,
b) mithin auch die Richtung der Linie AC, da sie durch die Mitte von ED gehen muß,
c) folglich auch Punkt B, da er
   1. im Durchschnitt der Verlängerung von AC und einer Parallele aus D mit AE liegt, oder
   2. der Endpunkt der um sich selbst verlängerten Linie AC ist.

Construction. Man construire Dreieck AED so, daß $AD = a$, $AE = c$ und $DE = 2\,b$ ist; halbire DE in C, verbinde A mit C, und verlängere AC
   1. bis zum Durchschnitt der Parallele aus D mit AE, oder
   2. um sich selbst, und ziehe BD,

so ist im Dreieck ABD Seite $AD = a$, $CD = b$, $DB = c$ und $AC = CB$.

Beweis I. Seite E C = C D, Winkel A C E = Winkel D C B, und Winkel A E C = Winkel C D B. Deshalb sind die Dreiecke A E C und B C D congruent; folglich ist A E = C E = c und E C = C D = b, sowie A D = a und A C = C B.

Beweis II. Es sind Seite A C = C E und E C = C D, sowie die Winkel A C E und D C B einander gleich, folglich ist $\triangle$ A E C $\cong$ $\triangle$ C D B, und nun wieder A E = D B = c; E C = C D = b, A D = a und A C = C B.

Determination. Soll die Lösung dieser Aufgabe ausführbar sein, so müssen die gegebenen Seiten stets ungleich sein; auch muß die doppelte mittlere Seite weniger betragen, als die Summe der beiden andern. Wären z. B. a, b und c unter sich gleich, so zerfiele $\triangle$ A B D in die beiden gleichschenkeligen Dreiecke A D C und C D B, und hiernach wäre

Winkel D A C = Winkel D C A,
Winkel D C B = Winkel D B C,
also Winkel D A C + Winkel D B C = 180°,

was unmöglich ist, weil nur die drei Winkel eines Dreiecks zusammengenommen 180° betragen können.

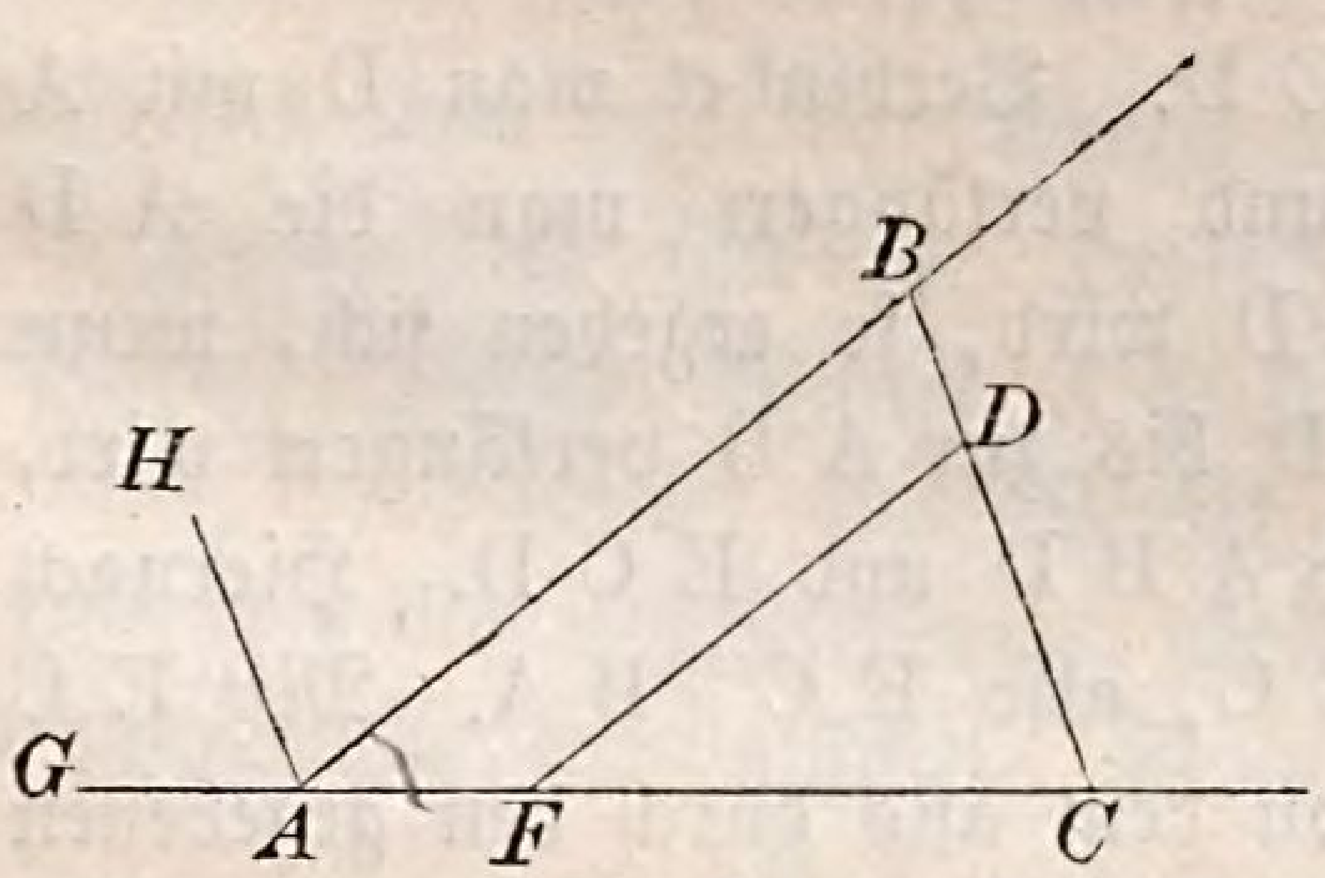


Fig. 78.

112. Aufgabe. In der Fläche eines Winkels C A B ist ein Punkt D gegeben; man soll durch diesen eine gerade Linie B D C so legen, daß A B = A C wird, oder daß sie mit den Schenkeln des gegebenen Winkels gleiche Winkel bildet.

Analysis. Das Dreieck A B C soll gleichschenkelig sein. Wird nun von D aus eine Parallele D F mit A B bis zur A C gelegt, so muß auch das Dreieck D F C gleichschenkelig werden. Daher ist F C = F D zu nehmen und C mit D zu verbinden. Verlängert man C D bis zur A B, so ist A B = A C.

Construction. Man ziehe D F || A B, mache F C = F D, verbinde C mit D, und verlängere C D bis zum Zusammentreffen mit A B, so ist B C die gesuchte gerade Linie.

Beweis. Dreieck D F C ist gleichschenkelig, nämlich D F = F C; D F läuft aber mit B A parallel, folglich sind die Dreiecke D F C und B A C einander ähnlich. Es muß also auch △ B A C gleichschenkelig, d. h. B A = A C sein. Demnach ist auch Winkel A B C = Winkel A C B.

Anmerkung. Die Construction kann auch dadurch geschehen, daß man von den Nebenwinkel des gegebenen Winkels ausgeht. Wird nämlich Winkel B A G durch A H halbirt, so hat man nur noch von D aus mit A H die Parallele D C zu ziehen und diese bis auf die A B zu verlängern. Dann ist Winkel G A H = Winkel H A B, aber auch Winkel G A H = Winkel A C B, und Winkel H A B = Winkel A B C; folglich sind auch die Winkel an der Grundlinie C B im Dreieck A B C einander gleich; also ist dasselbe ein gleichschenkeliges.

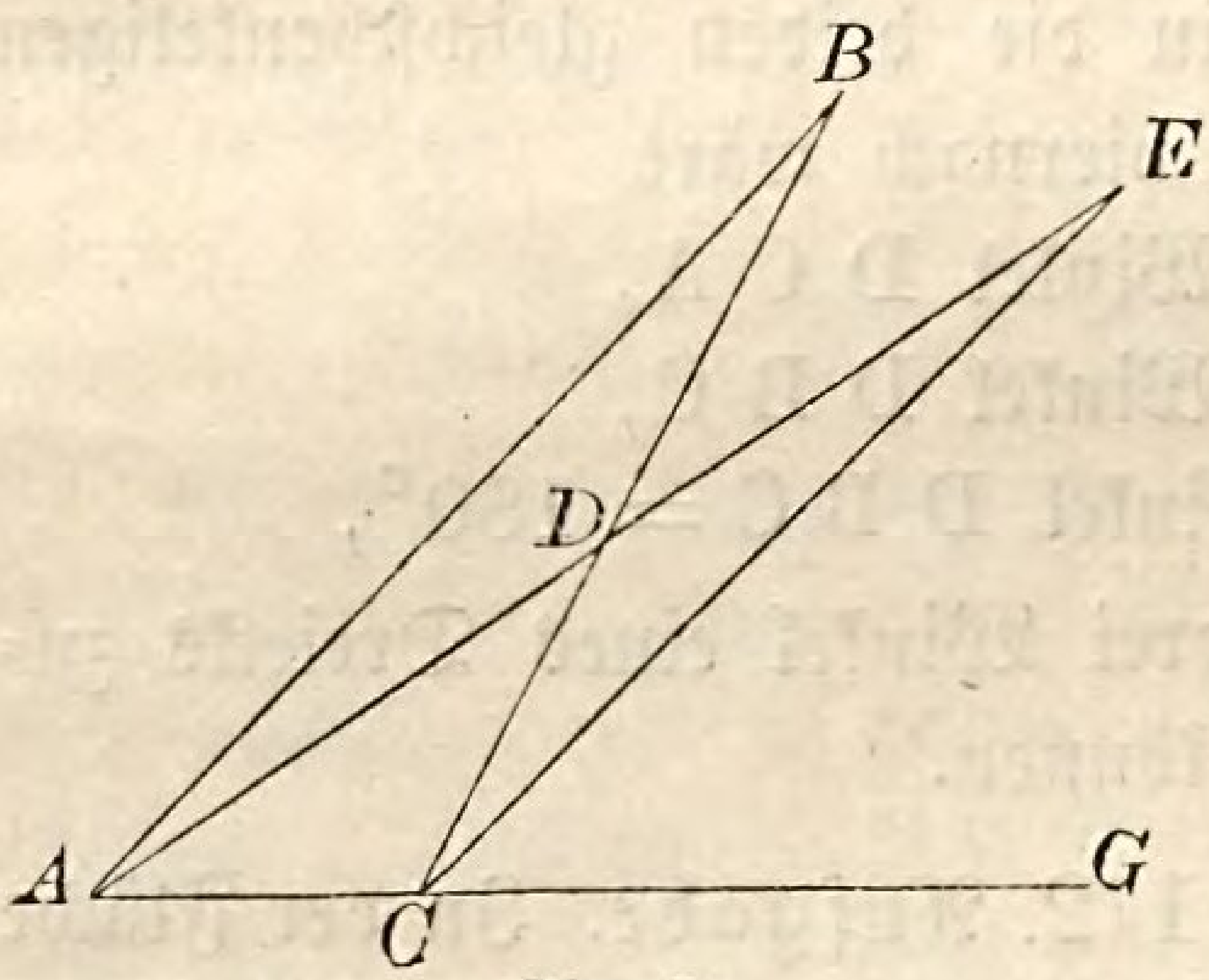


Fig. 79.

113. Aufgabe. In einem Winkel B A G ist ein Punkt D gegeben; man soll durch denselben eine gerade Linie B C so legen, daß sie in D genau halbirt ist.

Analysis. Es sei B D = C D. Verbindet man D mit A und verlängert man die A D über D hinaus, sodaß D E = A D wird, so ergeben sich, wenn noch E mit C verbunden und C D bis zur A B verlängert wird, zwei congruente Dreiecke, nämlich A B D und E C D. Hiernach ist Winkel B A D = Winkel D E C, also E C || B A. Mit E C ist aber der Punkt C gefunden, von dem aus durch den gegebenen Punkt D die gerade Linie C B zu legen ist.

Construction. Man ziehe A D und verlängere dieselbe um sich selbst, sodaß D E = A D wird. Alsdann lege man durch E mit B A eine Parallele E C, bis diese die A C in C trifft, ziehe C D und verlängere dieselbe bis zur A B. Dann ist B D = D C.

Beweis. A D = D E, Winkel B A D = Winkel D E C (weil E C und B A parallel sind) und Winkel A D B = Winkel E D C. Hieraus ergibt sich die Congruenz der Dreiecke A B D und C D E. Folglich ist B D = D C, also B C in D halbirt.

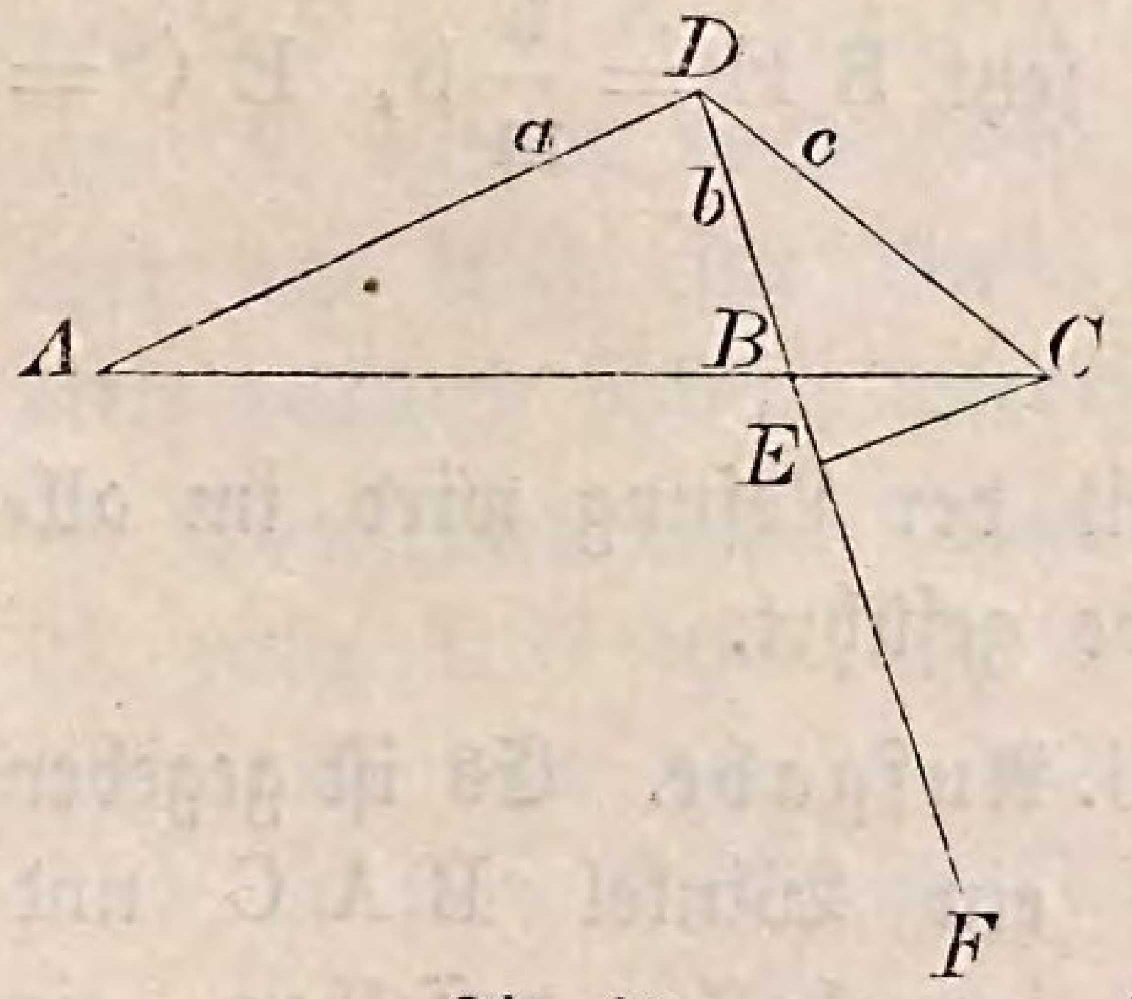


Fig. 80.

114. Aufgabe. Man soll drei gegebene Linien, a, b und c, so an einen gegebenen Punkt D anlegen, daß ihre Endpunkte A, B und C in einer geraden Linie liegen und A B das Dreifache von B C werde.

Analysis und Construction. Man ziehe von D aus eine beliebige Linie D F, mache D B = b, und B E = $\frac{1}{3}$ b. Beschreibt man nun über D E das Dreieck D E C, dessen Seite D C = c und E C = $\frac{1}{3}$ a ist, so sind die Endpunkte B und C der gegebenen Linien b und c gefunden, sowie die Richtung der B C. Da A B = 3 B C werden soll, so hat man jetzt C B über B hinaus zu verlängern, sodaß A B = 3 B C wird. Verbindet man schließlich A mit D, so muß die Linie A D = a sein.

Beweis. Es verhält sich (der Construction gemäß)

$$AB : BC = DB : BE$$

oder $AB : BD = BC : BE$;

während man noch hat Winkel A B D = Winkel C B E.

Demzufolge sind die Dreiecke A B D und C B E einander ähnlich; folglich Winkel A D B = Winkel E B C, also Seite A D || E C; ferner auch Winkel D A B = Winkel B C E, während noch die einschließenden Seiten dieser beiden Winkel einander proportionirt sein müssen. Man hat also

$$DA : AB = EC : CB,$$

oder $DA : EC = AB : CB$,

d. h. $DA : \frac{1}{3} a = 3 BC : BC$;

folglich ist $DA = a$.

115. Aufgabe. Drei gegebene Linien, a, b und c, an einen bestimmten Punkt so anzutragen, daß ihre Endpunkte A, B und C in einer geraden Linie liegen und A B : B C = m : n sich verhält (wenn m und n zwei beliebig gegebene Zahlen vorstellen).

Construction. Damit die Dreiecke A B D und E B C

wieder ähnlich werden, mache man jetzt $B E = \frac{n}{m} b$, $E C = \frac{n}{m} a$ und $A B = \frac{m}{n} B C$.

Der Beweis für die Richtigkeit der Lösung wird im allgemeinen wie in der vorigen Aufgabe geführt.

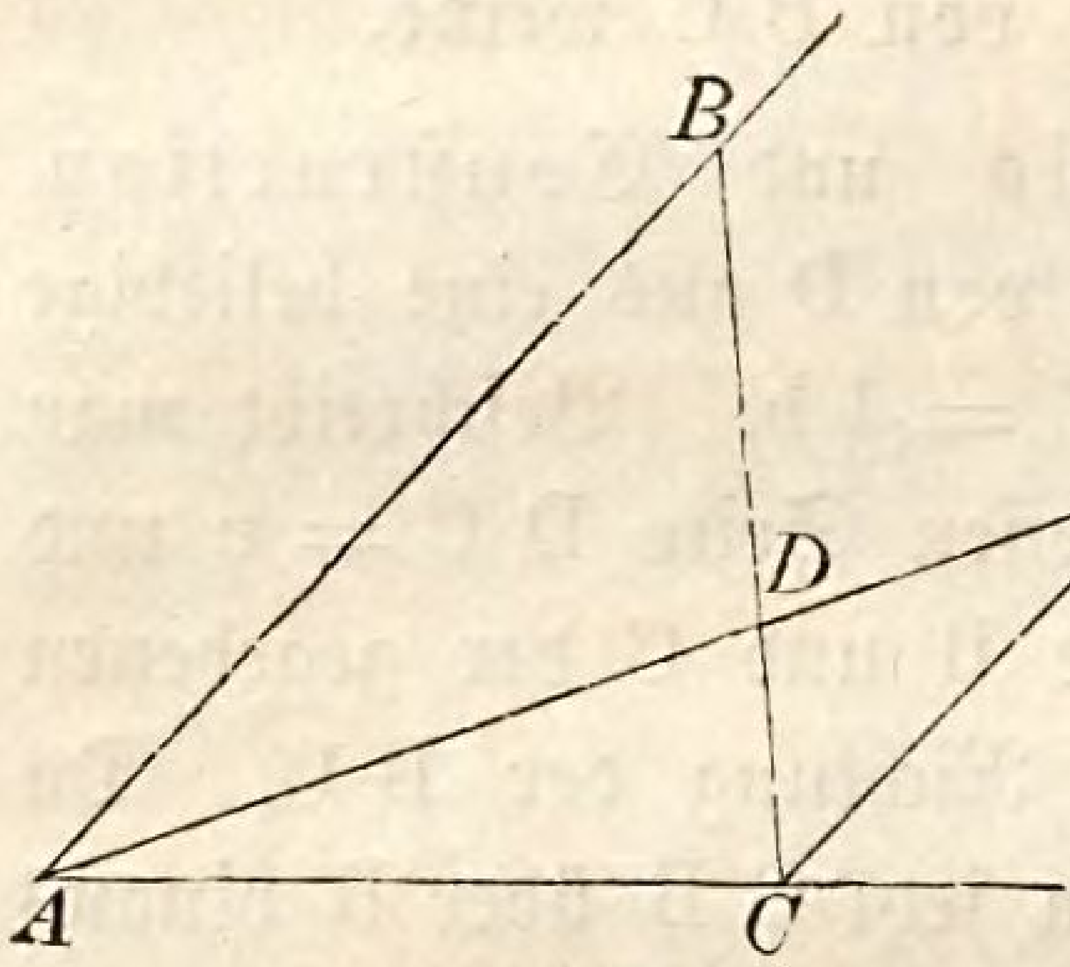


Fig. 81.

116. Aufgabe. Es ist gegeben ein Winkel B A C und innerhalb desselben ein Punkt D; man soll durch D eine Linie B C so legen, daß die Stücke derselben zwischen D und den Schenkeln des gegebenen Winkels wie m : n sich verhalten.

Die Lösung, die ähnlich wie in Nr. 113 gefunden wird, besteht darin, daß man A D in m gleiche Theile theilt, und $D E = n$ solcher Theile macht (nämlich $= \frac{n}{m} A D$). Dann ist nur noch $E C \parallel A B$ zu ziehen und C mit D zu verbinden und C D bis B zu verlängern, um die B C nach dem gegebenen Verhältnisse in D getheilt zu erhalten.

Der Beweis stützt sich wieder auf die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke C D E und A D B.

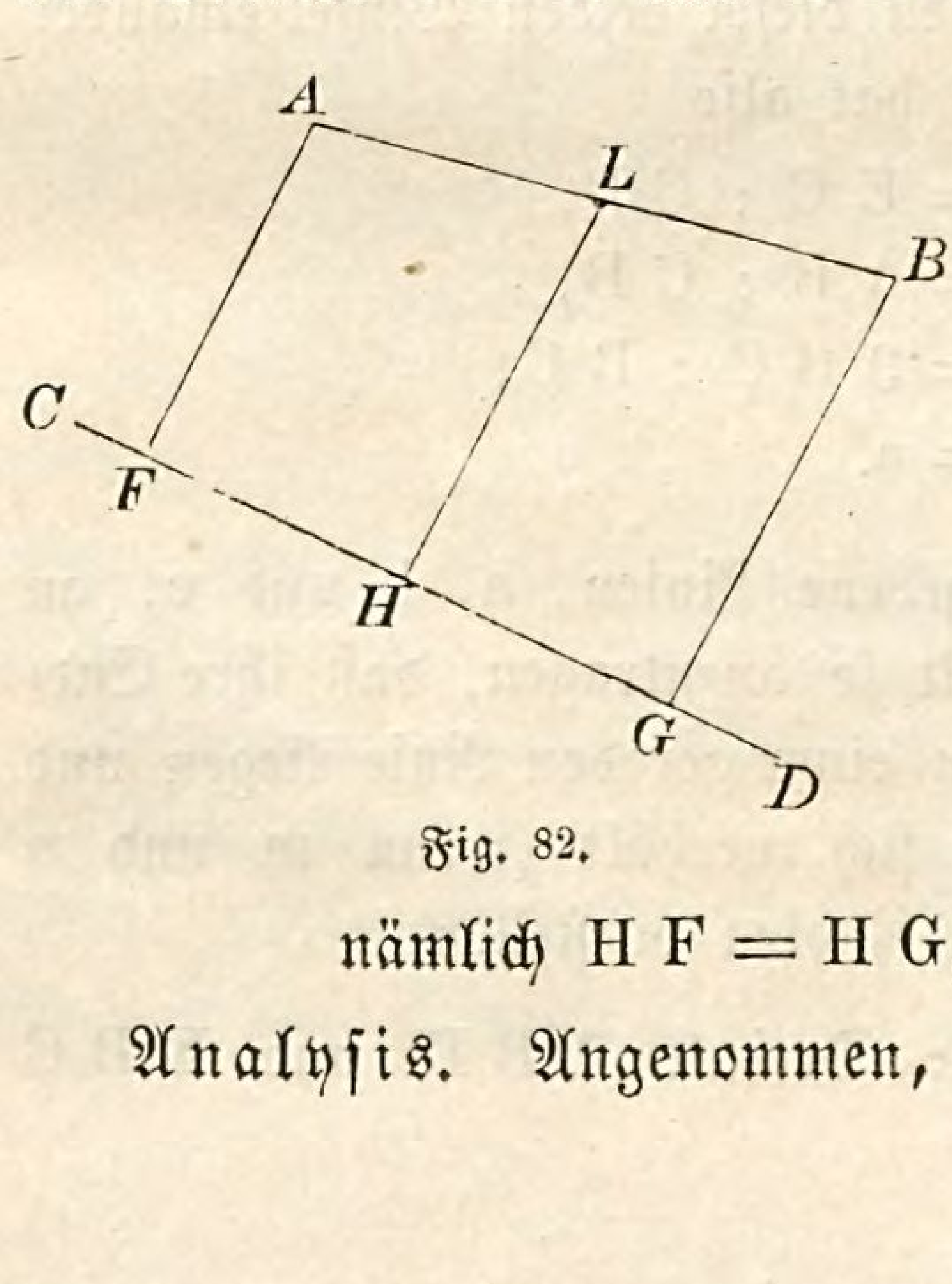


Fig. 82.

117. Aufgabe. Es sind gegeben drei Punkte H, A und B; man soll durch H eine Linie C D so legen, daß die beiden von A und B aus auf dieselbe errichteten senkrechten Linien A F und B G auf beiden Seiten von H gleiche Stücke, nämlich $H F = H G$, abschneiden.

Analysis. Angenommen, es sei C D die verlangte Linie,

und H F = H G, sowie A F und B G senkrecht auf C D. Wird nun A mit B verbunden, und von H aus parallel mit A F oder mit B G eine Linie H L bis zur A B gezogen, so muß diese dadurch halbirt werden, also daß L A = B L ist.

Construction. Man verbinde A und B, halbire A B in L, ziehe L H und lege C D rechtwinkelig an dieselbe. Fällt man nun noch von A und B aus die Lothe A F und B G auf C D, so sind F H und H G einander gleich.

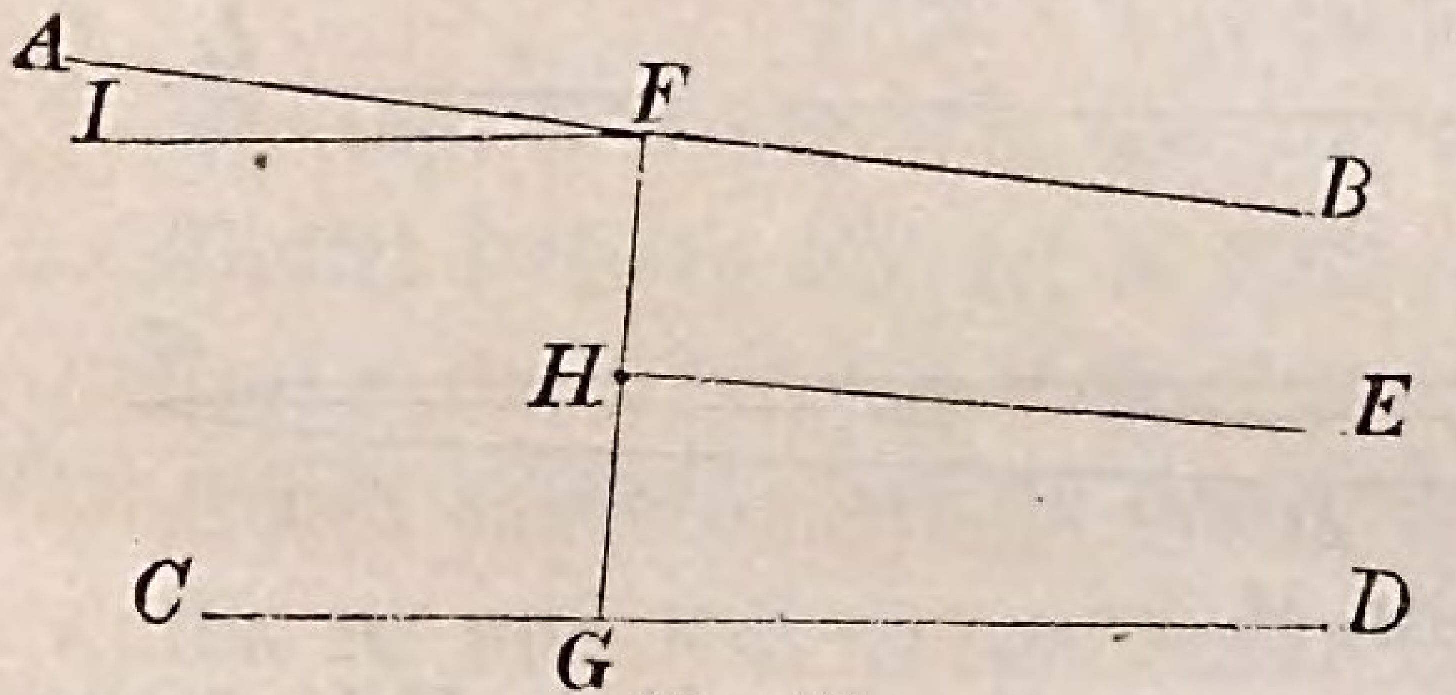


Fig. 83.

118. Aufgabe. Zwischen zwei wenig convergirenden Linien A B und C D eine dritte H E zu construiren, die, gehörig verlängert, den Durchschnittspunkt derselben trifft und den Winkel daselbst halbirt.

Analysis. Angenommen, H E sei die verlangte Linie, so wäre, wenn F G durch H senkrecht gelegt würde (der Durchschnittspunkt der beiden Linien A B und C D heiße N), Dreieck G H N ≅ △ F H N (als Hälften des gleichschenkeligen Dreiecks F N G, oder weil H N = H N, Winkel F H N = Winkel N H G und Winkel G H E = Winkel E H F ist). Deshalb wäre Winkel D G H = Winkel B F H und H G = H F. Wird also F G so gezogen, daß die innern Gegenwinkel gleich sind, so ist das in der Mitte von F G gezogene Loth die verlangte Linie.

Construction. Man nehme in der Linie A B einen beliebigen Punkt an, z. B. F, ziehe aus F mit C D eine Parallele F I, halbire Winkel B F I und verlängere die Halbirungslinie bis G, errichte in der Mitte von F G ein Loth H E, so ist H E die verlangte Linie.

Beweis. Winkel I F G = Winkel F G D, weil F I || C D,
Winkel I F G = Winkel B F G,
also Winkel F G D = Winkel B F G.
Ferner ist Winkel G H E = Winkel F H E
und G H = F H;

demnach $\triangle GHN \cong \triangle FHN$;
also Winkel $GNH =$ Winkel FNH;
folglich ist der Winkel N halbirt, und die Linie HE muß den Punkt N treffen.

119. Aufgabe. Es sind zwei wenig convergirende Linien AB und CD und zwischen denselben ein Punkt F

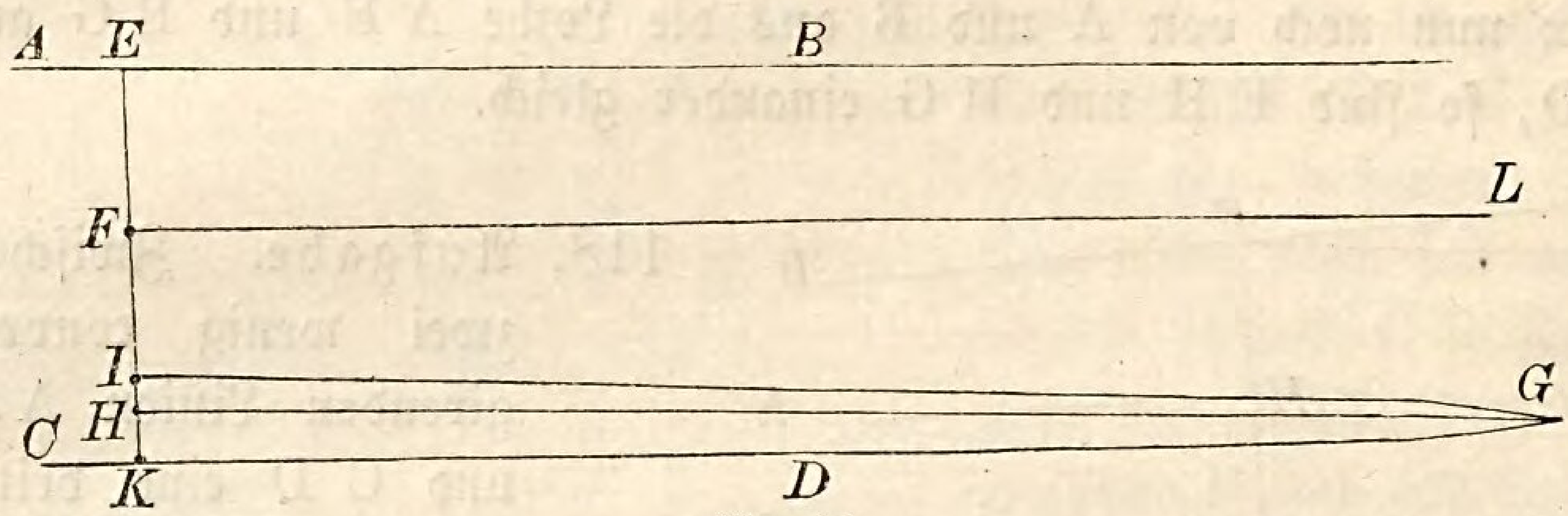


Fig. 84.

gegeben. Man soll durch F eine Linie FL legen, welche, gehörig verlängert, mit AD und CD in einem und demselben Punkt zusammentrifft.

Analysis. Angenommen, FL sei die verlangte Linie. Verbinden wir AB und CD durch eine gerade Linie, welche durch F geht, ziehen aus irgendeinem Punkt derselben $IL \parallel AB$ bis zum Durchschnitt C mit CD, und denken wir uns noch AB und CD bis zu ihrem Vereinigungspunkt N verlängert, so ist $\triangle EKN \sim \triangle IKG$. Soll FL den Durchschnitt der gegebenen Linien oder die Spitze N des Dreiecks EKN treffen, so müßte auch eine gleichgelegene Linie im Dreieck IKG die Spitze G treffen. Um diese gleichgelegene Linie zu construiren, hat man zu EI, FK und IK die vierte Proportionale zu suchen und dieselbe von K aus auf KI abzuschneiden. Verbindet man den hierdurch gefundenen Punkt H mit G, so verhält sich, da $\triangle EKN \sim \triangle IKG$ ist,

$$EK : IK = KN : KG,$$
$$EK : IK = FK : KH;$$
$$\text{also } KN : KG = FK : HK;$$

folglich $FL \parallel HG$, mithin in ihrer Richtung bekannt.

Construction. Man verbinde die Linien AB und CD durch eine gerade Linie EK, die durch den gegebenen Punkt F geht; schneide von EK ein beliebiges Stück $= IK$ ab; suche

zu E K, I K und F K die vierte Proportionale, und schneide sie von K aus auf K I ab. Dann ziehe man aus I mit A B eine Parallele I G bis zum Durchschnitt mit C D und verbinde diesen Durchschnittspunkt G mit H, dem Endpunkt der vierten Proportionale K H. Zuletzt ziehe man durch den gegebenen Punkt F mit H G eine Parallele F L, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Die Dreiecke E K N und I K G sind ähnlich, weil in ihnen zwei Winkel gleich sind, folglich verhält sich

$$E N : I G = E K : I K.$$

Da nun G H und F L parallel sind, so ist auch Winkel E F N = Winkel I H G, Winkel N E F = Winkel G I H, folglich

$$\triangle E F N \sim \triangle I H G,$$

und deshalb verhält sich $E F : E H = F N : H G$.

Es ist nun F N proportional und parallel H G, folglich auch gleichgelegen H G, und da H G die Spitze des Dreiecks I K G trifft, so würde bei gehöriger Verlängerung auch F L — nämlich F N — die Spitze des Dreiecks E K N treffen.

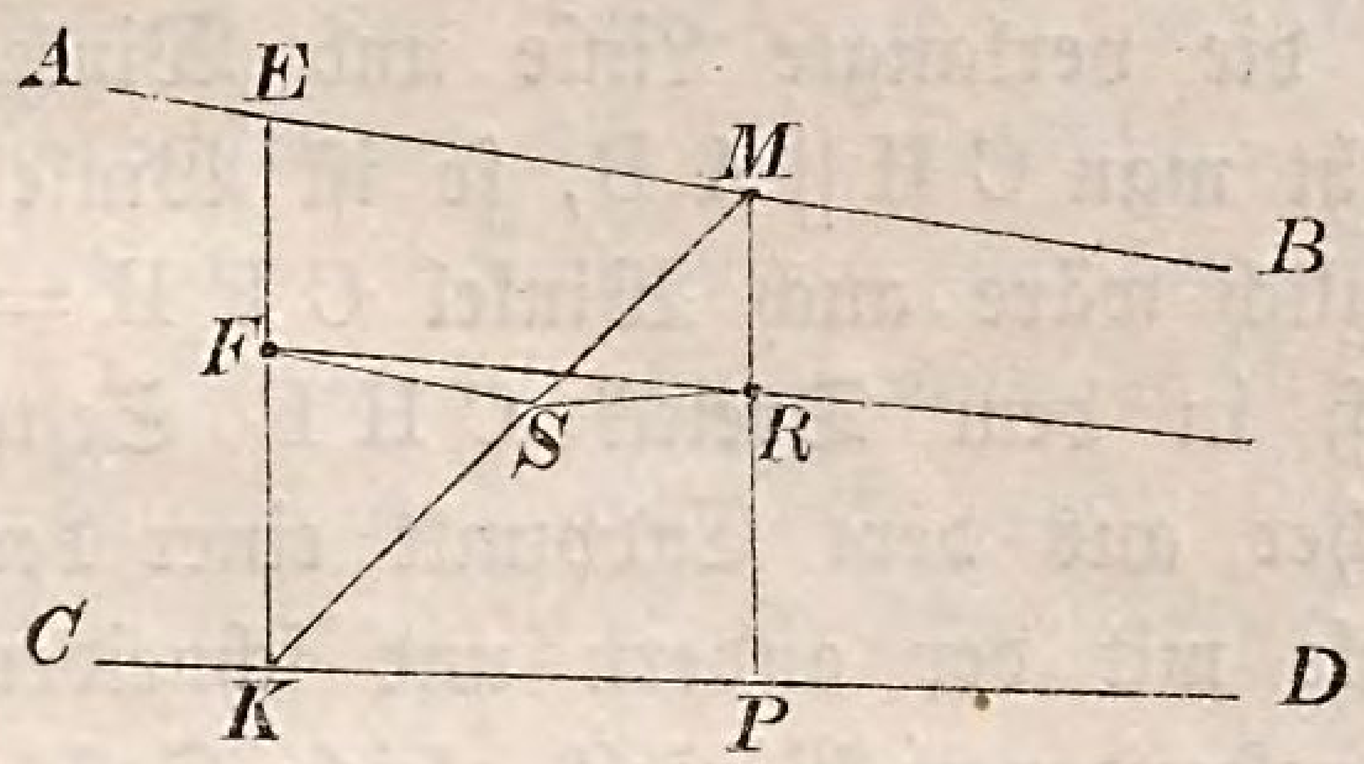


Fig. 85.

Zusatz. Die Aufgabe kann auch dadurch gelöst werden, daß man, nachdem E K beliebig durch F gelegt worden, mit E K eine beliebige Parallele M P zieht, K und M miteinander verbindet. Zieht man nun von F aus mit E M eine Parallele F S bis zum Punkt S in der Linie K M, und von S aus mit K P eine Parallele S R bis auf die P M, so ist die Linie, welche die Punkte F und R verbindet, nämlich F R, die verlangte.

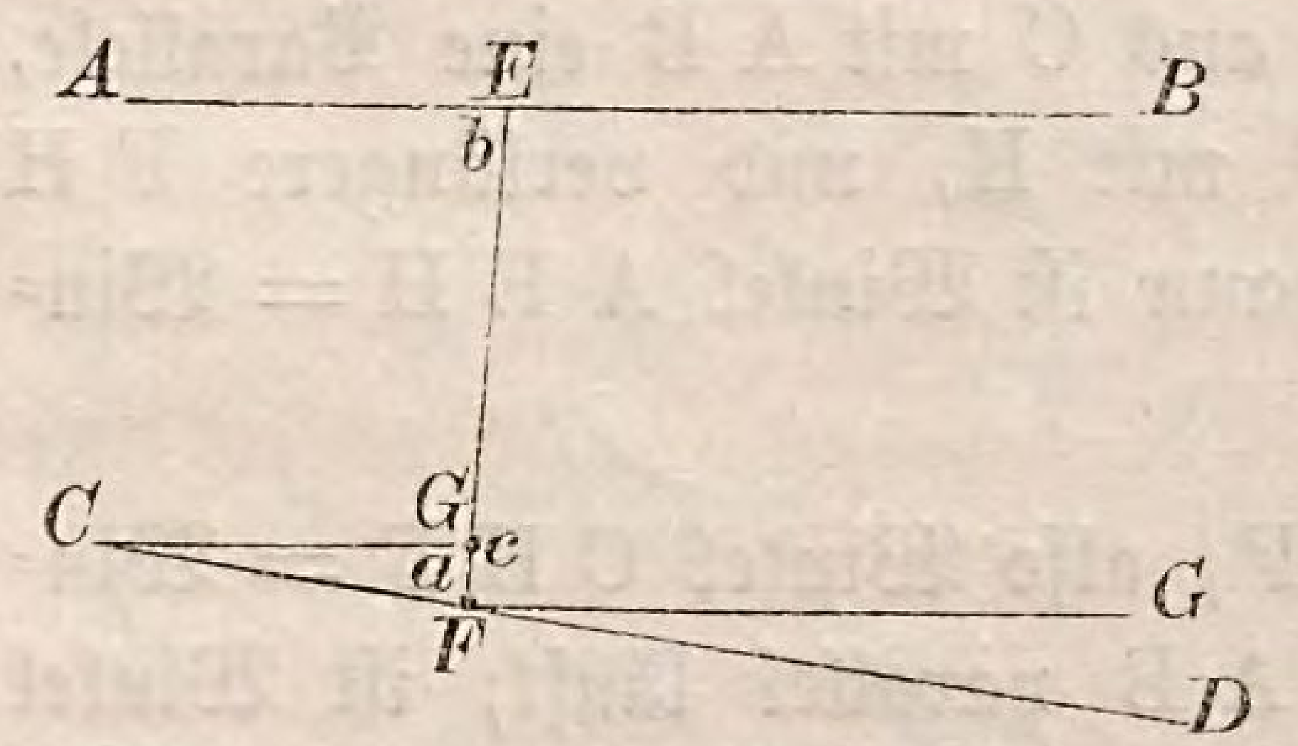


Fig. 86.

120. Aufgabe. Der Durchschnittspunkt zweier convergirenden Linien A B und C D ist nicht zu finden, man soll beide durch eine gerade Linie E F schneiden, sodaß die innern Winkel einander gleich werden.

Erste Lösung.

Analysis. Angenommen, E F schnitte A B und C D, wie verlangt wird, also daß die Winkel a und b gleich wären. Wird nun F G || A B gezogen, so ist Winkel c = Winkel b; folglich wäre auch a = c, d. h. Winkel C F G wäre halbirt. Nimmt man daher in einer von beiden gegebenen Linien einen beliebigen Punkt an, zieht aus demselben mit der andern Linie eine Parallele, halbirt den entstandenen Winkel und verlängert die Halbirungslinie bis auf die andere gegebene Linie, so werden die innern Gegenwinkel gleich sein.

Construction. Man nehme in C D einen beliebigen Punkt F an, ziehe F G || A B, halbire den Winkel C F G und verlängere die Halbirungslinie bis zur A B so ist Winkel a = b.

Der Beweis liegt in der Analysis.

Zweite Lösung.

Analysis. Es sei E F die verlangte Linie und Winkel C F E = Winkel A E F. Zieht man C H || A B, so ist Winkel C H F = Winkel A E H; folglich wäre auch Winkel C F H = Winkel C H F und demgemäß in dem Dreieck C H F Seite C H = C F. Ziehen wir daher aus dem Endpunkt einer der gegebenen Linien eine Parallele mit der andern und schneiden aus dem Scheitel des dadurch entstandenen Winkels gleiche Stücke von beiden Schenkeln ab, so haben wir nur noch durch beide Abschnittspunkte eine Linie zu ziehen, bis sie die andere der gegebenen Linien schneidet. Dann sind die innern Gegenwinkel gleich.

Construction. Man ziehe aus C mit A B eine Parallele, mache C H = C F, verbinde F mit H, und verlängere F H bis zum Durchschnitt mit A B; dann ist Winkel A E H = Winkel C F H.

Beweis. Es ist C H = C F, also Winkel C H F = Winkel C F H; und weil C H mit A B parallel läuft, ist Winkel C H F = Winkel A E H. Folglich muß Winkel C F H = Winkel A E H sein.

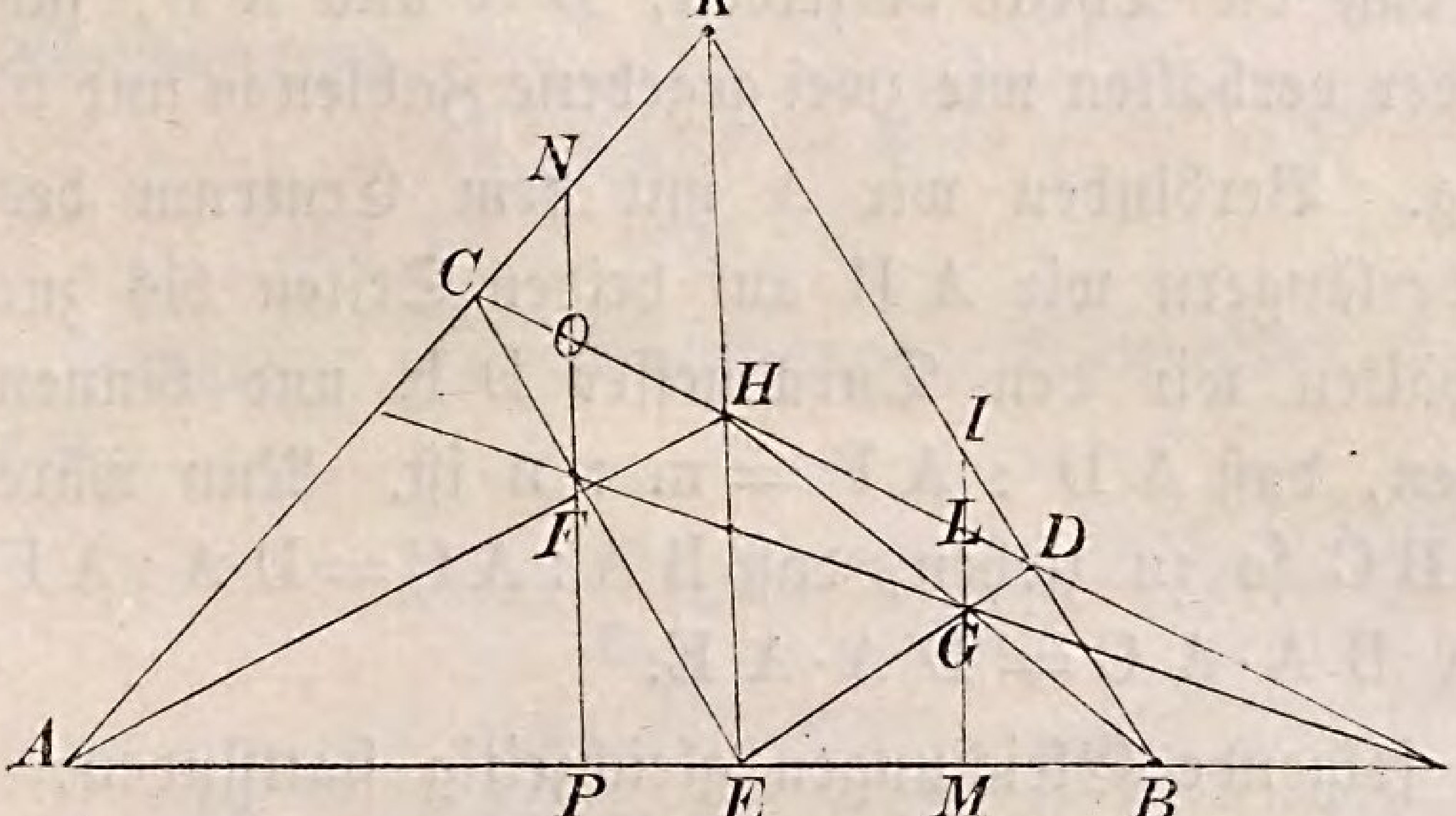


Fig. 87.

121. Aufgabe. Es sind gegeben zwei Linien A B und C D ihrer Lage nach, und zwischen ihnen ein Punkt F; man soll, ohne die beiden gegebenen Linien zu verlängern, durch F eine Linie so legen, daß sie mit A B und C D, wenn sie gehörig verlängert würden, in einem und demselben Durchschnittspunkt zusammentreffen müßte.

Lösung. Man ziehe beliebig durch Punkt F die beiden Linien A H und C E, verbinde A mit C, und E mit H, verlängere A C und E H bis zu ihrem Durchschnittspunkt K, ziehe von K aus beliebig K B, verbinde E mit D sowie B mit H. Dann ergibt sich der Durchschnittspunkt G, und zieht man von hier aus durch F eine gerade Linie F G, so ist diese die gesuchte Linie.

Beweis. Zieht man durch F und G die Linien N P und I M mit K E parallel, wobei sich die Durchschnittspunkte O und L ergeben, so ist in dem Dreieck C E K

$$F O : F N = E H : E K;$$

und im Dreieck A E K $F N : F P = K H : E H,$

demgemäß $F O : F P = K H : K E.$

Ebenso ist auch $L G : G M = K H : K E;$

folglich $F O : F P = G L : G M.$

Also schneiden sich entweder F G, C D und A B in einem und demselben Punkt, oder sie laufen alle drei miteinander parallel.

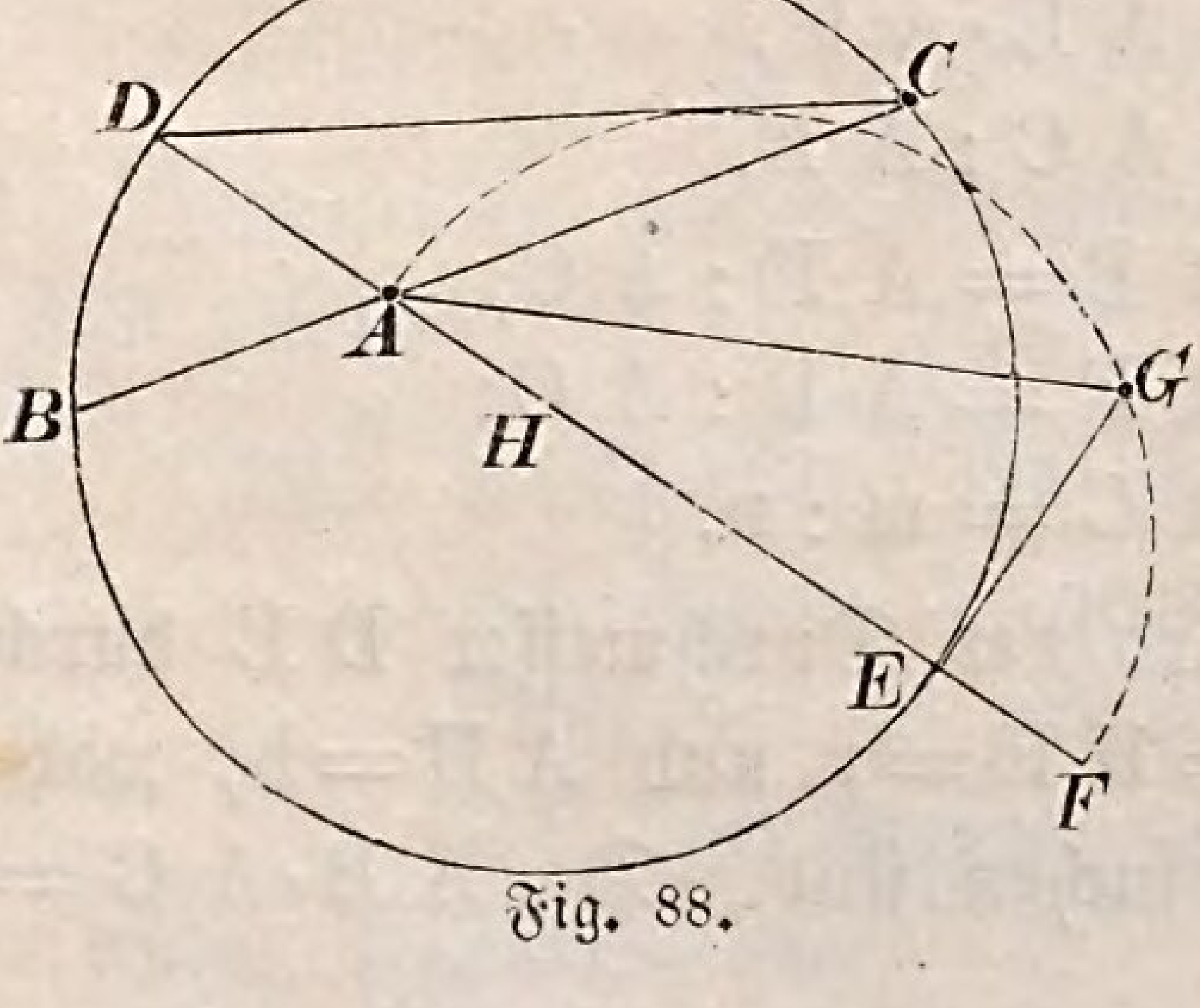


Fig. 88.

122. Aufgabe. Es ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt A gegeben; man soll durch denselben eine Sehne B C so

ziehen, daß die Theile derselben, B A und A C, sich zueinander verhalten wie zwei gegebene Zahlen m und n.

Entwickelung. Verbinden wir A mit dem Centrum des Kreises, H, und verlängern wir A H auf beiden Seiten bis zur Peripherie, so erhalten wir den Durchmesser D E und können nun A F so nehmen, daß A D : A F = m : n ist. Nun wäre durch A eine Linie B C so zu ziehen, daß B A : A C = D A : A F wird. Es ist aber B A · A C = D A · A E.

Es sollen also folgende Gleichungen gleichzeitig stattfinden:

$$BA : AC = DA : AF$$

und $$BA : AC = DA : AE;$$

wird die letztere durch die erstere dividirt, so ist das Ergebniß:

$$AC^2 = AE \cdot AF;$$

d. h. A C ist die mittlere Proportionale zwischen A E und A F.

Ist aber A C gefunden, so kennt man auch die verlangte Sehne B C.

Construction. Man ziehe den Durchmesser D E, der durch den gegebenen Punkt A geht, und suche zu D A eine Linie A F so, daß sich jene zu dieser wie m : n verhält. Alsdann suche man die mittlere Proportionale zu A E und A F, und beschreibe mit derselben, nämlich mit A G, von A aus einen Bogen, der die Peripherie in C schneidet. Wird nun C mit A verbunden, und C A über A hinaus bis zur Peripherie in B verlängert, so ist B C die verlangte Sehne, und B A : A C = m : n.

Beweis. Da die Stücke der Sehnen umgekehrt proportionirt sind, so hat man

$$DA : AB = AC : AE;$$

während man weiß, daß $AC = \sqrt{AE \cdot AF}$ ist. Es ist also

$$AC^2 = AE \cdot AF,$$

oder $$AF : AC = AC : AE.$$

Demnach verhält sich $DA : AB = AF : AC$,

oder $DA : AF = AB : AC$;

also $BA : AC = m : n$.

Algebraische Lösung. Wird der Durchmesser D E durch A gezogen, so kennt man H D = H E = r und A H = b, während A B = x und A C = y zu suchen sind. Da A B · A C =

$AD \cdot AE$ und $AB : AC = m : n$ ist, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$xy = (r - b)(r + b) = r^2 - b^2$$

$$\text{und } x : y = m : n.$$

Werden beide Gleichungen miteinander multiplicirt, so findet sich:

$$x^2 = \frac{m}{n}(r^2 - b^2) = \frac{m(r+b)(r-b)}{n}$$

$$\text{und } x = \sqrt{\frac{m}{n}(r^2 - b^2)} = \sqrt{\frac{m(r+b)(r-b)}{n}}.$$

Wird aber die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so ergibt sich

$$y^2 = \frac{(r^2 - b^2)\,n}{m} = \frac{(r+b)(r-b)\,n}{m},$$

$$\text{also } y = \sqrt{\frac{(r^2 - b^2)\,n}{m}} = \sqrt{\frac{(r+b)(r-b)\,n}{m}}.$$

Anmerkung. Weil $r - b = DA$ und $r + b = AE$ ist, so kann man auch setzen

$$x = \sqrt{m \cdot AD \cdot \frac{AE}{n}},$$

d. h. AB ist dann die mittlere Proportionale zwischen dem $m$fachen der Linie AD und dem $n$ten Theile der Linie AE. — Man kann aber auch, wie beim geometrischen Verfahren geschehen ist, eine Linie AF zeichnen, sodaß sich verhält

$$AD : AF = m : n.$$

Dann ist $\frac{AF}{AD} = \frac{n}{m}$, und der für y gefundene Ausdruck würde hiernach geschrieben werden können wie folgt:

$$y = \sqrt{AE \cdot AD \cdot \frac{AF}{AD}} = \sqrt{AE \cdot AF}.$$

Somit wäre AC wieder als mittlere Proportionale zwischen AE und AF gefunden.

123. Aufgabe. Es ist ein Kreis und außerhalb desselben ein Punkt A gegeben. Man soll von A aus eine Linie AC so ziehen, daß ein Theil derselben, nämlich BC, zur Sehne wird, während der andere Theil AB

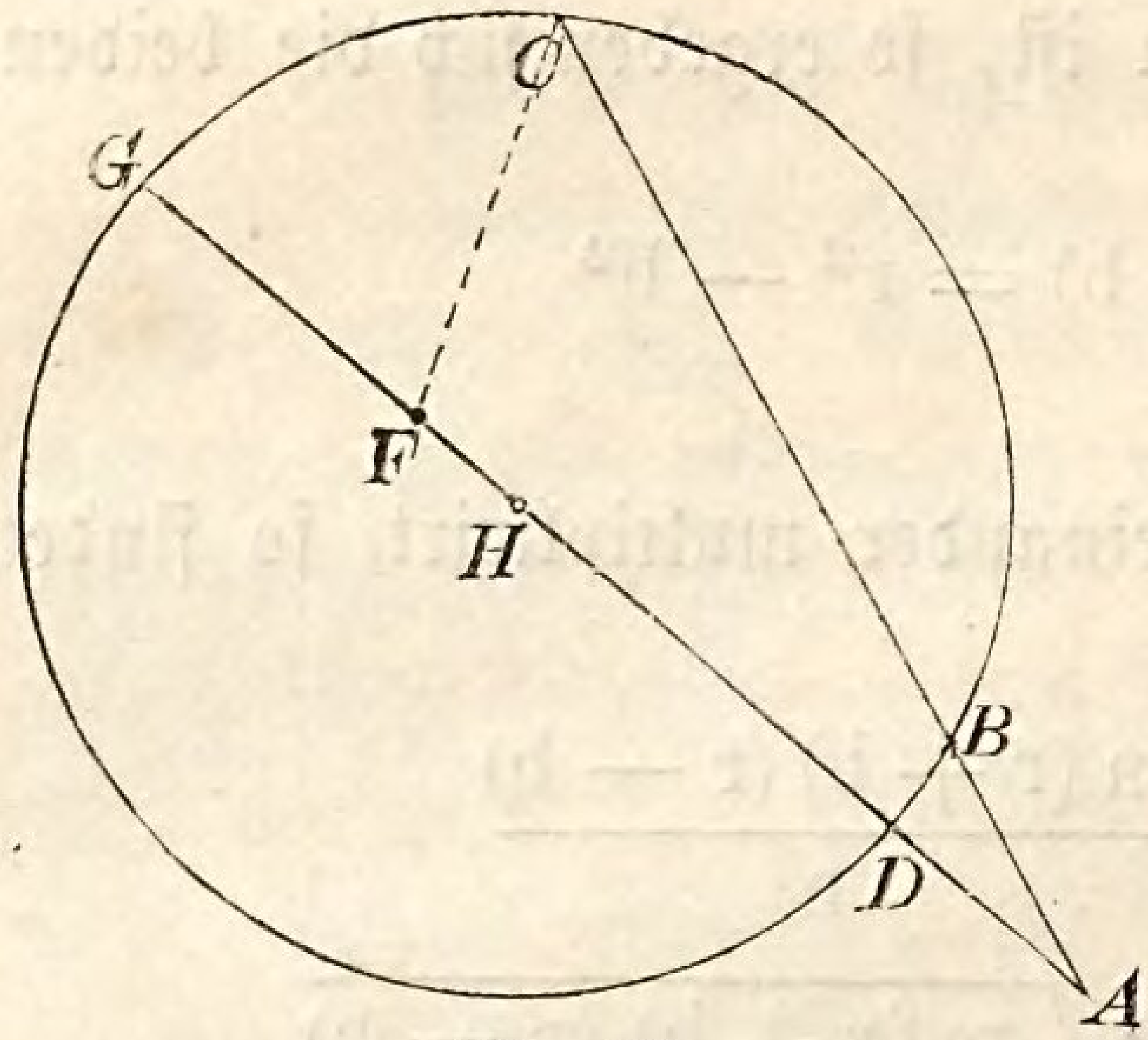


Fig. 89.

und die ganze Linie AC sich wie zwei gegebene Zahlen m und n verhalten. (Fig. 89.)

Auflösung. Wird der Punkt A mit dem Mittelpunkte des Kreises verbunden und die Verbindungslinie bis zur Peripherie verlängert, so erhalten wir A G, von welcher das Stück D A außerhalb des Kreises liegt. Wird hierzu noch A C gedacht, deren Theil AB außerhalb der Kreisfläche liegt, so kann wieder die umgekehrte Proportionalität der Stücke der Sehnen, die sich diesmal außerhalb des Kreises schneiden, benutzt werden.

Demnach ist $AC \cdot AB = AG \cdot AD$;

während $AB : AC = m : n$ gegeben ist.

Da A G und A D bekannt sind, so läßt sich A B und A C hieraus finden.

Bezeichnen wir nämlich A D mit b, so ist $AG = b + 2r$. Die zu suchenden Linien A B und A C seien bezüglich x und $x + y$, dann wären obige beiden Gleichungen folgendermaßen zu schreiben:

$$(x + y)\, x = (2r + b)\, b$$

und $x : x + y = m : n$.

Durch Multiplication beider Gleichungen ergibt sich

$$x^2 = \frac{(2r + b)\, b\, m}{n}$$

$$AB \text{ oder } x = \sqrt{\frac{b\,(2r + b)\, m}{n}};$$

durch die entsprechende Division aber findet sich

$$(x + y)^2 = \frac{b\,(2r + b)\, n}{m}$$

$$AC \text{ oder } x + y = \sqrt{\frac{b\,(2r + b)\, n}{m}}.$$

Anmerkung. Sucht man eine Linie A F so, daß

$$AD : AF = m : n$$

sich verhält, so ist

$$\frac{n}{m} = \frac{A\,F}{A\,D}.$$

Demnach könnte der vorhin gefundene Werth für A C oder (x + y) auch so ausgedrückt werden:

$$A\,C = \sqrt{A\,D \cdot A\,G \cdot \frac{A\,F}{A\,D}} = \sqrt{A\,G \cdot A\,F},$$

und wäre also A C die mittlere Proportionale zwischen A G und A F.

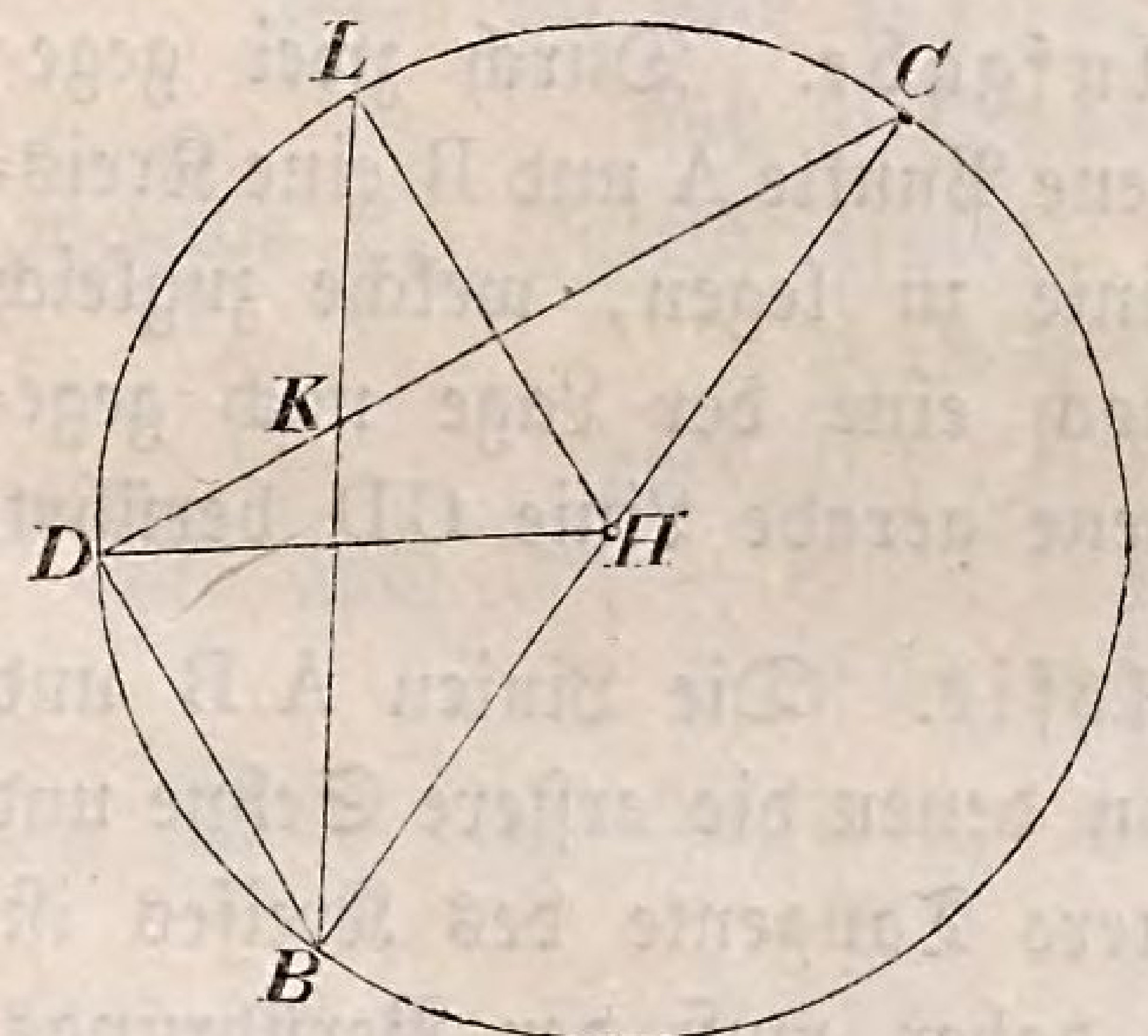


Fig. 90.

124. Aufgabe. Es sind gegeben eine Kreislinie und zwei Punkte C und D in derselben; man soll einen Punkt B in der Peripherie so finden, daß die Verbindungslinien C B und D B sich wie zwei gegebene Zahlen m und n verhalten.

Analysis. Es sei Punkt B der verlangte, und demzufolge C B : D B = m : n. Verbindet man nun C mit D, und D mit dem Kreismittelpunkt H, so ergibt sich der Peripheriewinkel C B D, der den Bogen C D umspannt. Der hierzugehörige Centriwinkel ist C H D. Denkt man sich jetzt die gegebene Linie C D in K so getheilt, daß C K : K D = m : n ist, so verhält sich, wegen des gleichen Verhältnisses m : n,

C B : D B = C K : D K
oder C B : C K = D B : B K.

Es ist also Winkel B D K = Winkel K C B (oder D C B) in den ähnlichen Dreiecken B D K und B C K; ferner ist Winkel D K B = Winkel C K B; also schließlich Winkel D B K = Winkel C B K, d. h. Winkel D B C ist durch die Linie K B halbirt, welche zugleich die gegebene Linie C D nach dem gegebenen Verhältniß m : n theilt. Wird B K über K hinaus bis zum Punkt L in der Peripherie verlängert, und L mit H, dem Centrum des Kreises, verbunden, so ist der Centriwinkel C H D durch die Linie L H halbirt. Es sind demnach nun die Punkte L und K bekannt und folglich auch der verlangte Punkt B, in welchem die Peripherie durch die verlängerte L K geschnitten wird.

Construction. Man ziehe C D und C H, halbire den Centriwinkel D H C durch die Linie H L und theile die C D so, daß sich verhält C K : K D = m : n. Alsdann verbinde man Punkt L mit dem Theilungspunkt K, verlängere L K bis zur Peripherie in B, und ziehe zuletzt noch B D, so hat man

C B : D B = m : n.

Der Beweis ist in der Analysis enthalten.

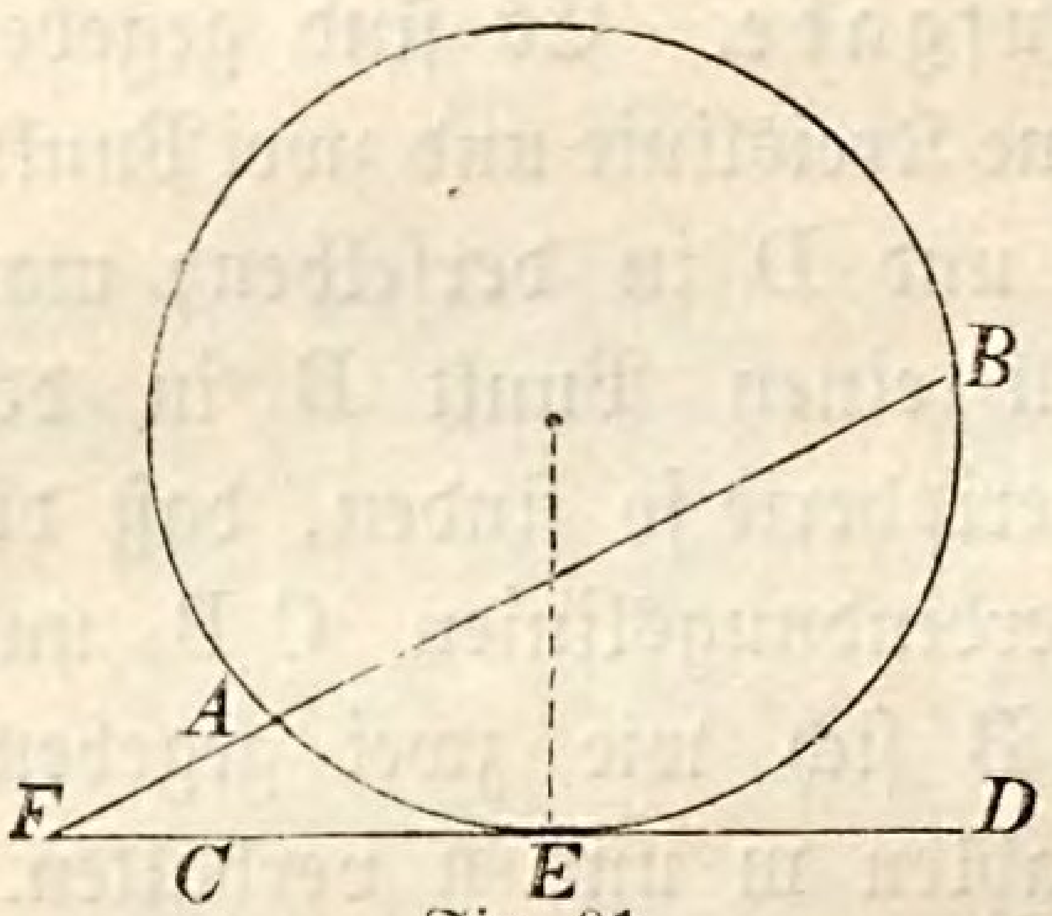


Fig. 91.

125. Aufgabe. Durch zwei gegebene Punkte A und B eine Kreislinie zu legen, welche zugleich noch eine der Lage nach gegebene gerade Linie CD berührt.

Analysis. Die Linien A B und CD, von denen die erstere Sehne und die letztere Tangente des Kreises ist, schneiden sich in einem Punkt F; daher muß der Berührungspunkt E in der C D so liegen, daß $FE^2 = FA \cdot FB$, oder daß F E die mittlere Proportionale zwischen F A und F B wird.

Construction. Man verbinde A mit B und verlängere A B und C D bis zum Zusammentreffen in F. Alsdann suche man die mittlere Proportionale zu A F und B F, und schneide sie von F aus auf der Linie CF ab, so findet sich der dritte Punkt E, durch welchen die verlangte Kreislinie (nach Nr. 37) gelegt werden muß.

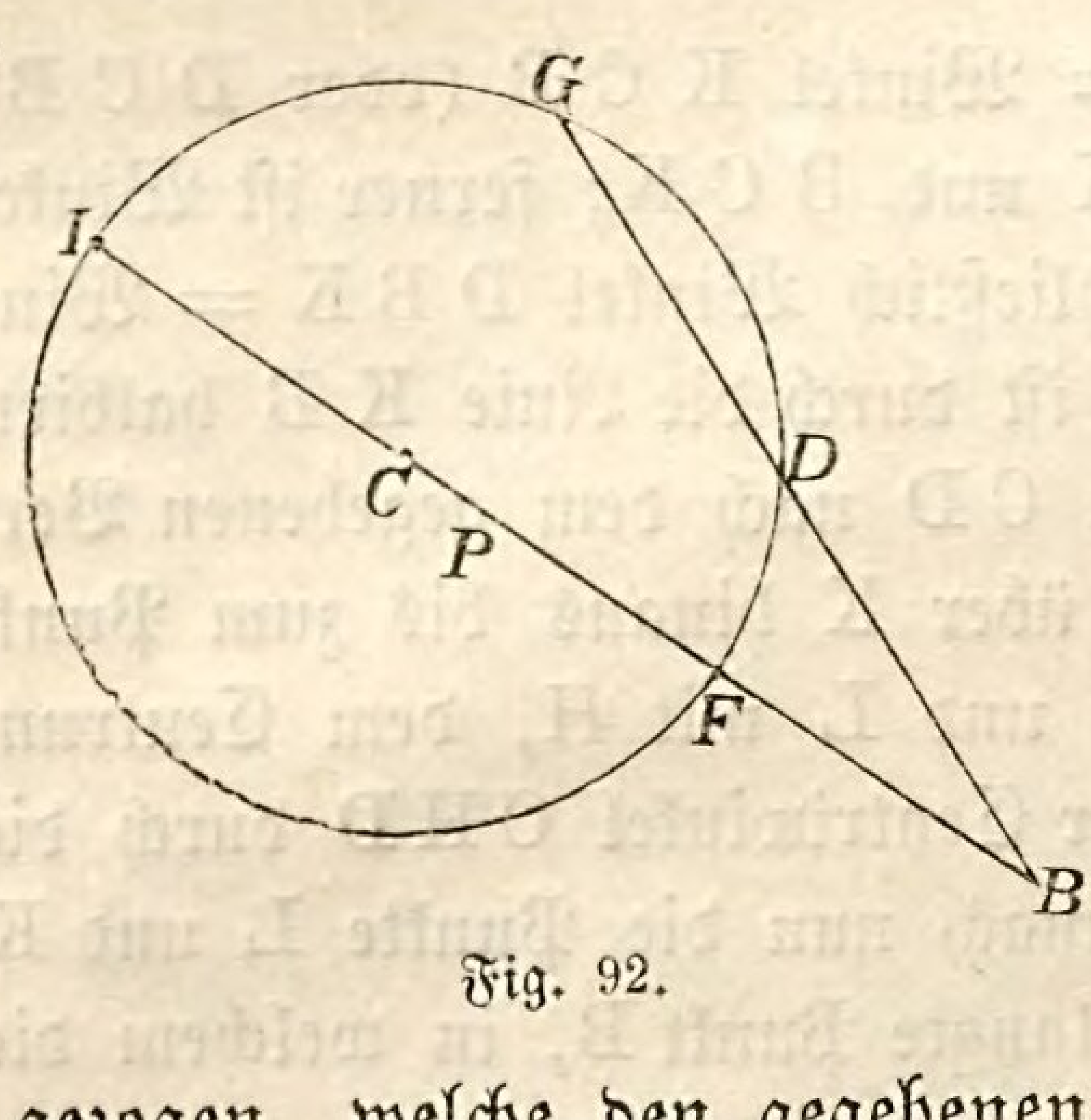


Fig. 92.

126. Aufgabe. Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt B aus eine gerade Linie B G so zu ziehen, daß das Rechteck aus dem außerhalb des Kreises liegenden Stück B D und der Sehne D G einen gegebenen Inhalt habe.

Lösung. Wird die Linie B I gezogen, welche den gegebenen Punkt B mit dem Mittelpunkt C

des gegebenen Kreises verbindet, so ist B F = b, und B I = (2 r + b) bekannt. Denkt man sich nun die verlangte Linie B G gezogen und B P so bestimmt, daß der gegebene Inhalt des Rechtecks aus den beiden Theilen der B G, nämlich

$$BD \cdot DG = BF \cdot BP \text{ ist,}$$

so findet auch noch folgende Gleichung statt:

$$BD \cdot BG = BF \cdot BI.$$

Man hat also $BI : BG = BD : BF$

und $BP : DG = BD : BF$,

woraus sich sogleich ergibt:

$$BI : BG = BP : DG,$$

oder $BI : BP = BG : DG$,

also auch $BI - BP : BP = BG - DG : DG$,

d. h. $PI : PB = BD : DG$.

Wird diese Gleichung mit der oben gefundenen:

$$BF \cdot PB = BD \cdot DG$$

multiplicirt, so ergibt sich

$$BD^2 = PI \cdot BF.$$

Demnach ist B D die mittlere Proportionale zwischen B F und P I. Wenn man also von B aus mit einer Zirkelöffnung = B D die Kreislinie schneidet, so ist der Punkt D bekannt, durch welchen die verlangte Linie B G von B aus gelegt werden muß.

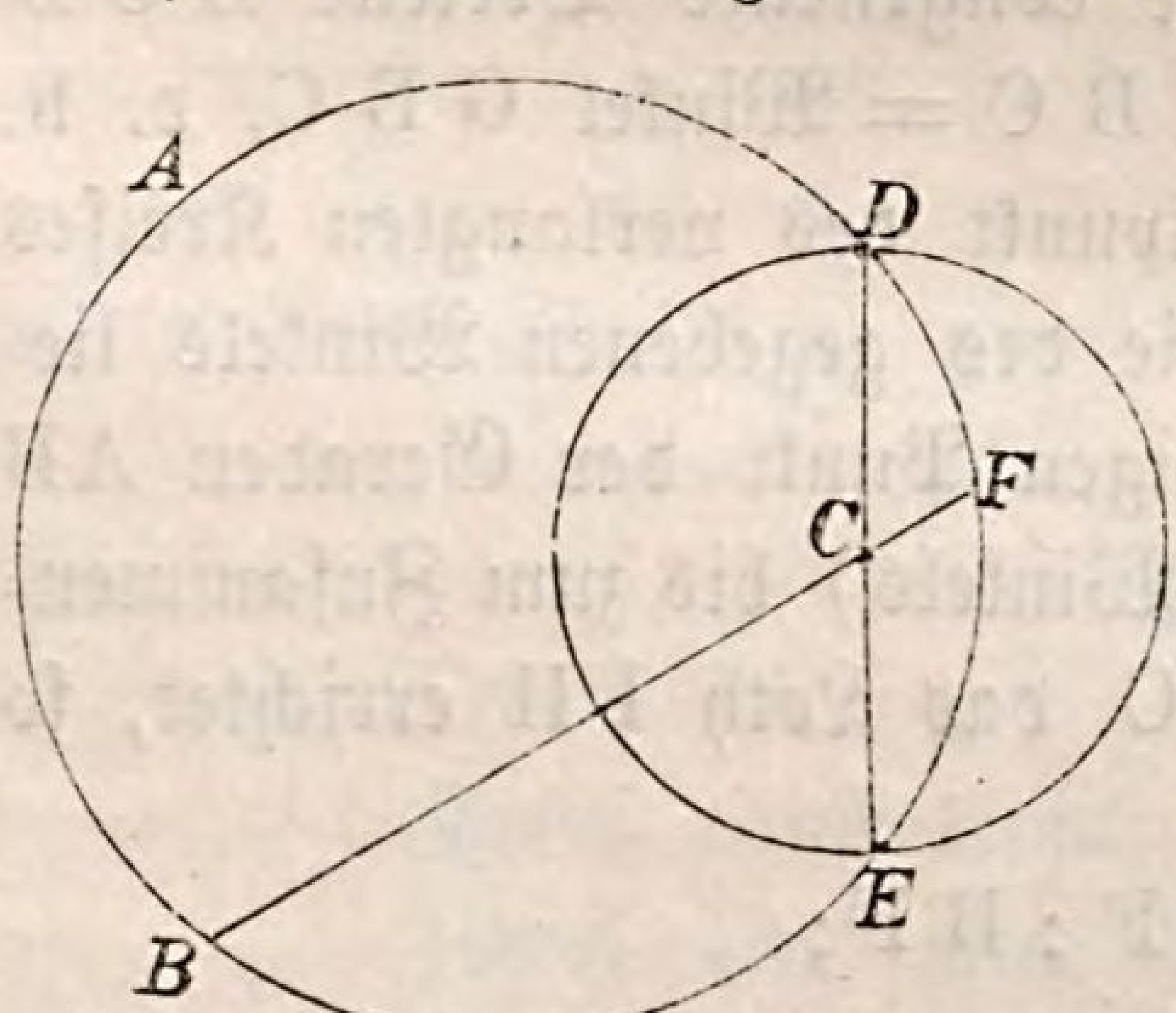


Fig. 93.

127. Aufgabe. Durch zwei gegebene Punkte A und B eine Kreislinie so zu legen, daß dadurch eine andere gegebene Kreislinie halbirt wird.

Lösung. Wenn C den Mittelpunkt des gegebenen Kreises vorstellt, so ist auch die Linie B C bekannt, welche B und C miteinander verbindet. Wird diese Linie B C so weit verlängert gedacht, daß sie die gesuchte Kreislinie in F schneidet, so ergibt sich

$$BC \cdot CF = EC \cdot CD;$$

und weil E C = C D (als Radien des gegebenen Kreises), so ist

$$BC \cdot CF = CE^2.$$

In diesem Ausdruck kommt nur eine Unbekannte C F vor. Es ist aber $CF = \frac{CE^2}{BC}$, d. h. die dritte Proportionale zu B C und dem Radius C E, und muß demnach C F der Proportion

$$BC : CE = CE : CF$$

entsprechen. Wird also um diese Proportionale C F die Gerade B C über C hinaus verlängert, so ist der Punkt F gefunden, als dritter Punkt der gesuchten Kreislinie.

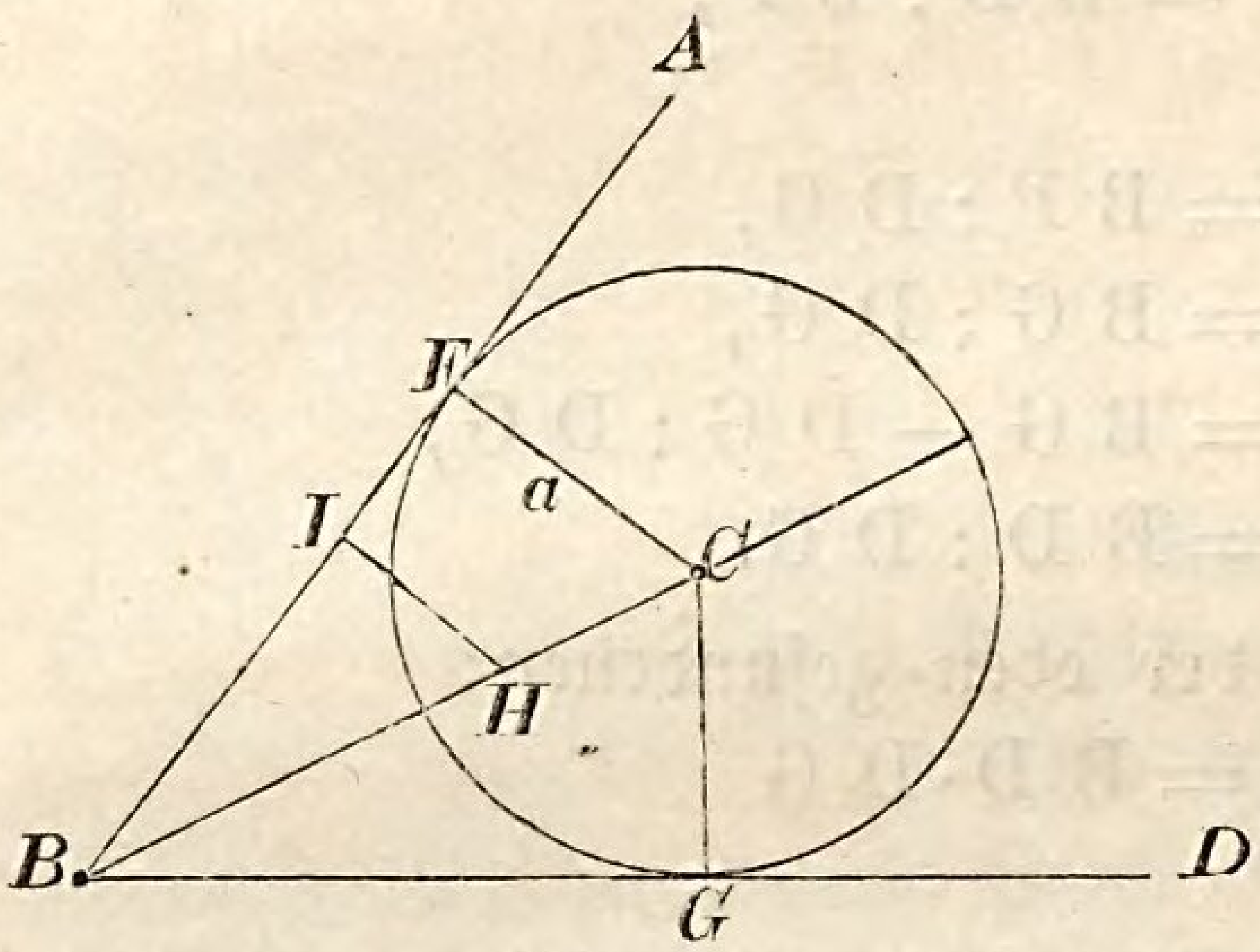


Fig. 94.

128. Aufgabe. Einen Kreis von gegebenem Halbmesser so zu zeichnen, daß er die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt.

Analysis. Angenommen, der Kreis um C sei der verlangte und berühre die Schenkel A B und B D des gegebenen Winkels B in den Punkten F und G. Zieht man die Radien C G und C F, so wie die Verbindungslinie B C, so ergeben sich, weil B C = B C und F C = C G ist, so wie Winkel B F C = B G C als Rechter, zwei congruente Dreiecke B C F und B C G. Es ist also Winkel F B C = Winkel G B C, d. h. Winkel B ist halbirt. Der Mittelpunkt des verlangten Kreises muß demnach in der Halbirungslinie des gegebenen Winkels liegen. — Wird nun in einem beliebigen Punkt der Geraden AB (des einen Schenkels des gegebenen Winkels) bis zum Zusammentreffen mit der Halbirungslinie B C das Loth I H errichtet, so verhält sich

$$HI : BI = BF : BF;$$

und ist demnach B F die vierte Proportionale zu den drei bekannten Linien H I, B I und C F. Es ist daher die Länge von B F und also auch Punkt F bekannt, auf dem man ein Loth errichtet, in dessen Durchschnitt mit der Halbirungslinie der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt.

Construction. Man halbire Winkel A B D, errichte auf

einem beliebigen Punkt von A B ein Loth I H bis zum Zusammentreffen mit B C, suche zu I H, B I und dem gegebenen Halbmesser (C F = a) die vierte Proportionale, trage dieselbe von B aus auf A B ab (bis F), errichte in F ein Loth bis zur B C, so ist F C der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis. Es ist $BI : IH = BF : FC$,
aber auch $BI : IH = BF : a$;
folglich $FC = a$.

Zieht man CG senkrecht auf BD, so ist $\triangle BFC \cong \triangle BCG$ und deshalb

$$FC = CG.$$

Mithin berührt der Kreis um C die Schenkel A B und B D in den Punkten F und G.

129. Aufgabe. Es ist ein Rechter A C B und in einem seiner Schenkel ein Punkt D gegeben; man soll einen

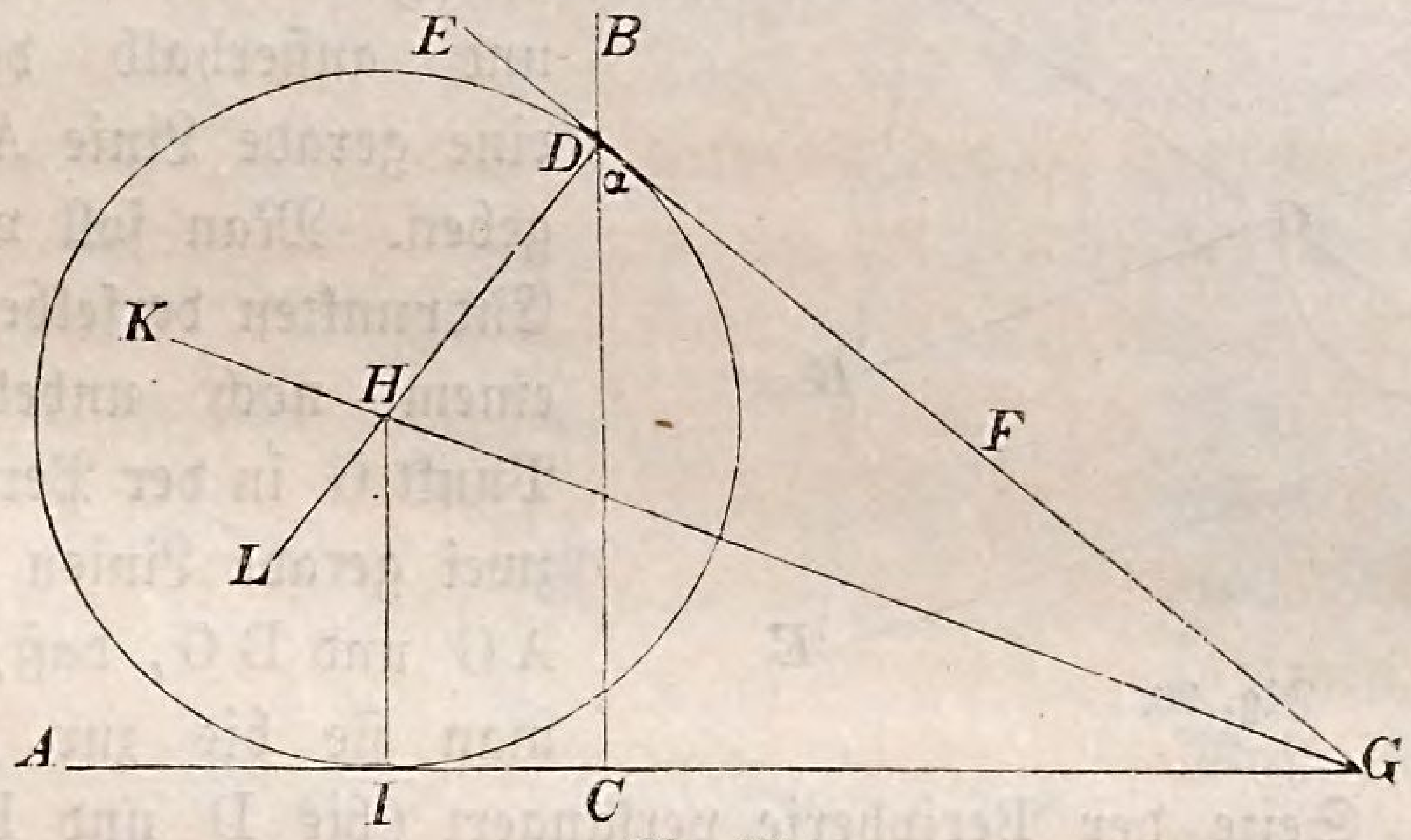


Fig. 95.

Kreis construiren, dessen Peripherie durch D geht, sodaß eine nach diesem Durchschnitt gezogene Tangente mit dem Schenkel C B einen gegebenen Winkel α bildet, der andere Schenkel A C aber vom Kreise berührt wird.

Analysis. Angenommen, der Kreis um H sei der verlangte, welcher den Schenkel AC in I und die Linie EF berührt, welche durch Punkt D unter dem Winkel α gezogen ist. Ver-

längert man A C und E F bis zu ihrem Durchschnittspunkt G, und zieht man noch G H, so wird dadurch der Winkel G halbirt. Es liegt daher das Centrum des gesuchten Kreises

1. in der Halbirungslinie des durch die beiden Tangenten entstandenen Winkels G.
2. in der Senkrechten, die man im gegebenen Punkt D auf E F errichtet hat.

Construction. Man verlängere A C und E F bis zum Durchschnitt, halbire Winkel G, errichte in D ein Loth D L, so ist der Durchschnittspunkt von G K und D L Mittelpunkt, und der mit H D um H beschriebene Kreis berührt auch A C.

Beweis. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke D G H und H G I folgt, daß D H = H I ist; während noch (per constr.) die Tangente G D mit C B in D den gegebenen Winkel α bildet.

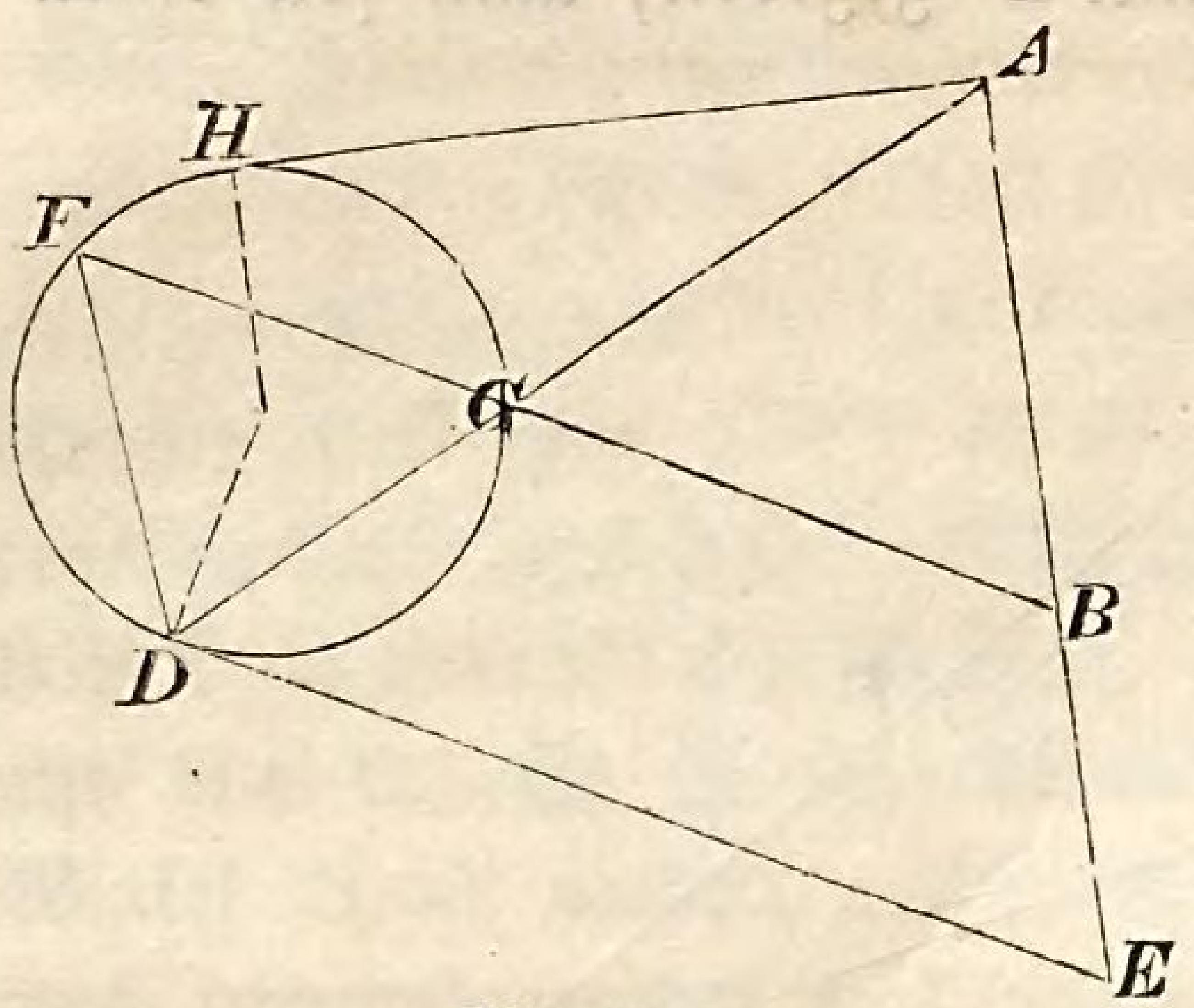


Fig. 96.

130. Aufgabe. Es ist ein Kreis und außerhalb desselben eine gerade Linie A B gegeben. Man soll von den Endpunkten derselben nach einem noch unbekannten Punkt G in der Peripherie zwei gerade Linien ziehen, A G und B G, daß, wenn man sie bis zur andern Seite der Peripherie verlängert (bis D und F) und ihre Endpunkte verbindet, diese Verbindungslinie F D mit A B parallel sei.

Analysis. Angenommen, es sei D F || A B und daher auch Winkel A B F = Winkel B F D. Wird im Punkt D eine Tangente D E errichtet und diese so weit verlängert, bis sie die verlängerte Gerade A B in E schneidet, so ist Winkel A D E = Winkel B F D = Winkel A B F. Folglich hat man

Winkel A B F + Winkel E B F = Winkel A D E + Winkel E B F
= 2 R. oder 180°.

Demgemäß ist $B E D G$ ein Viereck im Kreise und ergibt sich daraus

$$AD \cdot AG = AE \cdot AB.$$

Ziehen wir nun Tangente AH an den Kreis, so findet sich

$$AH^2 = AD \cdot AG,$$

also auch $AH^2 = AB \cdot AE.$

Demnach ist $AE = \dfrac{AH^2}{AB}$

oder die dritte Proportionale zu AB und AH.

Construction. Man ziehe von A eine Tangente AH an den Kreis, suche zu AB und AH die dritte Proportionale $= AE$, ziehe von E eine Tangente an den Kreis, verbinde den Berührungspunkt D mit A, und den Durchschnittspunkt G mit B, verlängere BG bis F, so ist,

da $AH^2 = AB \cdot AE = AG \cdot AD$,

$B E D G$ ein Viereck im Kreise, folglich Winkel ABH = Winkel GDE = Winkel BFD, und deshalb $AB \parallel FD$.

131. Aufgabe. Es ist gegeben das Stück der Centrallinie, $BF = a$, der Radius des Kreises $= r$; man soll eine Linie BG so ziehen, daß das Maß von DG einer gegebenen Zahl b gleich werde.

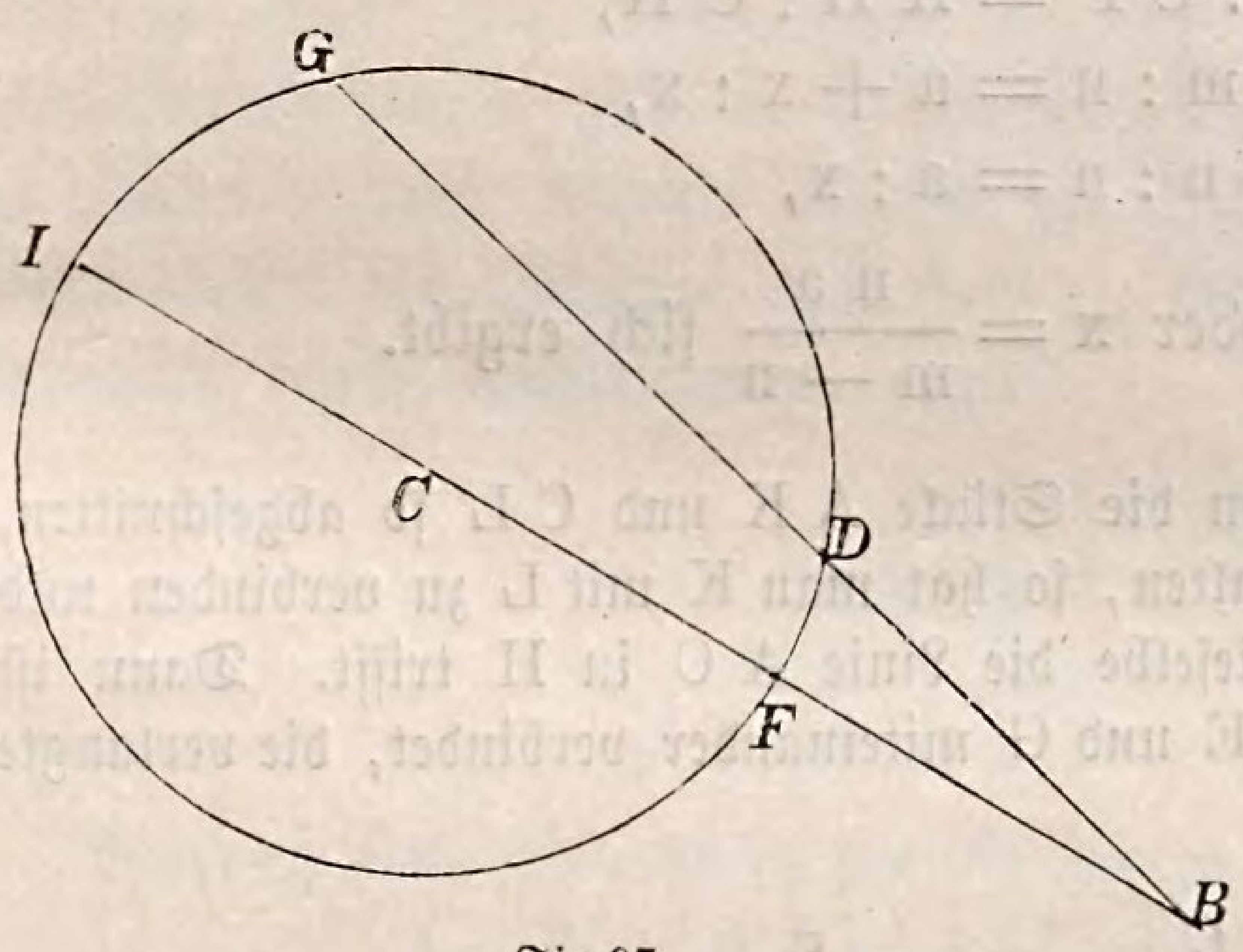


Fig. 97.

Lösung. Wird $BD = x$ gesetzt, so ist $BG = b + x$ und $BI = a + 2r$. Da aber

$$BF \cdot BI = BD \cdot BG$$

ist, so findet sich nun auch

$$x(b + x) = a(a + 2r)$$

oder $x^2 + bx = a^2 + 2ar$,

woraus sich ergibt $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{a(a + 2r) + \frac{1}{4}b^2}$.

Anmerkung. Um die Lage der nun bekannten Linie B D, also auch der Linie B G, zu bestimmen, schneide man mit einer Zirkelöffnung = B D, oder = B G, von B aus den Kreis, wodurch die Punkte D und G gefunden werden.

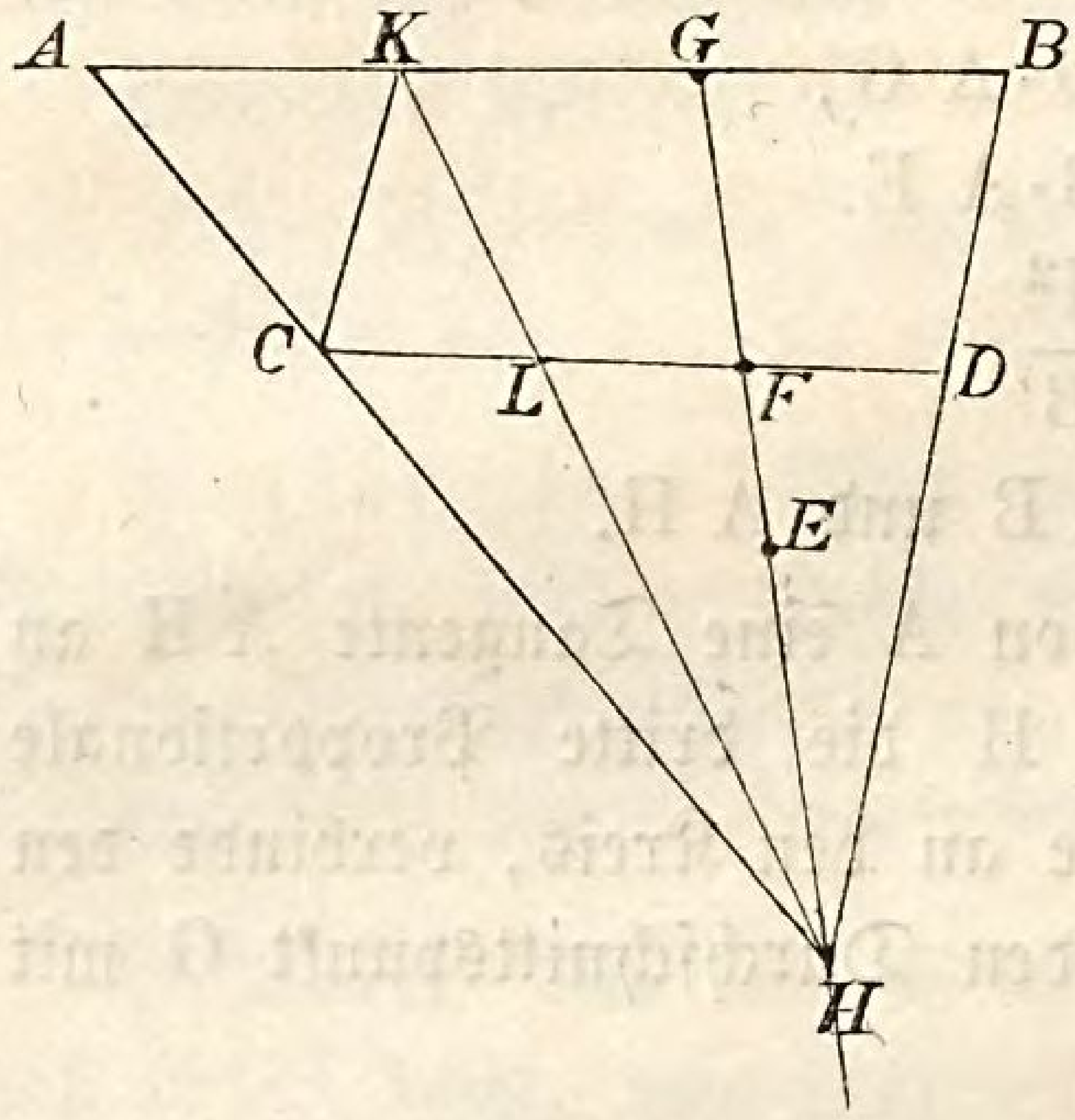


Fig. 98.

132. Aufgabe. In zwei Parallelen A B und C D sind zwei Punkte A und C gegeben; man soll durch einen dritten gegebenen Punkt E eine Linie HG so ziehen, daß AG und CF zueinander sich verhalten wie zwei gegebene Zahlen m und n.

Lösung. Es ist A C = a gegeben, während H C = x gesucht werden muß. Zufolge der Aehnlichkeit der Dreiecke H A G und H C F hat man die Proportion

$$AG : CF = AH : CH,$$

oder $m : n = a + x : x$,

woraus $m - n : n = a : x$,

oder $x = \dfrac{na}{m - n}$ sich ergibt.

Anmerkung. Werden die Stücke A K und C L so abgeschnitten, daß sie sich wie m : n verhalten, so hat man K mit L zu verbinden und K L zu verlängern, bis dieselbe die Linie A C in H trifft. Dann ist HG, welche die Punkte H, E und G miteinander verbindet, die verlangte Linie.

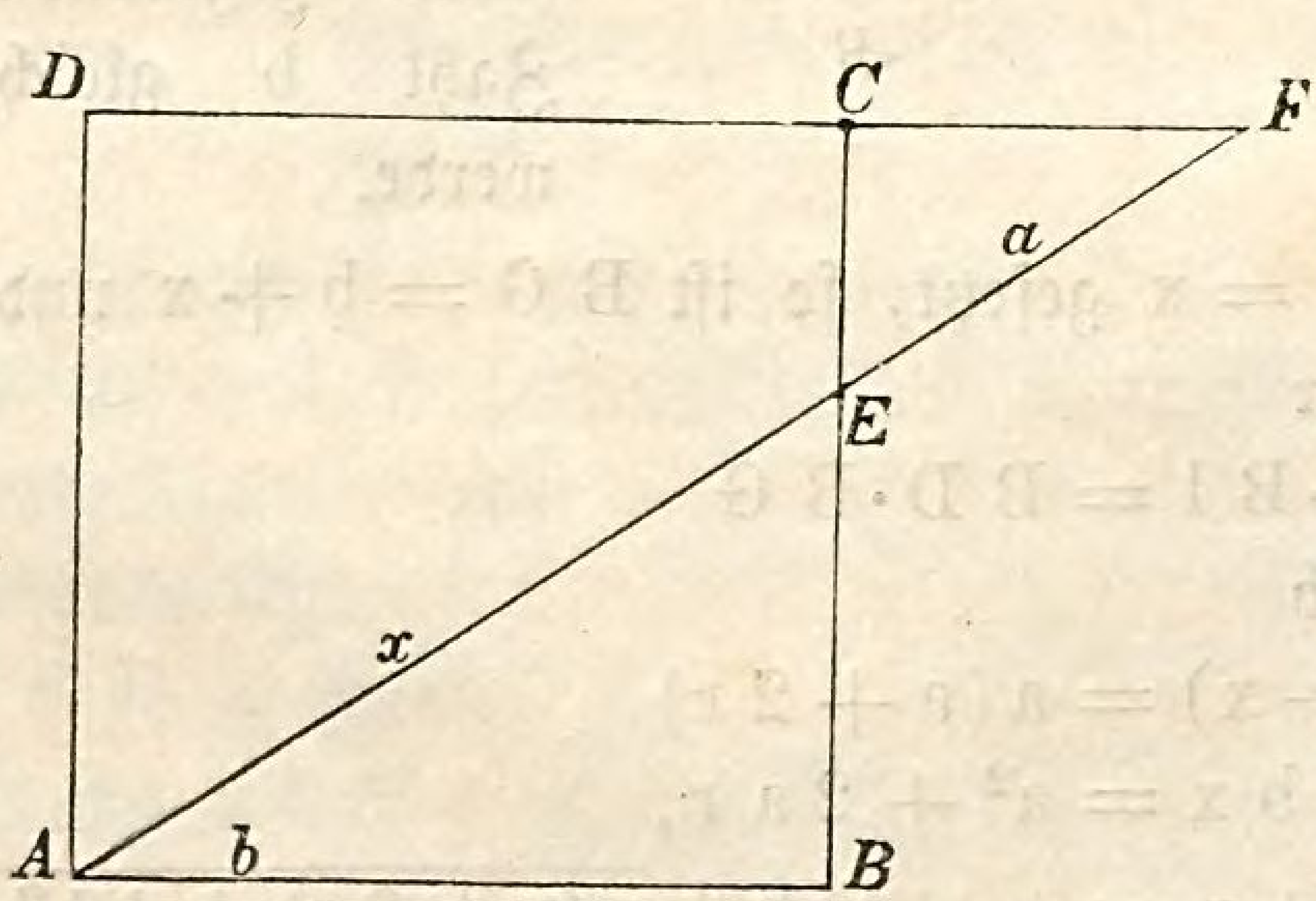


Fig. 99.

Oder man macht AB = m und BK = n, sodaß AK = m — n wird. Zieht man nun KC und durch B mit CK die Parallele BH, welche mit der verlängerten AC in H zusammentrifft, so ist dieser Punkt derjenige, von welchem aus die Linie HG durch E gelegt werden muß.

133. Aufgabe. Man soll von der Ecke A eines gegebenen Quadrats A B C D eine Linie A F so ziehen, daß das Stück derselben, E F, zwischen den beiden Punkten, in welchen diese Linie die Richtungen der Seiten C D und B C trifft, einer gegebenen Linie a gleich werde.

Lösung. Da die Dreiecke A D F und A B E einander ähnlich sind, so ist (in Fig. 99):

$$AF : AD = AE : BE.$$

Wenn die Seite des Quadrats $= b$ gegeben und $AE = x$, sowie $AF = y$ ist, so ist $BE = \sqrt{x^2 - b^2}$; und hat man daher

$$\text{I.} \quad y : b = x : \sqrt{x^2 - b^2}$$

$$\text{oder } y^2 : b^2 = x^2 : x^2 - b^2,$$

$$\text{oder } x^2 y^2 - b^2 y^2 = b^2 x^2,$$

$$\text{oder II.} \quad x^2 y^2 = b^2 (x^2 + y^2) = (x y)^2.$$

Außerdem kennt man $EF = AF - AE$,

$$\text{d. i. III.} \quad a = y - x.$$

Die Form der Gleichungen II und III bestimmt uns statt der Unbekannten x und y, lieber ihre Summe und ihre Differenz zu suchen. Wir kennen bereits die Differenz $y - x = a$ und setzen daher die Summe $y + x = s$, sodaß sich durch Addition, bezüglich durch Subtraction, ergibt:

$$y = \tfrac{1}{2}(s + a),$$

$$x = \tfrac{1}{2}(s - a),$$

$$x y = \tfrac{1}{4}(s^2 - a^2),$$

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(s^2 + a^2).$$

Werden diese Werthe in die Gleichung II gesetzt, so erhält man

$$\tfrac{1}{16}(s^2 - a^2)^2 = \tfrac{1}{2} b^2 (s^2 + a^2)$$

$$\text{oder } s^4 - 2(a^2 + 4b^2) s^2 = 8 a^2 b^2 - a^4,$$

$$\text{woraus } s = \pm \sqrt{a^2 + 4b^2 \pm \sqrt{16 a^2 b^2 + 16 b^4}}$$

$$\text{oder } s = \pm \sqrt{a^2 + 4b^2 \pm 4b\sqrt{a^2 + b^2}}).$$

Anmerkung. Weil $s = x + y = AE + AF$ ist, also positiv sein muß, so darf von den beiden Zeichen zu Anfange der Formel nur das + Zeichen genommen werden. Ferner muß aber auch $s^2 - a^2$ oder $4b(b \pm \sqrt{a^2 + b^2})$ positiv werden, folglich darf man auch hier von dem

(—) Zeichen keinen Gebrauch machen; und ist demnach

$$s = + \sqrt{a^2 + 4b^2 + 4b\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\text{also } x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + 4b^2 + 4b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{und } y = +\tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + 4b^2 + 4b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

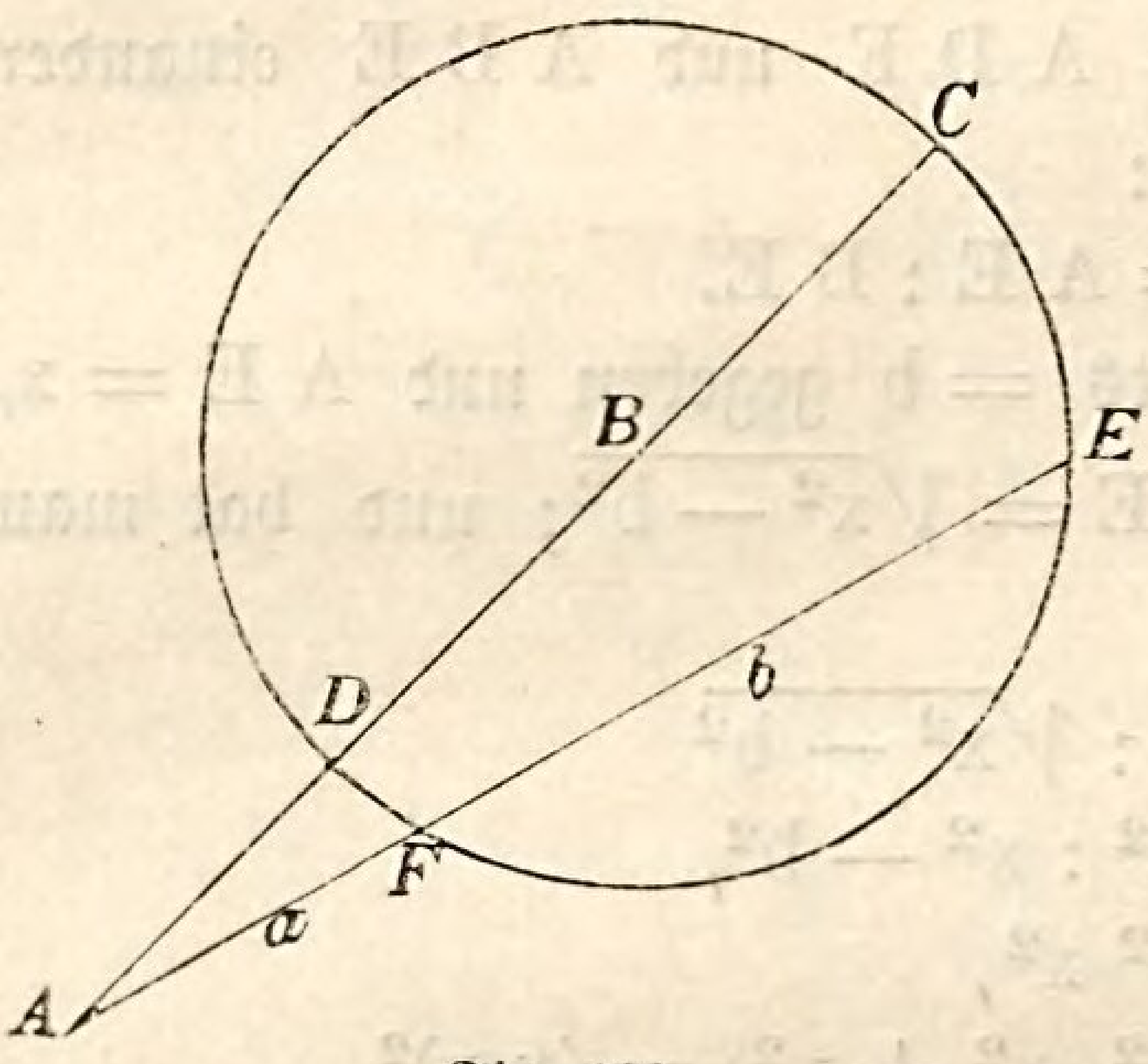


Fig. 100.

134. Aufgabe. Es sind zwei begrenzte Linien a und b gegeben, so wie zwei Punkte A und B; man soll um B einen Kreis construiren, und an denselben von A aus eine Secante AE dergestalt legen, daß das außerhalb liegende Stück derselben, nämlich A F = a, das innerhalb liegende F E = b werde.

Auflösung. Angenommen, die Figur wäre bereits der Aufgabe gemäß gezeichnet, also daß A C die verlangte Secante vorstellte; dann ist B C oder B D der Radius des zu construirenden Kreises. Wenn A B die gegebene Entfernung der beiden Punkte A und B = c ist, so hat man nur noch den Radius B C oder B D = x zu bestimmen. Hieraus ergibt sich aber A D = c — x, und A C = c + x, sodaß man hat

$$AF \cdot AE = AD \cdot AC,$$

$$\text{oder } a(a + b) = (c - x)(c + x) = c^2 - x^2;$$

$$\text{folglich } x^2 = c^2 - (a + b)a$$

$$\text{und } x = \sqrt{c^2 - a(a + b)}.$$

135. Aufgabe. Es ist ein Kreis gegeben (Radius = r) und eine gerade Linie A B ihrer Lage nach. Man soll in einem zu bestimmenden Punkt E der Geraden A B einen Perpendikel E F errichten, der den Kreis so schneidet, daß die entstandene Sehne F G zu G E, dem untern Abschnitt des Perpendikels E F, ein bestimmtes Verhältniß n : m habe.

Auflösung. Es sei E F der verlangte Perpendikel und

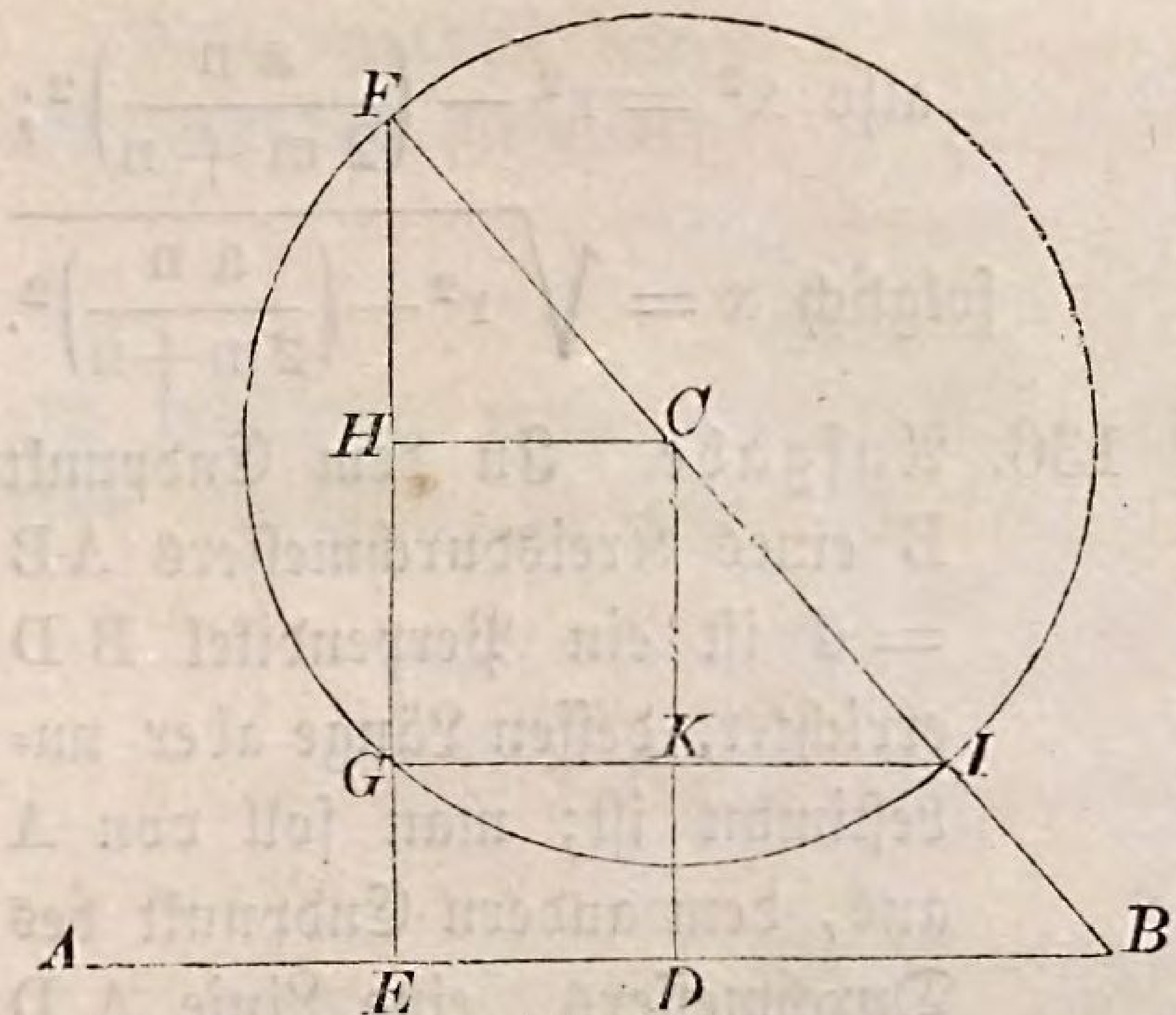


Fig. 101.

demnach $FG : GE = n : m$. Der Abstand des Kreismittelpunktes C von A B ist bekannt, nämlich $CD = a$. Nun ist nur noch $CD = x$, d. h. der Abstand der beiden Senkrechten E F und D C zu suchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir den Durchmesser F C I und verlängern ihn bis B, wo er die AB oder deren Verlängerung trifft. Wird ferner aus dem Punkt I in der Peripherie $IKG \parallel AB$ und aus C, dem Kreismittelpunkt, $CH \parallel IG$ bis auf EF gezogen, so entstehen die rechtwinkeligen Dreiecke F H C, F G I und C D B. Da das Verhältniß von F G und G E gegeben ist, so haben wir nun nach Ausdrücken für diese Linien zu suchen. Es ist aber $FH^2 = FC^2 - HC^2$, also $FH = \sqrt{r^2 - x^2}$, und $FG^2 = FI^2 - GI^2$, daher $FG = \sqrt{(2r)^2 - (2x)^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Nun ist $FG = CD = HE = a$, und $HG = FH$, folglich $HE - FH$ oder $EG = a - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Es verhält sich also

$$FG : GE = n : m,$$

oder $2\sqrt{r^2 - x^2} : a - \sqrt{r^2 - x^2} = n : m$.

Multiplicirt man das zweite und vierte Glied dieser Proportion mit 2, so findet sich

$$2\sqrt{r^2 - x^2} : 2a - 2\sqrt{r^2 - x^2} = n : 2m,$$

$$\text{oder } 2a : 2a - 2\sqrt{r^2 - x^2} = n + 2m : 2m,$$

$$\text{oder } a : \quad a - \sqrt{r^2 - x^2} = n + 2m : 2m.$$

Daraus ergibt sich $\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{an}{2m + n}$,

$$\text{oder } r^2 - x^2 = \left(\frac{an}{2m + n}\right)^2,$$

$$\text{also } x^2 = r^2 - \left(\frac{a\,n}{2\,m + n}\right)^2;$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a\,n}{2\,m + n}\right)^2}.$$

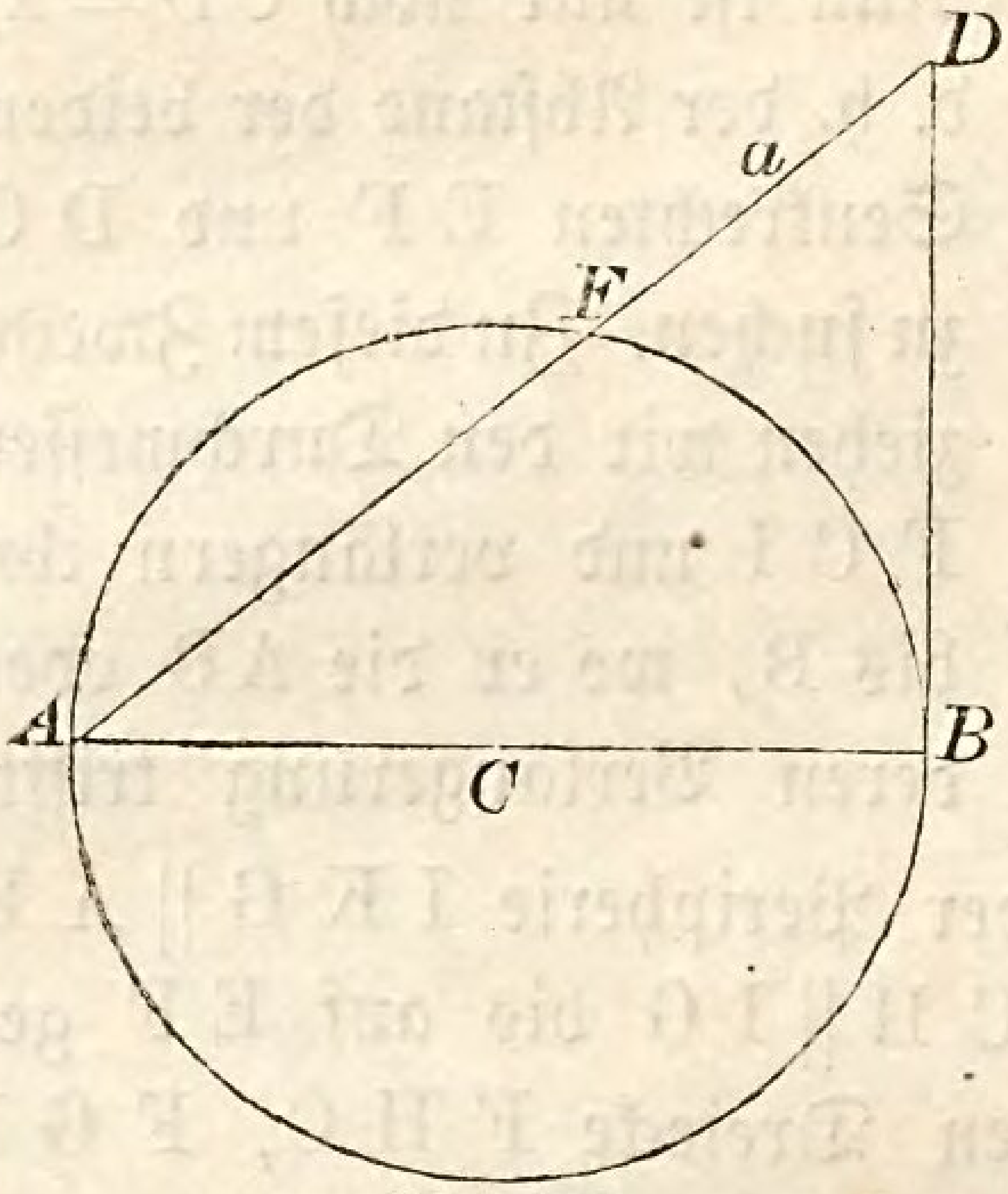


Fig. 102.

136. Aufgabe. In dem Endpunkt B eines Kreisdurchmessers AB $= d$ ist ein Perpendikel B D errichtet, dessen Länge aber unbestimmt ist; man soll von A aus, dem andern Endpunkt des Durchmessers, eine Linie A D ziehen, welche durch den Perpendikel begrenzt und von der Kreislinie in F nach einem gegebenen Verhältniß geschnitten wird $(p : q)$.

Auflösung. Es sei $A F = x$, $F D = z$ und $B D = y$; dann findet sich

I. $x : z = p : q$; II. $(x + z)\,z = y^2$; III. $(x + z)^2 = y^2 + d^2$.

Mit Hülfe dieser drei Gleichungen müssen die drei Unbekannten gefunden werden.

$$\text{Aus I. ergibt sich IV. } x = \frac{p\,z}{q},$$

$$\text{und aus II. V. } x = \frac{y^2 - z^2}{z}.$$

$$\text{Aus IV. und V. folgt VI. } x = \frac{p\,z}{q} = \frac{y^2 - z^2}{z},$$

$$\text{oder } p\,z^2 = q\,y^2 - q\,z^2;$$

$$\text{d. i. } (p + q)\,z^2 = q\,y^2;$$

$$\text{folglich } \frac{(p + q)}{q} z^2 = y^2.$$

Wird jetzt der in II. gegebene Werth für y^2 gesetzt, so hat man

$$\text{VII. } \frac{(p + q)}{q} z^2 = (x + z)\,z,$$

$$\text{oder } \frac{(p + q)}{q} z = x + z.$$

Nun quadrire man den hier für $(x+z)$ gefundenen Werth und setze das Resultat in die Gleichung III., so ergibt sich

$$\frac{(p+q)^2 \cdot z^2}{q^2} = y^2 + d^2;$$

und substituirt man den bei VI. gefundenen Werth von y^2 in diese Gleichung, so findet sich

$$\text{VIII. } \frac{(p+q)^2 \cdot z^2}{q^2} = \frac{(p+q)z^2}{q} + d^2,$$

$$\text{oder } (p^2 + p\,q)\,z^2 = d^2 q^2;$$

$$\text{also } z^2 = \frac{d^2 q^2}{p^2 + p\,q};$$

$$\text{folglich IX. } z = d\,q \sqrt{\frac{1}{p\,(p+q)}}.$$

Aus den Gleichungen IV. und IX. folgt

$$x = \frac{p}{q} \cdot d\,q \sqrt{\frac{1}{p\,(p+q)}} = p\,d \sqrt{\frac{1}{p\,(p+q)}},$$

$$\text{d. i. X. } x = d \sqrt{\cdot \frac{p}{p+q}}.$$

Nun ist nur noch der Werth von y zu finden. Da nach Gleichung VI. $y^2 = \left(\frac{p+q}{q}\right) z^2$ ist, so muß hier der bei VIII. gefundene Werth von z^2 substituirt werden; dann ergibt sich

$$\text{XI. } y^2 = \left(\frac{p+q}{q}\right)\left(\frac{d^2 q^2}{p\,(p+q)}\right) = \frac{d^2 q}{p};$$

$$\text{also } y = d \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

137. **Aufgabe.** Die in der vorigen Aufgabe verlangte Secante soll so gezogen werden, daß FD, ihr äußerer Abschnitt, gleich einer gegebenen Linie a werde.

Auflösung. Diesmal sind nur zwei Unbekannte, x und y, zu bestimmen, wozu folgende zwei Gleichungen dienen.

$$\text{I. } y^2 = (a+x)\,a. \qquad \text{II. } y^2 + d^2 = (a+x)^2.$$

Ziehen wir I. von II. ab, so ist das Ergebniß:

$$\text{III. } d^2 = (a+x)\,x = a\,x + x^2,$$

woraus $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + d^2}$ sich ergibt, sodaß

$$y^2 = \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + d^2}\right)a,$$

demnach $y = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a\sqrt{\frac{a^2}{4} + d^2}}$ sein muß.

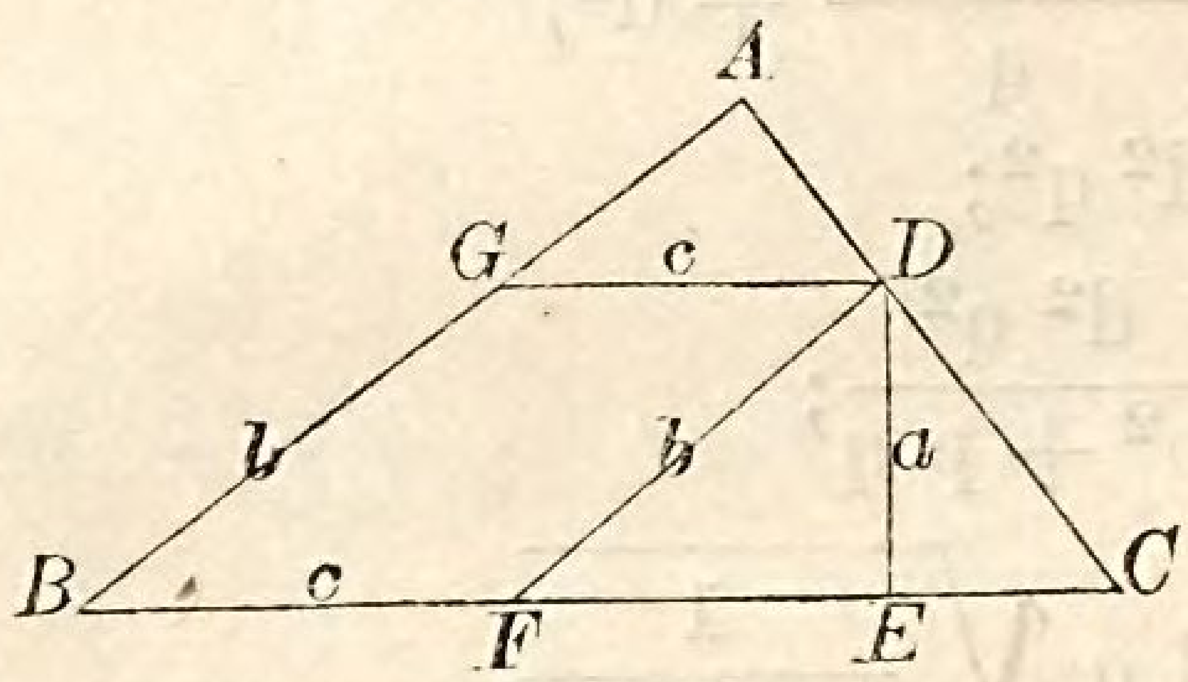


Fig. 103.

138. Aufgabe. Es ist ein Winkel ABC und innerhalb desselben ein Punkt D gegeben (also auch Loth DE = a, und BE = b, die diesen Punkt bestimmen); man soll durch diesen eine gerade Linie AC so legen, daß sie mit den Schenkeln des Winkels ein Dreieck von gegebener Größe (Grundlinie = d, Höhe = h) bildet.

Erste Auflösung. Zieht man DF ∥ AB, so darf demnach auch diese als bekannt angesehen werden, sowie der Abschnitt BF = c. Der Inhalt des gegebenen Dreiecks ist $= \frac{dh}{2}$. Endlich möge AC die verlangte Linie (also △ABC das zu construirende) sein, so ist ihre Lage und Größe bestimmt, wenn man nur die Linie BC = x finden kann.
Es ist aber △DFC ∼ △ABC, folglich hat man

$$\triangle DFC : \triangle ABC = FC^2 : BC^2,$$

oder $\frac{(x-c)a}{2} : \frac{dh}{2} = (x-c)^2 : x^2,$

also $a : dh = x - c : x^2;$

oder $ax^2 - dhx = -cdh,$

oder $x^2 - \frac{dhx}{a} = -\frac{cdh}{a};$

folglich $x = \frac{dh \pm \sqrt{dh(dh - 4ac)}}{2a},$

oder auch $x = \frac{dh}{2a} \pm \sqrt{\frac{dh}{2a}\left(\frac{dh}{2a} - 2c\right)}.$

Zweite Auflösung. Wird diesmal der Punkt D lediglich durch die von D aus mit den Schenkeln des Winkels A B C gezogenen Parallelen bestimmt, so sind diese als bekannt anzusehen. Der Kürze wegen setze man B G oder F D = b und G D oder B F = c. Zu suchen sind B C = x und A B = y. Infolge der Aehnlichkeit der Dreiecke A G D und A B C hat man die Proportion:

$$A G : A B = G D : B C,$$

$$\text{oder } y - b : y = c : x,$$

$$\text{oder } c y = x y - b x;$$

$$\text{also I. } b x + c y = x y.$$

Das Dreieck, dessen Größe $= \frac{1}{2} (d h)$ gegeben ist, verwandle man in ein anderes, das den Winkel A B C hat. Die eine der einschließenden Seiten desselben werde = B G oder = b angenommen, während sich die andere = g ergibt. Dann muß, da dieses Dreieck mit dem $\triangle$ A B C denselben Flächeninhalt gemein hat, das Product der den gleichen Winkel A B C einschließenden Seiten in beiden Dreiecken gleich sein. Es ist also

$$\text{II. } x y = b g.$$

Wird dieser Werth von x y in I. substituirt, so findet sich

$$\text{III. } b x + c y = b g,$$

$$\text{oder } c y = b g - b x;$$

$$\text{also IV. } y = \frac{b}{c} (g - x).$$

Aus II. ergibt sich V. $y = \frac{b g}{x}$,

sodaß aus IV. und V. folgt:

$$\frac{b}{c} (g - x) = \frac{b g}{x},$$

$$\text{oder } \frac{g - x}{c} = \frac{y}{x};$$

und daraus ergibt sich

$$g x - x^2 = c g,$$

$$\text{oder } x^2 - g x = - c g,$$

$$\text{folglich } x = \frac{g}{2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4} - c g} = \frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4 c g}}{2},$$

$$\text{oder } x = \frac{g \pm \sqrt{g(g-4c)}}{2}.$$

$$\text{Demnach ist } \frac{bg}{x} \text{ oder } y = \frac{2bg}{g \pm \sqrt{g(g-4c)}} = \frac{2bg(\mp\sqrt{g(g-4c)})}{4c},$$

$$= \frac{bg(\mp\sqrt{g(g-4c)})}{2c}.$$

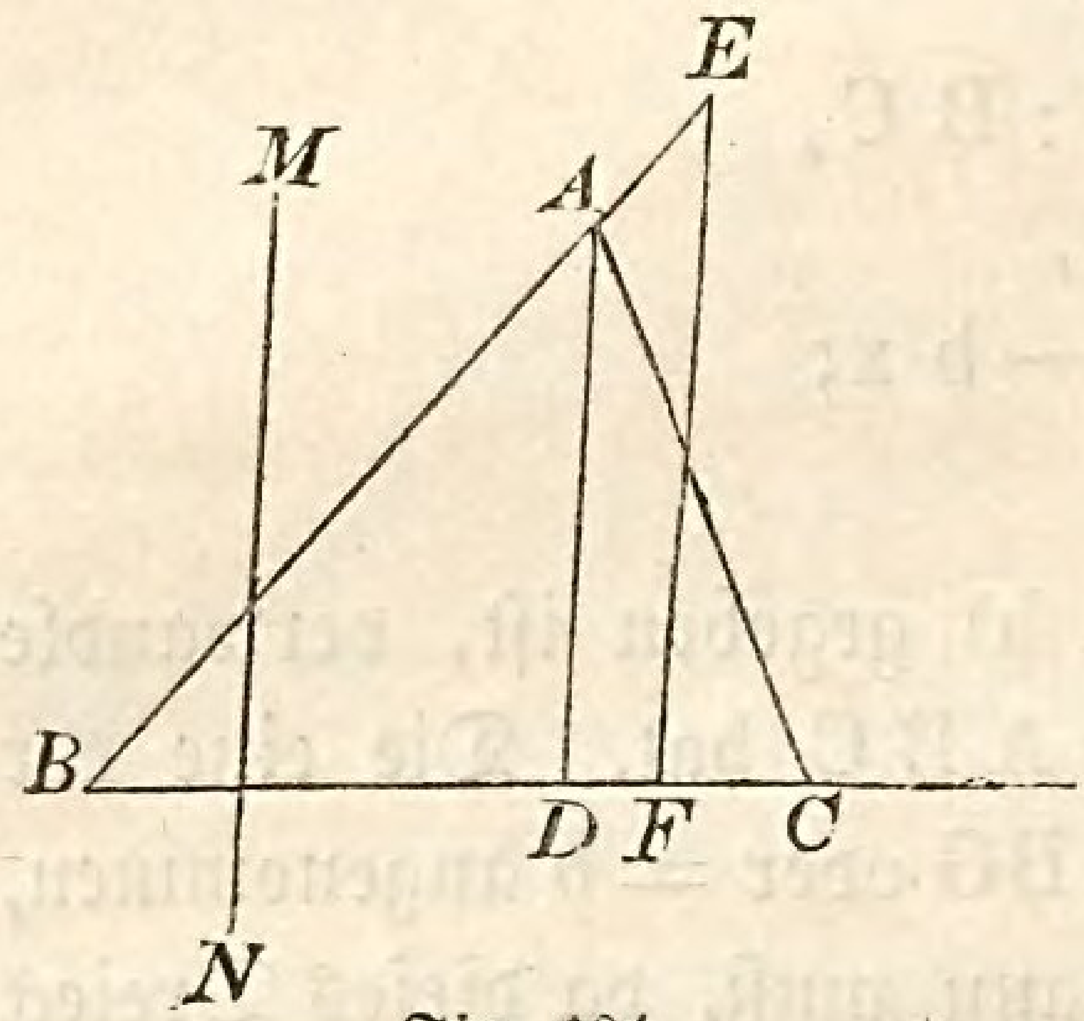


Fig. 104.

139. Aufgabe. Es ist ein Winkel ABC gegeben; man soll von demselben ein Dreieck von gegebener Größe abschneiden (dasselbe habe gleich den Winkel ABC und BC = b zur Grundlinie), sodaß die Schneidelinie EF einer gegebenen NM parallel wird.

Auflösung. Wird AD || MN gezogen, so ist BD = a bekannt, und man hat nur noch BF = x zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke hat man

$$\triangle BEF : \triangle BAD = x^2 : a^2$$

$$\text{und } \triangle ABC : \triangle BAD = b : a = ab : a^2;$$

$$\text{also } \triangle BEF : \triangle ABC = x^2 : ab.$$

$$\text{Da } \triangle BEF = \triangle ABC$$

ist, so muß auch $x^2 = ab$

und $x = \sqrt{ab}$ sein.

Fünfter Abschnitt.

Von der Construction drei- und vierseitiger Figuren in Dreiecken, Vierecken, Halbkreisen, Quadranten u. s. w.; so wie vom Maximum des Flächeninhalts und Umfangs.

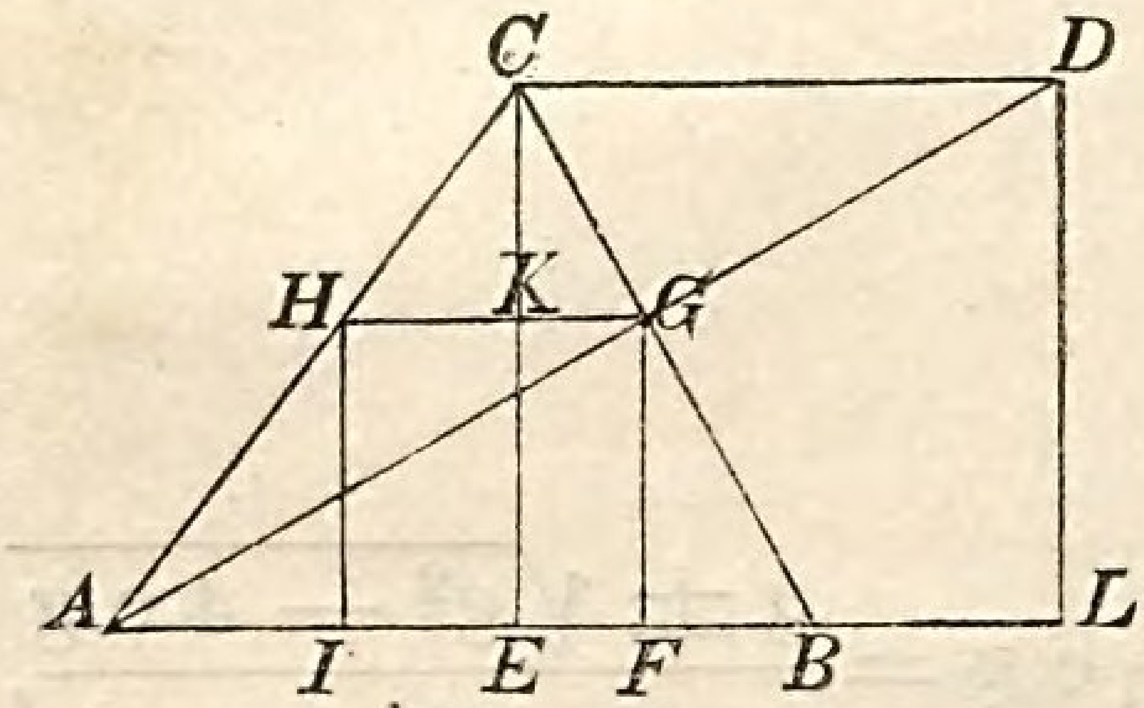


Fig. 105.

140. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC ein Quadrat FGHI zu construiren.

Auflösung. Man ziehe die Höhe CE, errichte über CE ein Quadrat CELD, ziehe DA, welche

B C in G schneidet, lege von G aus mit A B und C E die Parallelen G H und G F und durch H die Linie H I parallel mit C E. Dann ist F G H I das verlangte Quadrat.

Beweis. Infolge der Aehnlichkeit der Dreiecke A C D und A H G, sowie der Dreiecke A D L und A G F, hat man

$$A D : A G = C D : H G = D L : G F,$$

und da C D = D L ist (per constr.), so muß auch H G = G F sein; woraus erhellt, daß das Viereck H G F I wirklich ein Quadrat ist.

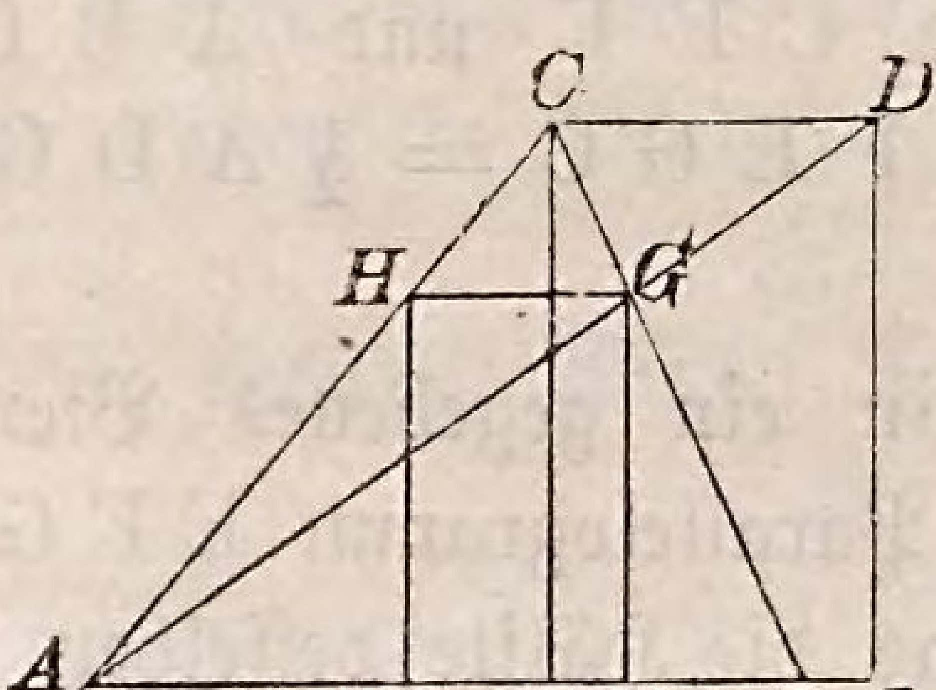


Fig. 106.

141. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck A B C ein Rechteck F G H I zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß (n : m) haben.

Construction und Beweis. Man ziehe die Höhe CE, errichte über CE ein Rechteck C D L E, in welchem C E : E L = n : m sich verhält, ziehe D A, welche B C in G schneidet, so ist, wenn G H mit A B, und H I sowie G F mit C E parallel gezogen werden, F G H I das verlangte Rechteck. Denn es ist wieder

$$A D : A G = C D : H G = D L : G F;$$

$$\text{also } D L : C D = F G : H G.$$

$$\text{Da } D L : C D$$

$$\text{oder } C E : E L = n : m$$

sich verhält, so stehen auch F G und H G in diesem Verhältniß.

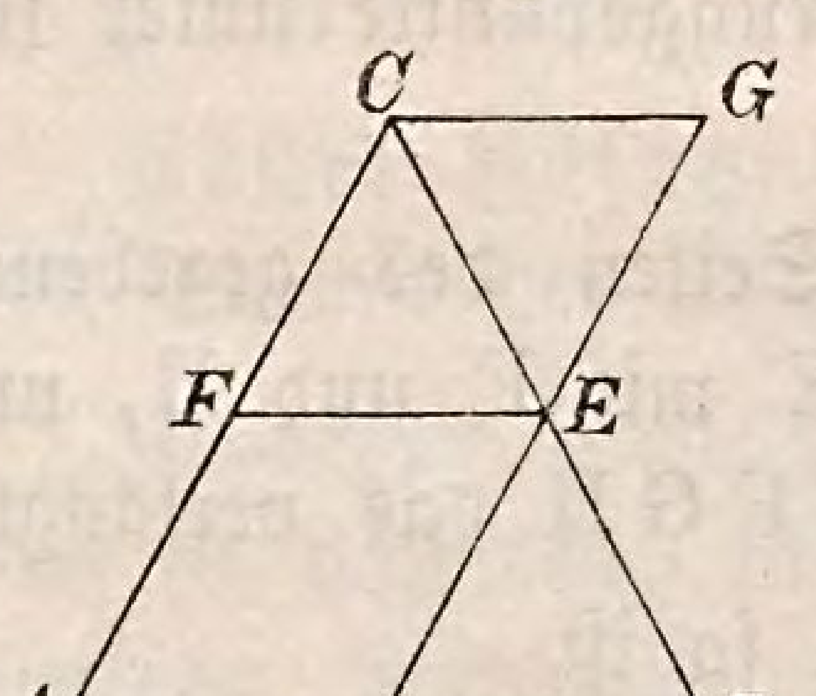


Fig. 107.

142. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC ein Parallelogramm ADEF einzuzeichnen, das die Hälfte von demselben ist.

Analysis. Da ein Parallelogramm einem Dreieck gleich ist, mit dem es halbe Grundlinie und gleiche Höhe hat, so ist, wenn A D = B D, Parallelogramm CADG = △ A B C. Nun ist aber, wenn E F || A D gezogen wird, Parallelogramm ADEF = ½ CADG, folglich auch = ½ △ABC.

Die Seiten des gesuchten Parallelogramms A D E F werden durch die Punkte D und E bestimmt, welche in der Mitte von A B und B C liegen.

Construction. Man halbire A B und B C, ziehe D E und aus E mit A B eine Parallele E F, so ist Parallelogramm A D E F = $\frac{1}{2}$ △ A B C.

Beweis. Wird D E bis G verlängert, wo sie auf die mit A B gezogene Parallele C G stößt, so ist Parallelogramm C A D G = △ A B C. Weil nun C E = E B ist, so ist auch C F = F A (infolge der Aehnlichkeit der Dreiecke C F E und A B C), folglich Parallelogramm A D E F = F E G C = $\frac{1}{2}$ A D G C = $\frac{1}{2}$ △ A B C.

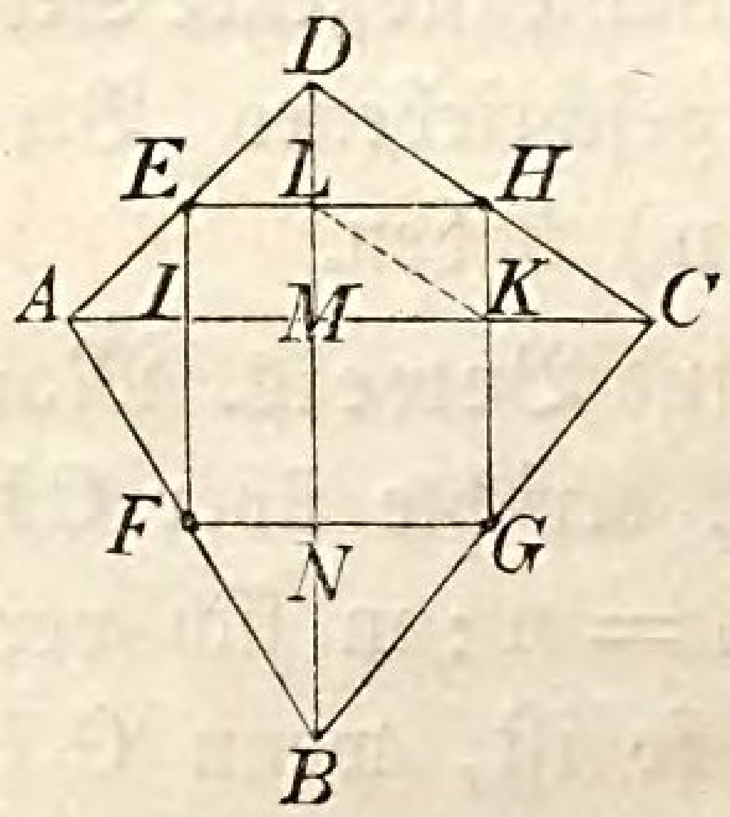


Fig. 108.

143. Aufgabe. In ein gegebenes Viereck A B C D ein Parallelogramm E F G H zu zeichnen, das die Hälfte desselben ist.

Analysis. Angenommen, Parallelogramm E F G H sei das verlangte. Ziehen wir A C, so wäre, wenn I K H E von Parallelen eingeschlossen würde und E H = $\frac{1}{2}$ A C wäre, A D und C D durch die Ecken des Parallelogramms in E und H halbirt. Auf der andern Seite wäre dann auch F G K I ein Parallelogramm, dabei F G = E H, also auch F G = $\frac{1}{2}$ A C; folglich wäre A B und B C durch die Ecken des Parallelogramms in F und G halbirt. Da also die Ecken des Parallelogramms in den Halbirungspunkten der Seiten des Vierecks liegen, so findet man das Parallelogramm, wenn man die Seiten des letzteren halbirt und die Halbirungspunkte unter sich verbindet.

Construction. Man halbire die Seiten des gegebenen Vierecks, verbinde die Halbirungspunkte E mit F und H, und G mit F und H, so ist Parallelogramm E F G H das verlangte.

Beweis. Zieht man A C und B D, so ist

1. C D : D H = B C : C G = 2 : 1;

demnach B D || G H.

2. A B : A D = A F : A E,

also E F || B D || G H.

3. $AD : CD = DE : DH$,

deshalb $EH \parallel AC$.

4. $AB : BC = BF : BG$,

demnach $FG \parallel AC \parallel EH$.

Folglich ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Wir ziehen ferner eine Linie LK. Da $HL \parallel CM$ ist, und $CD : DH = 2 : 1$, so verhält sich auch $DM : DL = 2 : 1$; folglich ist DM halbirt, also $DL = LM$.

Es ist aber $ML = HK = DL$ und LH sich selbst gleich, und außerdem Winkel $LHK =$ Winkel DLH; folglich ist

$$\triangle LHK \cong \triangle DLH,$$

deshalb Winkel $KLH =$ Winkel DHL,

also $DH \parallel LK$.

Demgemäß sind $DHKL$ und $CHLK$ Parallelogramme.

Ferner ist $\triangle DLH \cong \triangle LHK$,

aber auch $\triangle CHK \cong \triangle LHK \cong LMK$,

folglich $\triangle DLH + \triangle KHC = \triangle LHK + \triangle LKM$,

auch $\frac{1}{2}(\triangle DLH + \triangle KHC + \triangle LKH + \triangle LHM)$

$= \triangle LHK + \triangle LKM$,

oder $\frac{1}{2} \triangle CDM =$ Parallelogramm $MLHK$.

Auf dieselbe Art ergibt sich, daß Parallelogramm $EM = \frac{1}{2} \triangle ADM$; Parallelogramm $FM = \frac{1}{2} \triangle ABM$ und Parallelogramm $GM = \frac{1}{2} \triangle BCM$. Es ist also auch Parallelogramm $MH + ME + MF + MG = \frac{1}{2} \triangle CDM + \frac{1}{2} \triangle ADM + \frac{1}{2} \triangle ABM + \frac{1}{2} \triangle BCM$, oder Parallelogramm $FH = \frac{1}{2} ABCD$.

Erster Zusatz. Der Umfang des Parallelogramms FH ist der Summe der Diagonalen AC und BD gleich.

Zweiter Zusatz. Anstatt die Seiten des gegebenen Vierecks zu halbiren, kann man jede derselben in n gleiche Theile theilen. Dann hat man den mten Theilungspunkt zu nehmen, und zwar auf AB und AD von A an gerechnet, und ebenso auf BC und CD, von C an gerechnet. Durch diese Theilungspunkte zieht man gerade Linien, zwischen den zusammenstoßenden Seiten, und erhält ebenfalls ein Parallelogramm. Es ist klar,

daß auf diese Art eine Menge verschiedenartiger Parallelogramme in ein Viereck construirt werden können. Zu bemerken ist jedoch, daß das angegebene Verfahren nicht das einzig mögliche ist, um Parallelogramme in ein beliebiges Viereck zu zeichnen, denn es lassen sich noch ganz andre Wege einschlagen, besonders wenn das gegebene Viereck selbst ein Parallelogramm ist.

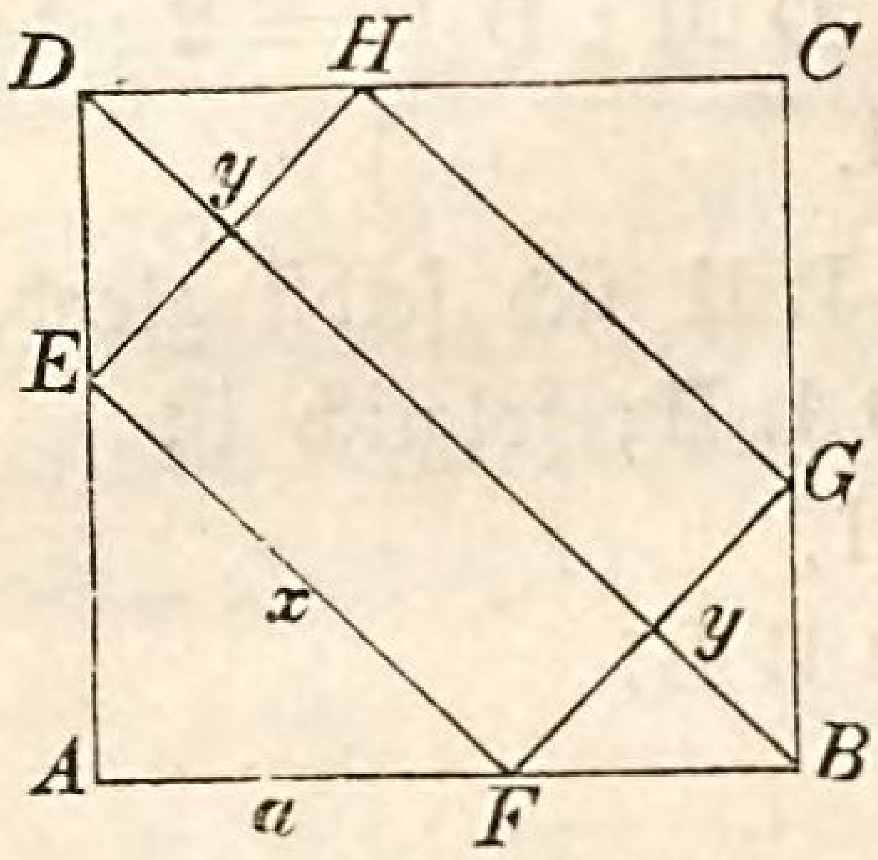


Fig. 109.

144. Aufgabe. In ein Quadrat A B C D ein Rechteck E F G H so zu zeichnen, daß die Ecken des Rechtecks auf die Seiten des Quadrats fallen, und zwei zusammenstoßende Seiten des Rechtecks ein vorgeschriebenes Verhältniß haben (n : m).

Auflösung. Die Seite des Quadrats sei $= a$ gegeben, dann ist zu suchen $E\,F = x$ und $F\,G = y$. Weil $E\,F \parallel B\,D$ ist, so verhält sich

$$A\,F : E\,F = A\,B : B\,D,$$

$$\text{d. i. } A\,F : x = a : \sqrt{a^2 + a^2} = a : a\sqrt{2},$$

$$\text{oder } A\,F^2 : x^2 = a^2 : 2\,a^2 = 1 : 2;$$

$$\text{also } A\,F^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{und I. } A\,F = x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ferner ist $F\,G \parallel A\,C$, also verhält sich

$$B\,F : F\,G = A\,B : A\,C,$$

$$\text{d. i. } B\,F : y = a : a\sqrt{1} = 1 : \sqrt{2}$$

$$\text{oder } B\,F^2 : y^2 = 1 : 2;$$

$$\text{also } B\,F = \frac{y^2}{2},$$

$$\text{folglich II. } B\,F = y\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Summirt man I. und II., so ergibt sich AB oder a, nämlich

$$\text{III. } (x + y)\sqrt{\tfrac{1}{2}} = a;$$

während noch die Aufgabe verlangt, daß

$$\text{IV. } x : y = n : m$$

sich verhalten soll.

Wird die Gleichung III. ins Quadrat erhoben, so findet sich

$$\text{V. } \frac{(x+y)^2}{2} = a^2,$$

demnach $x + y = a\sqrt{2}$.

Die Proportion IV. aber führt auch zu den beiden folgenden VI. und VII.

$$\text{VI. } x + y : x = n + m : n,$$

d. i. $a\sqrt{2} : x = n + m : n$.

Deshalb ist $x = \frac{n\,a}{n+m}\sqrt{2} \cdot = \sqrt{\frac{2\,n^2 \cdot a^2}{(n+m)^2}} = \left(\frac{n}{n+m}\right)\sqrt{a^2 + a^2}.$

Außerdem ist VII. $x + y : y = n + m : m$,

d. i. $a\sqrt{2} : y = n + m : m$,

folglich $y = \frac{m\,a}{n+m}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2m^2 \cdot a^2}{(n+m)^2}} = \left(\frac{m}{n+m}\right)\sqrt{a^2 + a^2}.$

Zweite Auflösung. Wird D E (also auch D H, B F und B G) $= z$ gesetzt, so ist A E oder auch A F $= a - z$, und man hat demgemäß

$$y^2 = 2\,z^2 \text{ und } x^2 = 2\,(a - z)^2,$$
$$y = z\sqrt{2} \text{ und } x = (a - z)\sqrt{2};$$

die Aufgabe verlangt aber, daß sich verhalte

$$x : y = n : m,$$

d. i. $(a - z)\sqrt{2} : z\sqrt{2} = n : m$,

oder $a - z : z = n : m$,

oder $a : z = n + m : m$,

also $z = \frac{a\,m}{n+m}$.

Hiernach ist $y = \frac{a\,m}{n+m}\sqrt{2}$,

sowie $x = \frac{a\,n}{n+m}\sqrt{2}$,

welche Formeln bereits oben sich ergeben haben.

Anmerkung. Die Diagonale des gegebenen Quadrats ist $= \sqrt{a^2 + a^2}$, deshalb ist x oder die größere Seite des verlangten Rechtecks $= \left(\frac{n}{n+m}\right) \cdot$ B D, und die kleinere Seite desselben oder $y = \left(\frac{m}{n+m}\right) \cdot$ B D.

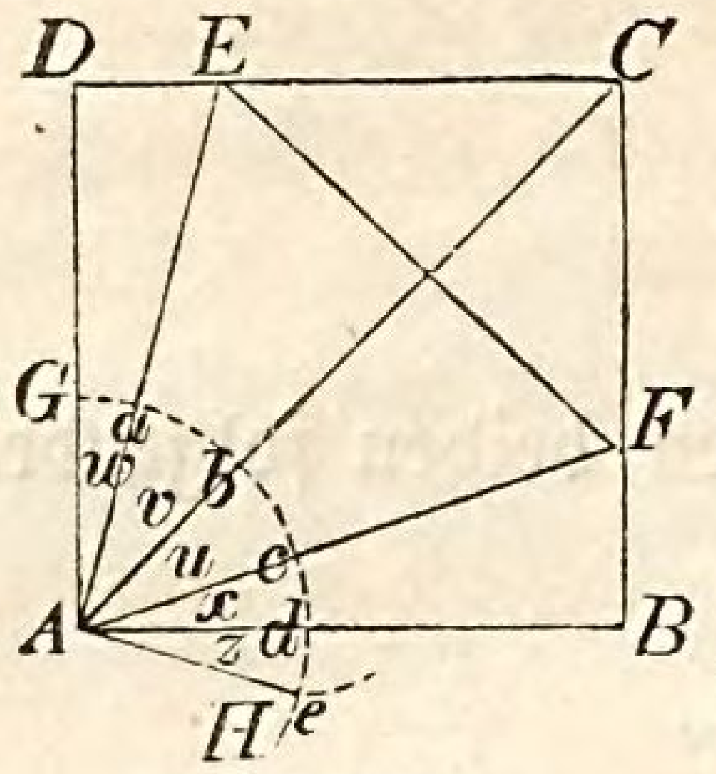


Fig. 110 a.

145. Aufgabe. In ein Quadrat A B C D ein gleichseitiges Dreieck A E F so zu zeichnen, daß die eine Spitze desselben in den einen Winkel des Quadrats, die beiden andern aber in die Seiten desselben fallen.

Analysis. Die Diagonale A C halbirt das Dreieck AEF und den Winkel EAF, sodaß $v = u = 30°$ ist. Ferner ergibt sich Winkel $x = w$, und da ihre Summe $90° - 60° = 30°$ ausmacht, so beträgt jeder von ihnen 15°. Demnach sind $u + x = 45°$ oder $\frac{1}{2}$ Rechter, und wird ein Winkel $z = x$ unterhalb AB in A angetragen, so ist $z + x = 30°$, also auch $= u = v$. Hiernach hat man

$$\text{Winkel } v + u = u + x + z$$

$$\text{oder Bogen } a\,c = \text{Bogen } b\,e.$$

Der Bogen b e ist in c halbirt, und durch diesen Punkt muß A F, die eine Seite des Dreiecks, von A aus gelegt werden.

Construction. Man ziehe zuerst die Diagonale A C und beschreibe aus A mit einer beliebigen Zirkelöffnung den Bogen G H von unbestimmter Größe. Alsdann schneide man mit der Zirkelöffnung von b aus den Bogen b e ab, und mache c d = d e, so ist c der Punkt, durch welchen die Dreiecksseite A F gehen muß.

Algebraische Lösung. Es sei die Seite des Quadrats $= a$, die Seite des Dreiecks $= x$, und $E\,C = C\,F = y$, so ist

$$E\,F^2 = E\,C^2 + C\,F^2,$$

$$\text{d. i. I. } x^2 = 2y^2.$$

$$\text{Ferner } A\,F^2 = A\,B^2 + B\,F^2,$$

$$\text{d. i. II. } x^2 = a^2 + (a - y)^2.$$

Aus I. und II. findet sich:

$$2\,y^2 = a^2 + (a - y)^2 = 2\,a^2 - 2\,a\,y + y^2$$

$$\text{oder } y^2 = 2\,a^2 - 2\,a\,y;$$

$$\text{folglich } y^2 + 2\,a\,y = 2\,a^2;$$

$$\text{also } y = -a + \sqrt{3\,a^2} = -a + \sqrt{3\,a \cdot a};$$

d. h. y wird gefunden, wenn man von der Seite eines Qua-

drats, das dreimal so groß als das gegebene ist, die Seite des gegebenen selbst abschneidet. Durch y wird der Punkt F, also die Seite A F und das ganze Dreieck bestimmt.

Erster Zusatz. Da $x^2 = 2\,y^2$, also $x = y\sqrt{2}$ ist, so hat man $1 : \sqrt{2} = y : x$, und daher zeigt sich x als die Diagonale des Quadrats von y. Ferner ist $x = (-a + \sqrt{3\,a^2})\sqrt{2}$ $= a(-1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}\,(-1 + \sqrt{3})$; demnach verhält sich die Seite des Dreiecks zur Seite des Quadrats (oder

$$x : a) = \sqrt{2}\,(-1 + \sqrt{3}) : 1$$

und, da $a\sqrt{2}$ die Diagonale des Quadrats von a ist, zu dieser (d. h.

$$x : a\sqrt{2}) = -1 + \sqrt{3} : 1.$$

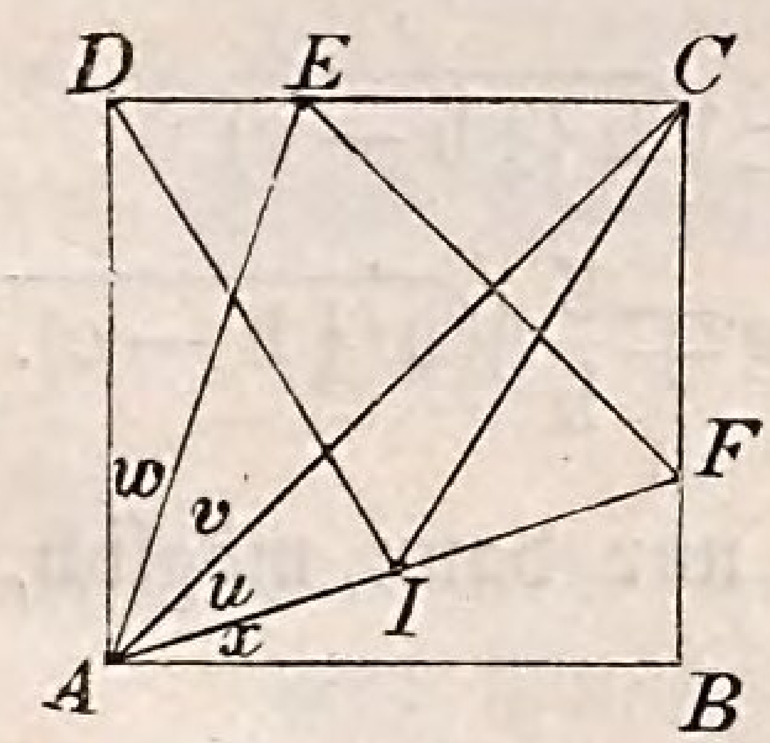


Fig. 110b.

Zweiter Zusatz. Errichtet man über C D ein gleichseitiges Dreieck innerhalb des Quadrats, so fällt die Spitze I dieses Dreiecks in die Mitte der Linie A F, sodaß die Lage dieser Linie hiernach sogleich gefunden wird. Das Dreieck EAF ist das größte unter allen gleichseitigen, die in das Quadrat beschrieben werden können, während dasjenige Dreieck das kleinste ist, dessen Seiten den Seiten des Quadrats gleich sind. Die Spitze dieses kleinsten gleichseitigen Dreiecks liegt in der Mitte einer Seite des Quadrats, und die ihr gegenüberstehende Seite ist mit der Quadratseite parallel.

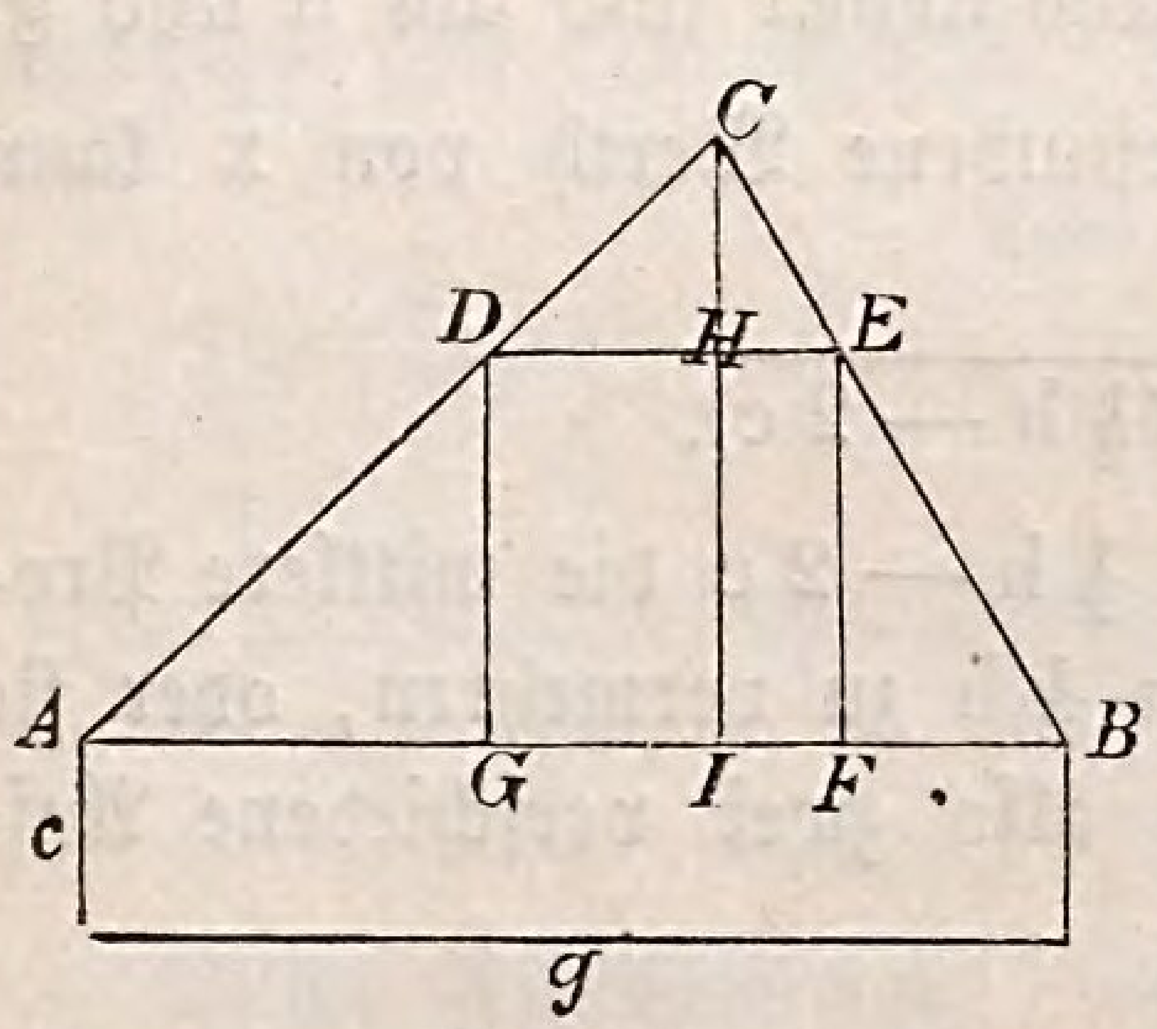


Fig. 111.

146. Aufgabe. In ein Dreieck A B C ein Rechteck D E F G so zu zeichnen, daß zwei Ecken in die Grundlinie, die beiden andern in die Seiten des Dreiecks fallen, und das Rechteck D E F G einem gegebenen Rechteck gleich wird.

Auflösung. Die Höhe des Dreiecks A B C sei = h, die Grundlinie = g. Wird das gegebene Rechteck in ein solches verwandelt, das mit dem Dreieck

die Grundlinie g gemein hat, während die Höhe $= c$ sich ergibt, so findet man, wenn man sich das gesuchte Rechteck D E F G bereits in das Dreieck A B C gezeichnet denkt, und seine Seiten mit x und y bezeichnet, daß sich verhält

$$DE : AB = CH : CI,$$

oder I. $y : g = h - x : h$,

während II. $x y = c g$ ist.

Nach I. ist $y = \frac{g(h-x)}{h}$.

Wird dieser Werth von y in II. substituirt, so erhält man

$$\frac{g x (h-x)}{h} = c g,$$

oder $x^2 - h x = - c h$.

Mithin ist $x = \frac{1}{2} h \pm \sqrt{\frac{1}{4} h^2 - c h} = \frac{1}{2} h \pm \sqrt{h (\frac{1}{4} h - c)}$

und $y = \frac{g}{h}\left(\frac{1}{2} h \mp \sqrt{\frac{1}{4} h^2 - c h}\right) = \frac{1}{2} g \mp \frac{g}{h} \sqrt{h (\frac{1}{4} h - c)}$.

Determination. Die Construction ist nur dann möglich, wenn

$$c \leqq \frac{1}{4} h \text{ ist.}$$

Nimmt man $c = \frac{1}{4} h$ an, so wird $x = \frac{1}{2} h$ und $y = \frac{1}{2} g$, und das Rechteck ist demnach halb so groß als das Dreieck. Die Construction eines solchen Rechtecks geschieht nach Nr. 142.

Wenn $c < \frac{1}{4} h$ ist, so findet man für x und y doppelte reelle und positive Werthe, die bezüglich kleiner sind als h und g.

Construction. Der oben gefundene Werth von x kann verwandelt werden in

$$x = \frac{1}{2} h \pm \sqrt{\frac{1}{2} h (\frac{1}{2} h - 2 c)}.$$

Man hat also zwischen $\frac{1}{2} h$ und $\frac{1}{2} h - 2 c$ die mittlere Proportionale zu suchen und dieselbe um $\frac{1}{2} h$ zu vermehren, oder sie selbst von $\frac{1}{2} h$ abzuschneiden, sodaß also zwei verschiedene Auflösungen der Aufgabe möglich sind.

147. Aufgabe. In ein Dreieck ABC ein Parallelogramm B D E F so zu zeichnen, daß zwei Seiten desselben B D und B F in zwei Seiten des Dreiecks A B und

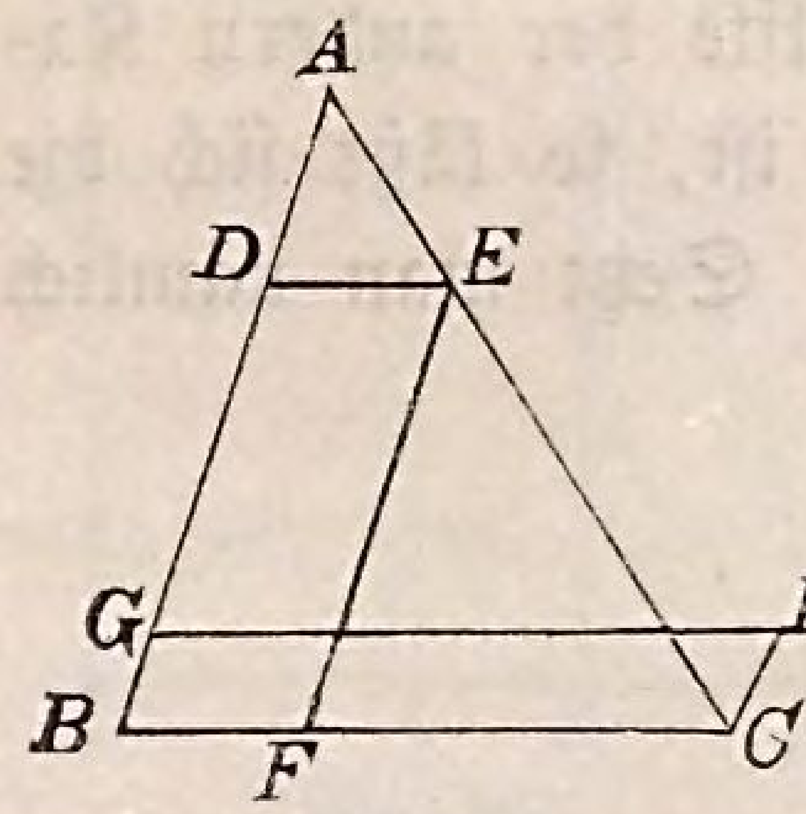


Fig. 112.

BC fallen und die gegenüberstehende Ecke E in der dritten Seite AC liegt.

Auflösung. Man construire zunächst ein Parallelogramm BCHG, welches mit dem einzuzeichnenden Parallelogramm BDEF denselben gegebenen Flächeninhalt und mit dem Dreieck ABC den Winkel B und eine Seite BC gemeinschaftlich hat. Wenn $AB = h$, $BC = g$, $BG = c$ bekannt sind und $BD = x$, sowie $BF = y$ gesetzt werden, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{I. } x\,y = c\,g. \quad \text{II. } y : g = h - x : h.$$

Aus I. findet sich $y = \frac{c\,g}{x}$.

Durch Substitution dieses Werthes von y in II. erhält man

$$\text{III. } \frac{c\,g}{x} : g = h - x : h,$$

$$\text{oder } c : x = h - x : h,$$

$$\text{oder } h\,x - x^2 = c\,h;$$

$$\text{auch } x^2 - h\,x = -c\,h;$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}h \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 - c\,h} = \tfrac{1}{2}h \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}h(\tfrac{1}{2}h - 2c)}.$$

Man hat demnach zuerst die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{2}h$ und $\frac{1}{2}h - 2c$ zu suchen, und diese entweder von $\frac{1}{2}h$ abzuschneiden, oder um dieselbe zu verlängern. Es ist also diese Aufgabe von der vorigen (146) wesentlich nicht verschieden.

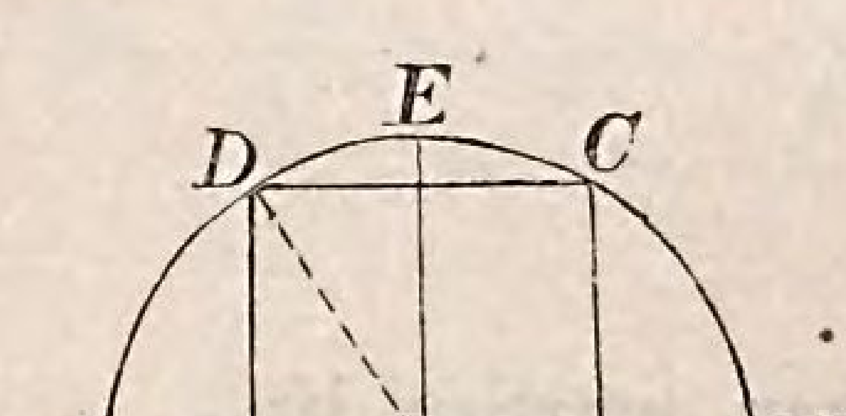


Fig. 113.

148. Aufgabe. In einen Halbkreis ein Quadrat ABCD zu zeichnen, sodaß die Seite AB auf den Durchmesser zu liegen kommt, während die Ecken C und D in die Kreislinie fallen.

Erste Auflösung. Durch den in der Mitte des Durchmessers GH senkrecht errichteten Radius EF wird das Quadrat ABCD halbirt. Weil D in der Peripherie liegt, so läßt sich der Radius FD ziehen, welcher die Hypotenuse vom Dreieck

A D F wird, dessen eine Seite A F die Hälfte der andern Kathete A D ist. Da der Radius $= r$ bekannt ist, so läßt sich die Seite des Quadrats oder A D leicht finden. Setzt man nämlich $AD = x$ und den Radius $= r$, so ist

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = r^2,$$

$$\text{oder } x^2 = \frac{4r^2}{5};$$

$$\text{also } x = \sqrt{2r \cdot \tfrac{2}{5} r},$$

d. h. die Seite des gesuchten Quadrats ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dem fünften Theil desselben.

Zweite Auflösung. Die Seite des verlangten Quadrats ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers, nämlich zwischen A G und A H. Ueberdies muß $BH = AG$ sein. Setzt man also A G oder $BH = y$, so ergibt sich

$$AD^2 = AH \cdot AG,$$

$$\text{d. i. I. } x^2 = (2r - y)y;$$

$$\text{ferner } GH = GA + AB + BH,$$

$$\text{d. i. II. } 2r = x + 2y.$$

$$\text{Aus II. folgt } y = \frac{2r - x}{2}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von y verwandelt sich die Gleichung I. in

$$x^2 = \left(\frac{2r + x}{2}\right)\left(\frac{2r - x}{2}\right),$$

$$\text{oder } 4x^2 = 4r^2 - x^2,$$

$$\text{oder } 5x^2 = 4r^2;$$

$$\text{folglich } x = \sqrt{2r \cdot \tfrac{2}{5} r},$$

wie bereits in der vorigen Auflösung gefunden worden ist.

Da ferner $y = \frac{2r - x}{2} = r - \frac{1}{2}x$ ist, so erhellt:

$$y = r - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{5} r^2} = r - \sqrt{\tfrac{1}{5} r^2} = r - \sqrt{r \cdot \tfrac{1}{5} r};$$

d. h. y ist die Differenz zwischen dem Radius und der mittlern Proportionale zum Radius und einer Linie, die dem fünften Theil desselben gleich ist.

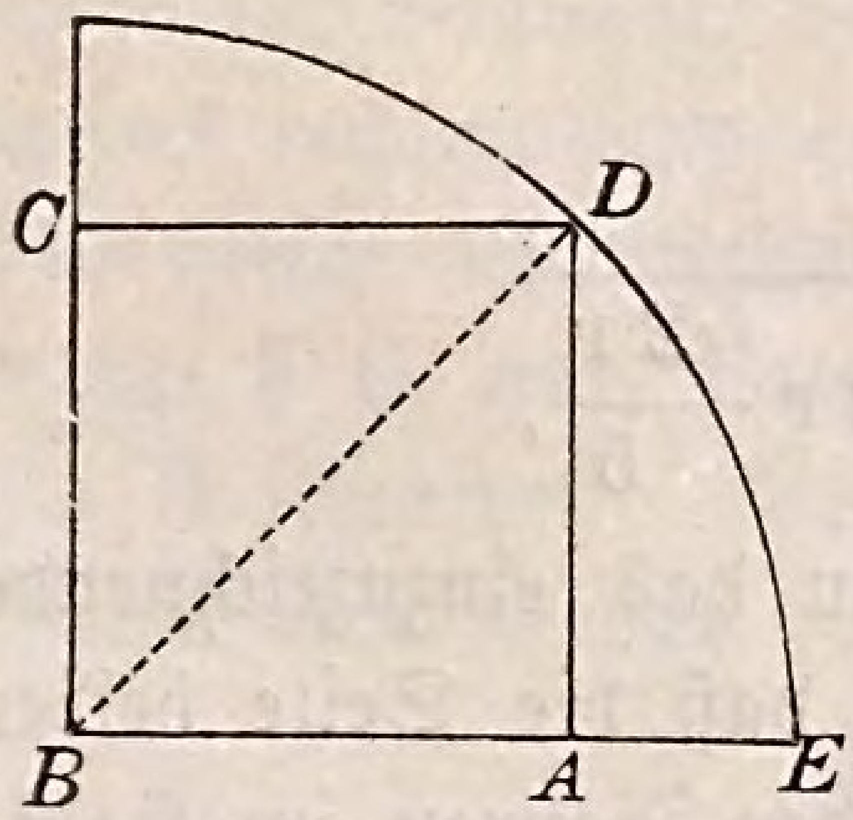


Fig. 114.

149. Aufgabe. In einen Quadranten ein Quadrat ABCD so zu zeichnen, daß eine Ecke D in den Bogen fällt, die drei andern in die beiden Radien zu liegen kommen.

Erste Auflösung. Der Radius BD halbirt den Bogen und das Quadrat. Wenn daher der Radius = r gegeben ist und die Seite des zu zeichnenden Quadrats = x gesetzt wird, so findet sich sogleich

$$2x^2 = r^2,$$
$$x = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{r \cdot \tfrac{1}{2} r};$$

d. h. die Seite des Quadrats ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius und der Hälfte desselben.

Zweite Auflösung. DA ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser, vermindert um den Abschnitt EA, und diesem Abschnitt selbst. Da EA = r — x ist, so ergibt sich

$$x^2 = [2r - (r - x)] \cdot (r - x),$$
oder $x^2 = (r + x)(r - x)$;
also $2x^2 = r^2$;
folglich $x = \sqrt{r \cdot \tfrac{1}{2} r}$.

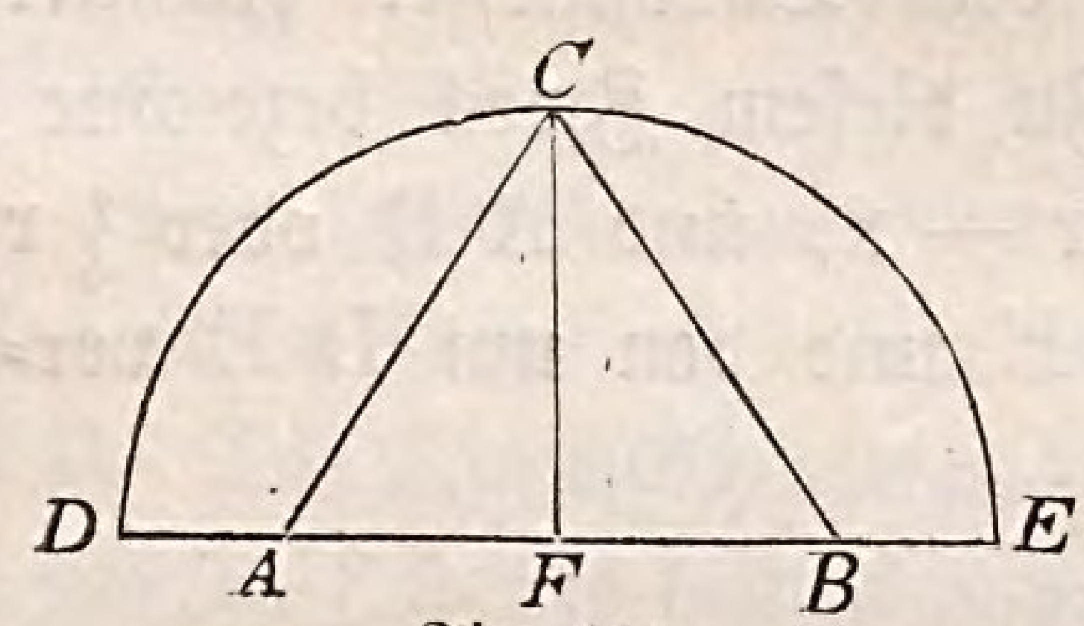


Fig. 115.

150. Aufgabe. In einen Halbkreis ein gleichseitiges Dreieck ABC so zu zeichnen, daß die Spitze desselben, C, in den Bogen zu liegen kommt und die ihr gegenüberliegende Seite AB in den Durchmesser DE fällt.

Auflösung. Der Radius CF halbirt den Halbkreis und das Dreieck ABC, welches dadurch in zwei congruente rechtwinkelige Dreiecke zerfällt. Ist daher der Radius = r gegeben, und wird die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks mit x bezeichnet, so ergibt sich:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2,$$

$$\text{oder } \frac{5\,x^2}{4} = r^2;$$

$$\text{also } x = 2\,r\sqrt{\tfrac{1}{5}} = \sqrt{2\,r \cdot \frac{2\,r}{5}},$$

welche Formel bereits in Aufgabe 148 für das einzuzeichnende Quadrat sich ergeben hat. Daraus folgt, daß die Seite beider unter denselben Bedingungen zu construirender Figuren im Halbkreise dieselbe ist. Dem Flächeninhalt nach verhält sich das gleichseitige Dreieck zum Quadrat wie

$$\tfrac{1}{5}\,r^2\sqrt{3} : \tfrac{4}{5}\,r^2,$$
$$\sqrt{3} : 4.$$

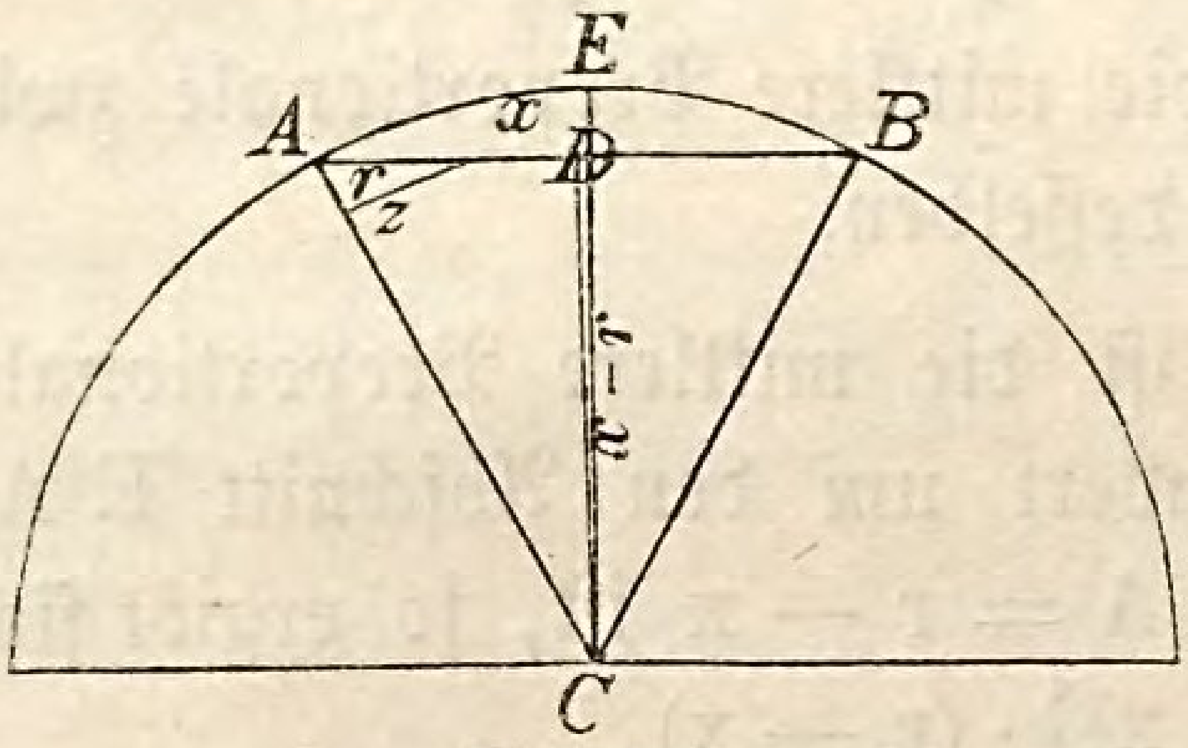


Fig. 116.

151. Aufgabe. In einen Halbkreis ein gleichseitiges Dreieck A B C so zu zeichnen, daß die eine Spitze C in den Durchmesser und die ihr gegenüberliegende Seite AB in die Kreislinie fällt.

Auflösung. Die Betrachtung der Figur zeigt, daß die Seite des Dreiecks ABC dem Radius des Halbkreises gleich ist, und daß die Spitze C in die Mitte des Durchmessers fallen muß. Nun bleibt noch der Abstand der mit dem Durchmesser parallel gezogenen Seite A B zu ermitteln. Zu diesem Zweck bezeichne man D E mit x. Dann ist C D = r — x, und A D oder $\frac{1}{2}$ r die mittlere Proportionale zwischen D E und den um D E verminderten Durchmesser, d. h.

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = (2\,r - x)\,x,$$
$$\text{oder } \tfrac{1}{4}\,r^2 = 2\,r\,x - x^2;$$
$$\text{also } x^2 - 2\,r\,x = -\tfrac{1}{4}\,r;$$
$$\text{folglich } x = r \pm \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,r^2} = r \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}\,r^2} = r \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\,r \cdot \tfrac{3}{2}\,r};$$

d. h. x ist gefunden, wenn man vom Radius die mittlere Proportionale zwischen $\frac{1}{2}$ r und $\frac{3}{2}$ r abschneidet. Da der Abstand DE stets kleiner als der Radius sein muß, so darf das (+) Zeichen hier nicht in Anwendung kommen. Die Lage der Parallele A B

ergibt sich demnach, wenn man auf dem in der Mitte des Durchmessers rechtwinkelig errichteten Radius C E von E aus eine Linie E D gleich dem gefundenen Werth von x abschneidet und durch D mit F G eine Parallele A B legt, welche den Halbkreis in A und B schneidet. Werden diese Punkte mit C verbunden, so ist Dreieck A B C das verlangte.

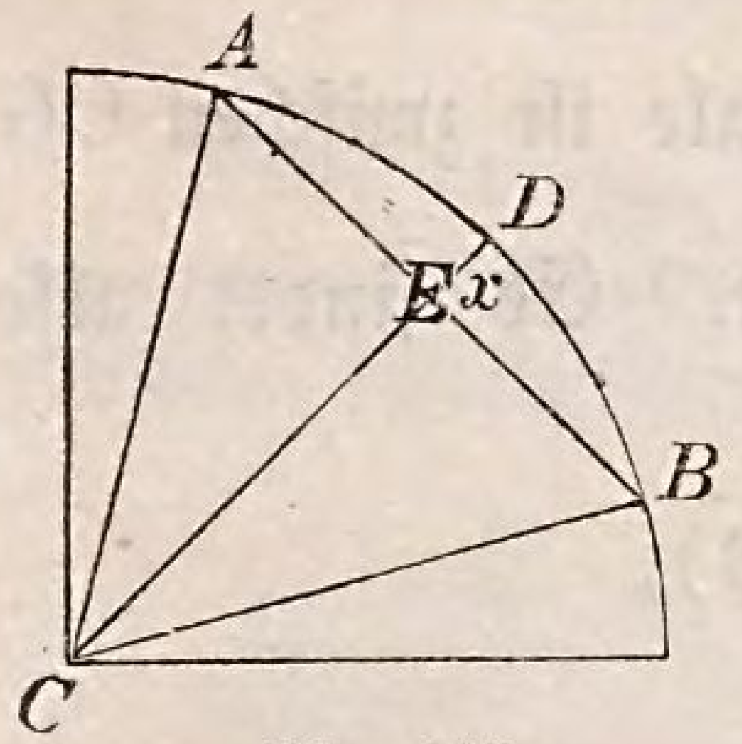


Fig. 117.

152. Aufgabe. In einen Quadranten ein gleichseitiges Dreieck A B C so zu zeichnen, daß die eine Spitze C in die rechtwinkelige Ecke des Quadranten und die ihr gegenüberliegende Seite A B in den Kreisbogen fällt.

Auflösung. Zieht man von C aus nach der Mitte des Bogens den Radius C D, so halbirt derselbe die Seite A B. Da A B dem Radius gleich ist, so beträgt A E die Hälfte desselben oder $\frac{r}{2}$. Ferner ist A E die mittlere Proportionale zwischen D E und dem um diese Linie verminderten Durchmesser. Es ergibt sich also, wenn D E = x gesetzt wird, die Gleichung:

$$\tfrac{1}{4} r^2 = (2 r - x) x,$$

woraus, wie in der vorigen Aufgabe,

$$x = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} r^2}$$

gefunden wird.

Nun schneide man von D aus eine Linie D E = x von dem Radius C D ab und lege durch E senkrecht auf C D eine Linie A B. Die Durchschnittspunkte derselben mit dem Bogen, nämlich A und B, sind die beiden andern Ecken des gesuchten Dreiecks ABC.

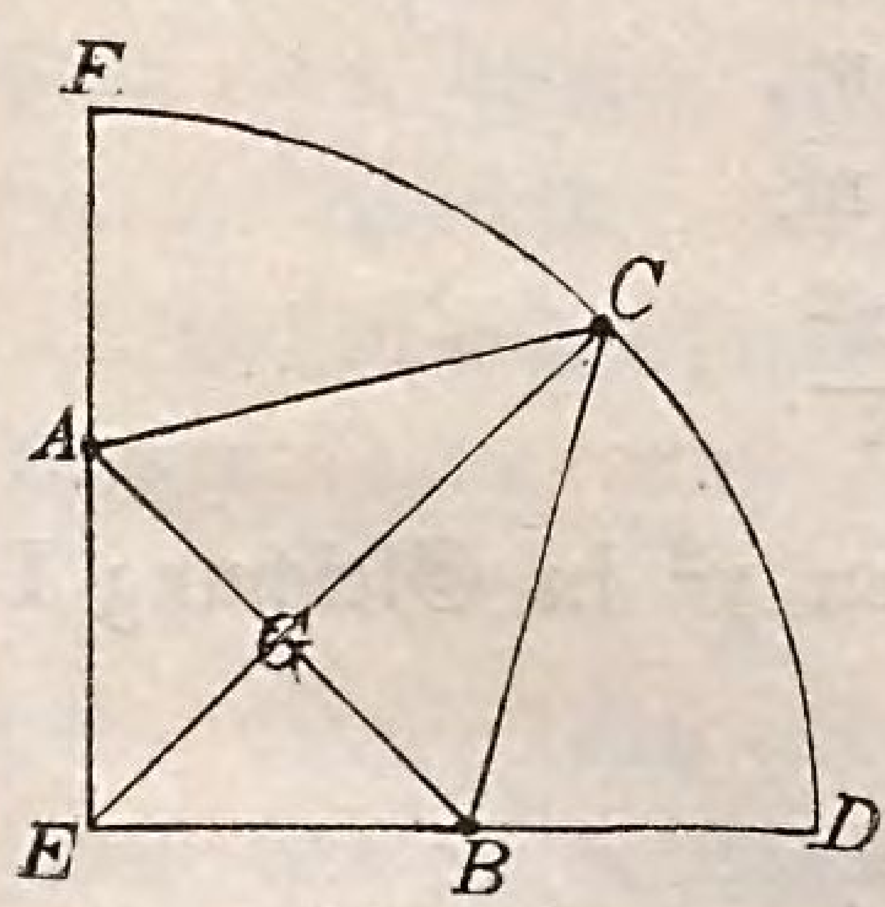


Fig. 118.

153. Aufgabe. In einen Quadranten ein gleichseitiges Dreieck A B C so zu zeichnen, daß die Spitze C in den Bogen fällt und die ihr gegenüberliegende Seite A B von den beiden Radien des Quadranten, nämlich von DE und EF, begrenzt wird.

Auflösung. Wird nach der Mitte des Bogens der Radius E C gezogen, so ist A B in G halbirt, nämlich $AG = BG = \frac{x}{2}$, wenn die Seite des Dreiecks A B C = x gesetzt wird. Ferner hat man $CG = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, während noch die Linie B G oder $\frac{x}{2}$ die mittlere Proportionale ist zwischen CG und dem um C G verminderten Durchmesser. Es findet also folgende Gleichung statt:

$$\tfrac{1}{4}x^2 = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3}\,(2r - \tfrac{1}{2}x\sqrt{3}),$$

oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{3}\,(2r - \frac{1}{2}x\sqrt{3})$,

also $2x = 2r\sqrt{3}$;

folglich $x = r\sqrt{3} = \sqrt{r \cdot 3r}$;

d. h. die Seite des verlangten Dreiecks A B C ist die mittlere Proportionale zwischen dem Radius und einer Linie, die das Dreifache desselben beträgt.

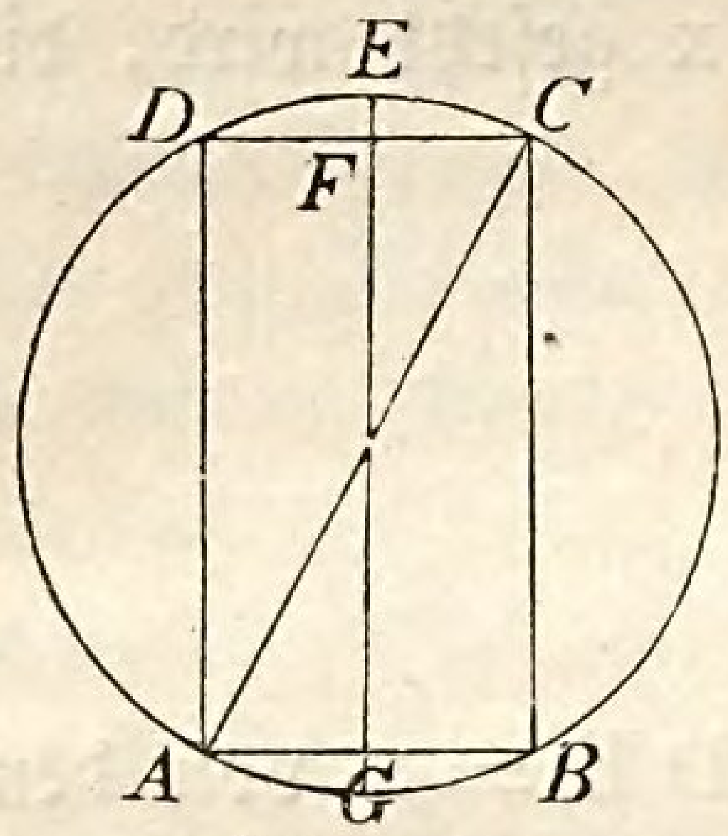


Fig. 119.

154. Aufgabe. In einen Kreis ein Rechteck A B C D zu zeichnen, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten ein vorgeschriebenes Verhältniß (m : n) haben.

Auflösung. Es sei C D = x und A D = y und der Radius des Kreises = r. Zur Bestimmung von x und y dienen die beiden Gleichungen:

$AC^2 = CD^2 + AD^2$,

d. i. I. $(2r)^2 = x^2 + y^2$,

und $AD : CD = n : m$,

d. i. II. $y : x = n : m$.

Aus II. folgt $y^2 = \frac{n^2 x^2}{m^2}$.

Durch Substitution dieses Werthes von y^2 in Gleichung I. verwandelt sich dieselbe in

$$4r^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2}\right)x^2,$$

woraus sich ergibt $x^2 = \frac{4\,m^2\,r^2}{m^2 + n^2}$;

$$\text{folglich } x = \sqrt{\frac{2\,m\,r \cdot 2\,m\,r}{m^2 + n^2}} = 2\,m\,r\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}$$

$$\text{und } y = \sqrt{\frac{2\,n\,r \cdot 2\,n\,r}{m^2 + n^2}} = 2\,n\,r\sqrt{\frac{1}{m^2 + n^2}}.$$

Anmerkung. Der erste Ausdruck für x und y eignet sich vorzugsweise zur Construction, während der zweite das Verhältniß der Rechtecksseiten sogleich deutlich erkennen läßt.

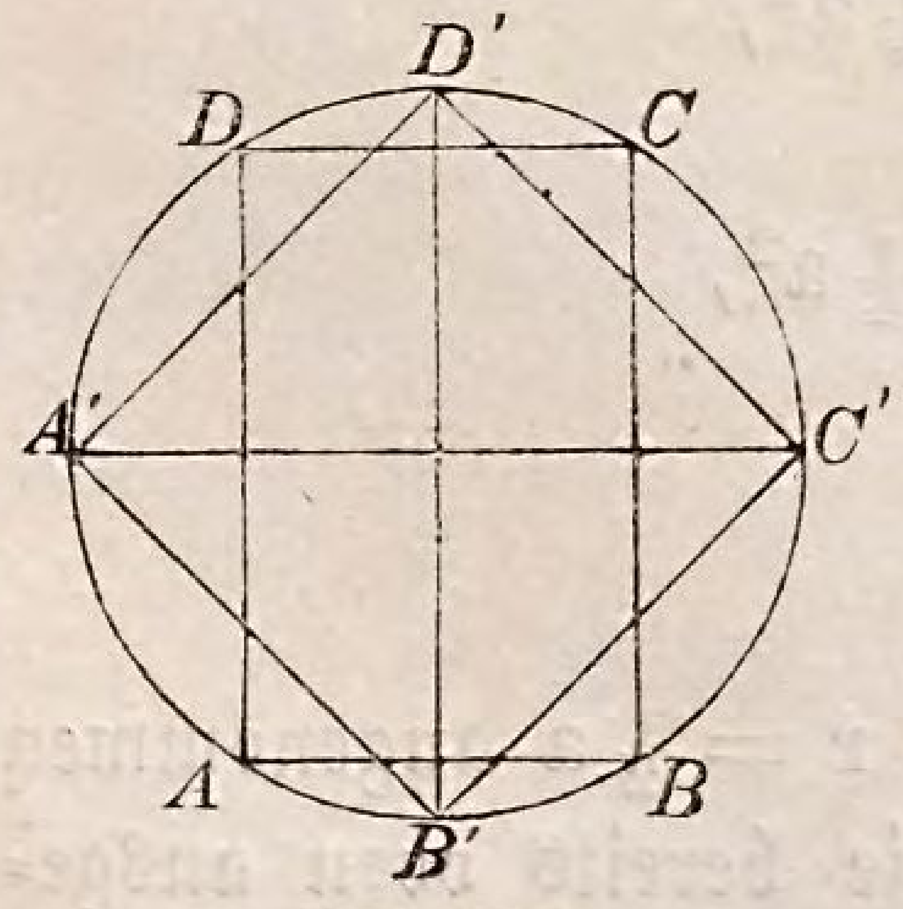


Fig. 120.

155. Aufgabe. In einen Kreis ein Rechteck A B C D zu zeichnen, welches einen vorgeschriebenen Umfang $= 2\,a$ hat.

Auflösung. Wenn r den Radius vorstellt, und die zu suchenden Rechtecksseiten mit x und y bezeichnet werden, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } x + y = a. \qquad \text{II. } x^2 + y^2 = 4\,r^2.$$

Aus I. folgt $y = a - x$.

Dieser Werth in II. statt y gesetzt, gibt

$$x^2 + (a - x)^2 = 4\,r^2,$$

$$\text{oder } 2\,x^2 - 2\,a\,x = 4\,r^2 - a^2,$$

$$\text{oder } x^2 - a\,x = 2\,r^2 - \tfrac{1}{2}\,a^2;$$

$$\text{also } x = \tfrac{1}{2}\,a \pm \sqrt{2\,r^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2}$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}\,a \mp \sqrt{2\,r^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2}.$$

Es lassen sich demnach die Werthe von x und y vertauschen. Das (+) Zeichen gilt für die größere Seite, das (—) Zeichen für die kleinere.

Determination. Damit diese Aufgabe auch wirklich gelöst werden könne, muß

$$\tfrac{1}{4}\,a^2 \leqq 2\,r^2 \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,a \leqq r\sqrt{2}$$

sein. Wenn man $\frac{1}{2}\,a = r\sqrt{2}$ annimmt, so wird $x = y = \frac{1}{2}\,a$, sodaß das zu construirende Rechteck ein Quadrat wird. Demnach hat dasselbe unter allen Rechtecken, die in den Kreis gezeichnet

werden können, den größten Umfang. Ferner müssen x und $y > o$ und $< 2r$ sein. Für die größere Seite bedarf dies keines weitern Beweises, wol aber für die kleinere Seite. In Bezug auf diese ist nämlich erforderlich, daß

$$\tfrac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
$$\text{oder } \tfrac{1}{4}a^2 > (2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2),$$
$$\text{folglich } \tfrac{1}{2}a^2 > 2r^2,$$
$$\text{also } a > 2r$$

sei; und damit $y < 2r$ werde, muß

$$2r > \tfrac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
$$\text{oder } 2r - \tfrac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2},$$
$$\text{also auch } 4r^2 - 2ar + \tfrac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$
$$\text{d. i. } 2r^2 - 2ar + \tfrac{1}{2}a^2 > o,$$
$$\text{oder } r^2 - ar + \tfrac{1}{4}a^2 > o,$$
$$\text{d. h. } (r - \tfrac{1}{2}a)^2 > o$$

sein, was stets der Fall ist, solange nicht $r = \tfrac{1}{2}a$ angenommen wird. Der größte Werth für $\tfrac{1}{2}a$ ist, wie bereits oben ausgesprochen worden, $r\sqrt{2}$, also jedenfalls $\tfrac{1}{2}a < 2r$.

Anmerkung. Um die für x und y gefundene Formel zu construiren, hat man zunächst ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, dessen Katheten jede $= r$ sind; die Hypotenuse wird dann $= \sqrt{2r^2}$. Der Kürze wegen wollen wir dieselbe mit s bezeichnen. Hierauf ist eine Linie u zu suchen, sodaß $u = \sqrt{s^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$ wird. Man hat also über $s = r\sqrt{2}$ einen Halbkreis zu zeichnen und in denselben von dem einen Endpunkte der Linie $r\sqrt{2}$ aus $\tfrac{1}{2}a$ als Sehne einzutragen und die noch fehlende Kathete (ebenfalls eine Sehne) zu ziehen. Diese letztere ist $= \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$, und wenn man dieselbe zu $\tfrac{1}{2}a$ hinzufügt, oder von ihr abschneidet, so erhält man die verlangten Seiten des Rechtecks.

156. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis, dessen Radius $= r$, ein Rechteck von dem Inhalt a^2 zu construiren.

Auflösung. Wenn die beiden anstoßenden Seiten des Rechtecks mit x und y bezeichnet werden, so ergeben sich folgende beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I. } xy = a^2 \text{ und II. } x^2 + y^2 = 4r^2,$$
$$\text{oder } 2xy = 2a^2.$$

Wird der Werth von $2xy$ zu II. hinzugezählt, oder von II. abgezogen, so findet sich:
III. $(x+y)^2 = 4r^2 + 2a^2$ und IV. $(x-y)^2 = 4r^2 - 2a^2$, woraus folgt:

V. $x+y = \sqrt{4r^2 + 2a^2}$ und VI. $x-y = \sqrt{4r^2 - 2a^2}$;
und aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Addition, resp. Subtraction,

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 + 2a^2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 2a^2}.$$

Die Construction dieser Formeln wird der oben geschehenen Auseinandersetzung gemäß leicht ausgeführt, da lediglich der Pythagoräische Lehrsatz hierzu erforderlich ist.

Zusatz. Sollte der Inhalt des gesuchten Rechtecks $= 2r^2$ sein, so wäre $x - y = o$ oder $x = y$; die Figur selbst also ein Quadrat im Kreise, welches unter allen Rechtecken, die in den Kreis gezeichnet werden können, den größten Flächeninhalt hat.

Anmerkung. Daß überhaupt unter allen Rechtecken von demselben Umfange das Quadrat den größten Flächeninhalt hat, läßt sich in folgender Art nachweisen. Wenn I den Inhalt, $p + q$ die Seite x, und $p - q$ die Seite y vorstellt, so hat man

$$xy = (p+q)(p-q) = I,$$
$$\text{oder } p^2 - q^2 = I.$$

Der Inhalt I wird aber offenbar am größten sein, wenn der Subtrahend q^2, also auch q, $= o$ ist. Dadurch wird sowol x als $y = p$. Aus der Gleichung

$$xy = p^2 = I$$

folgt daher, daß das Rechteck mit dem möglichst größten Flächeninhalt ein Quadrat sein muß.

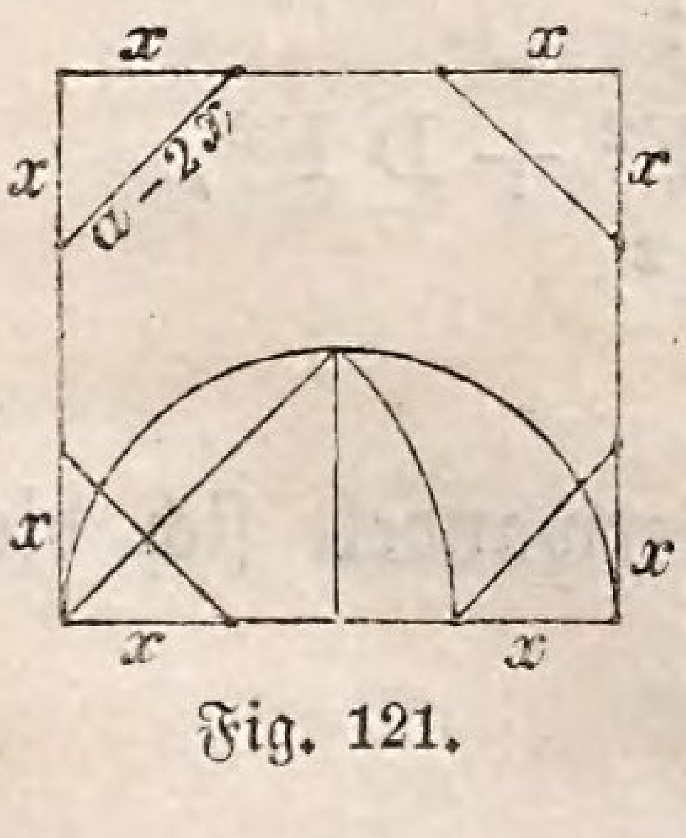


Fig. 121.

157. Aufgabe. Von einem Quadrat vier rechtwinkelige Dreiecke derartig abzuschneiden, daß ein regelmäßiges Achteck übrig bleibt.

Auflösung. Soll das übrigbleibende Achteck regelmäßig werden, so müssen die vier abzuschneidenden Dreiecke gleichschenkelig und congruent sein. Wenn die Kathete eines solchen Dreiecks mit x

bezeichnet wird, und die Seite des Quadrats $= a$ gegeben ist, so ist die Seite des regelmäßigen Achtecks, oder was dasselbe ist, die Hypotenuse eines jeden abzuschneidenden Dreiecks $= a - 2x$.

Daraus folgt:

$$x^2 + x^2 = (a - 2x)^2,$$

$$\text{oder } 2x^2 = a^2 - 4ax + 4x^2,$$

$$\text{oder } o = a^2 - 4ax + 2x^2,$$

$$\text{oder } -a^2 = 2x^2 - 4ax,$$

$$\text{oder } -\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax,$$

$$\text{also } x = a \pm \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{2}a^2} = a \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}}).$$

Anmerkung. Nach der ersten Formel hat man die Wurzel von der Differenz zweier Quadrate, und nach der zweiten die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{1}{2}$ a zu finden. Der zweite Weg ist also der bequemere. Nur bleibt noch unentschieden, welches der beiden $(\pm)$ Zeichen in Wahrheit angewendet werden darf. Offenbar muß x, weil ein Abschnitt der Quadratseite, kleiner als a werden; folglich gilt hier nur das $(-)$ Zeichen, und ist demnach

$$x = a - \sqrt{a \cdot \tfrac{1}{2}a}.$$

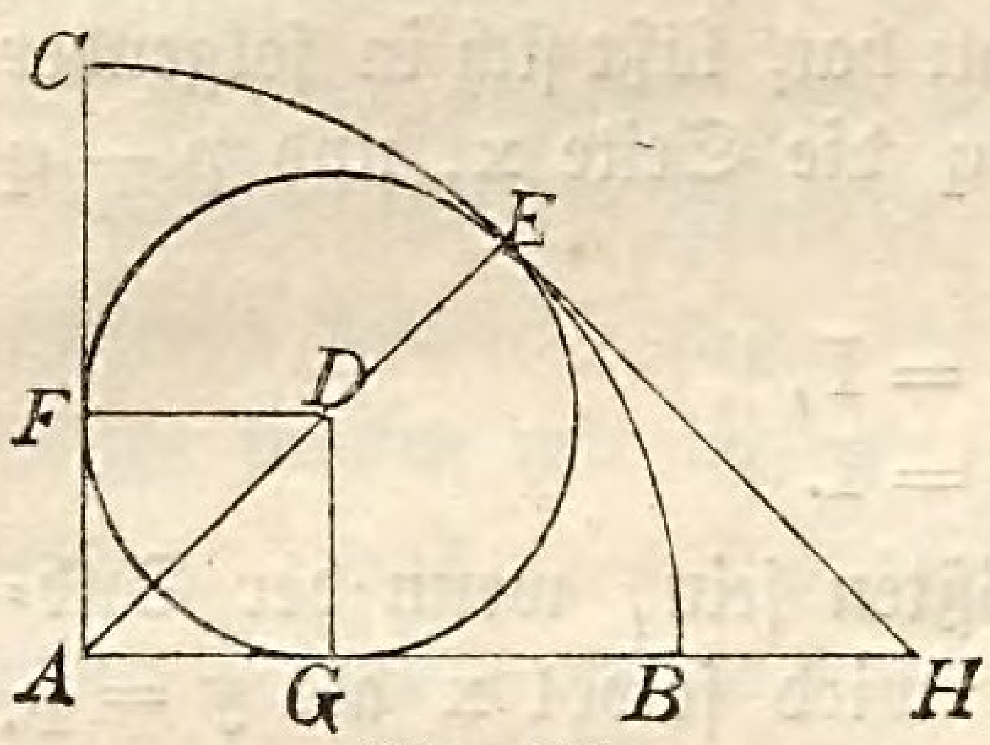


Fig. 122.

158. Aufgabe. In einen Quadranten, dessen Radius $= r$ ist, einen Kreis dergestalt zu zeichnen, daß derselbe die beiden Radien A B und A C und auch den Bogen B C berührt.

Auflösung. Offenbar liegt der Mittelpunkt D des gesuchten Kreises in der Linie A E, welche den Quadranten halbirt. Wenn daher der Radius des zu construirenden Kreises $= x$ und die Linie A D $= y$ gesetzt wird, so ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I. } AD + DE = r \text{ und II. } AD^2 = AF^2 + DF^2,$$

$$\text{oder } y + x = r \quad \text{oder} \quad y^2 = 2x^2.$$

Aus I. folgt III. $x = r - y$,
und durch Substitution dieses Werthes von x verwandelt sich die Gleichung II in

$$y^2 = 2r^2 - 4ry + 2y^2,$$

$$\text{oder } y^2 = 4ry - - 2r^2;$$

woraus sich ergibt:

$$y = 2r \pm \sqrt{2r^2} = 2r \pm r\sqrt{2} = r(2 \pm \sqrt{2})$$

und nach III. $x = -r \mp \sqrt{2r^2} = -r \mp r\sqrt{2} = r(-1 \mp \sqrt{2})$.

Da aber x reell werden muß, so ist

$$DE = r(-1 + \sqrt{2}) = -r + \sqrt{2r \cdot r}$$

und deshalb $AD = r(2 - \sqrt{2}) = 2r - \sqrt{2r \cdot r}$.

Anmerkung. Man findet also DE, wenn man zunächst die mittlere Proportionale zwischen 2 r und r sucht und von dieser dann r abschneidet; während AD sich ergibt, wenn die erwähnte Proportionale von 2 r abgeschnitten wird. Soll die erstere Formel construirt werden, so hat man auf AE (oder r) die senkrechte EH zu errichten, bis sie AB in H trifft; dann ist nämlich $AH = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$ und $BH = DE = AF$. Um den gesuchten Mittelpunkt D zu finden, muß man daher $AF = BH$ machen und durch F mit AH die Parallele FD ziehen, bis diese die Linie AE in D schneidet.

159. Aufgabe. In ein rechtwinkeliges Dreieck ABC das möglichst größte Rechteck (BDEF) zu zeichnen.

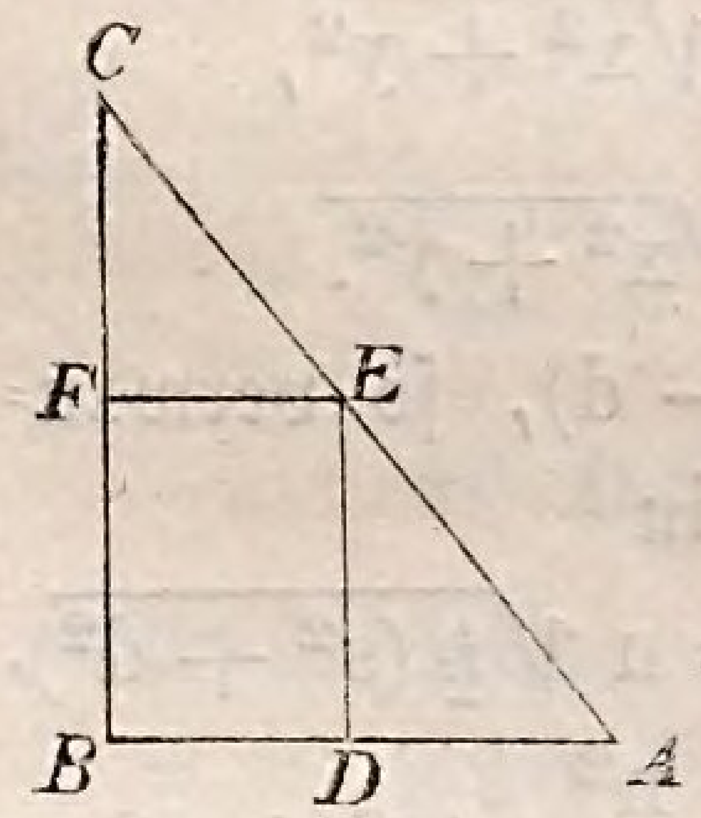


Fig. 123.

Auflösung. Es sei $AB = c$, $BC = a$ gegeben und $BD = x$, so wie $DE = y$ gesucht, so ergibt sich:

$$AD : DE = AB : BC,$$

d. i. $c - x : y = c : a$,

und deshalb $y = \frac{a(c-x)}{c}$,

folglich $xy = \frac{ax(c-x)}{c}$.

Dies ist aber der Inhalt des Rechtecks BDEF, und für welchen Werth von x derselbe der größte wird, bedarf erst noch näherer Untersuchung. Zu diesem Zweck führe man eine neue Größe z ein, und zwar derartig, daß

$$x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}z,$$

also $c - x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}z$

ist. Dadurch wird der Inhalt des gesuchten Rechtecks

$$xy = \frac{a(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}z)(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}z)}{c} = \frac{a(\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}z^2)}{c},$$

und offenbar der größte sein, wenn man $z = o$ annimmt; denn dann ist $x = \frac{1}{2} c$ und $y = \frac{1}{2} a$, also $x y = \frac{1}{4} a c$, d. h. das größte Rechteck im Dreieck $A B C$ ist gerade die Hälfte desselben.

160. Aufgabe. Der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks ist $= I$ gegeben, außerdem der Umfang des hineinbeschriebenen möglichst größten Rechtecks $= \frac{n}{m}$ des Umfangs des Dreiecks. Man soll hiernach die Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks bestimmen. (Fig. 123.)

Auflösung. Man setze $A B = x$ und $B C = y$, dann ist (nach der vorigen Aufgabe) $B D = \frac{1}{2} x$ und $B F = \frac{1}{2} y$; also der Umfang des rechtwinkeligen Dreiecks $= x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ und der Umfang des Rechtecks $= x + y$.

Hieraus ergibt sich:

$$\text{I. } \frac{x y}{2} = I, \quad \text{und II. } x + y = \frac{n}{m} \cdot (x + y + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\text{oder } x y = 2 I, \quad \text{oder } (x + y) \left(\frac{m - n}{m}\right) = \frac{n}{m} \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{oder } (m - n)(x + y) = n \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}(s + d)$ und $y = \frac{1}{2}(s - d)$, so verwandeln sich diese Gleichungen durch Substitution in

$$\text{III. } \tfrac{1}{4}(s^2 - d^2) = 2 I \text{ und IV. } (m - n) \cdot s = n \sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2 + d^2)},$$

$$\text{oder } s^2 - d^2 = 8 I, \text{ oder } (m - n)^2 \cdot s^2 = \frac{n^2}{2} \cdot (s^2 + d^2),$$

$$\text{also } d^2 = s^2 - 8 I.$$

Dieser Werth von d^2, statt d^2 in IV. gesetzt, gibt:

$$\text{V. } (m - n)^2 \cdot s^2 = \tfrac{1}{2} n^2 \cdot (2 s^2 - 8 I) = n^2 s^2 - 4 n^2 I,$$

woraus folgt:

$$\text{VI. } (m^2 - 2 m n) s^2 = - 4 n^2 I,$$

$$\text{oder } s^2 = \frac{- 4 n^2 I}{m^2 - 2 m n};$$

und wenn man diese Bruchformel im Zähler und Nenner mit $- 1$ multiplicirt:

$$s^2 = \frac{4 n^2 I}{m (2 n - m)},$$

$$\text{also VII. } s = \frac{2n}{m}\sqrt{\frac{m I}{2n - m}};$$

und hieraus nach III., wo $d^2 = 8 I$ gefunden worden,

$$\text{VIII. } d = 2\sqrt{\frac{(n^2 - 4mn + 2m^2) I}{m(2n - m)}}.$$

Aus s und d aber findet sich schließlich:

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4mn + 2m^2}}{\sqrt{m(2n - m)}} \cdot \sqrt{I},$$

$$y = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4mn + 2m^2}}{\sqrt{m(2n - m)}} \cdot \sqrt{I}.$$

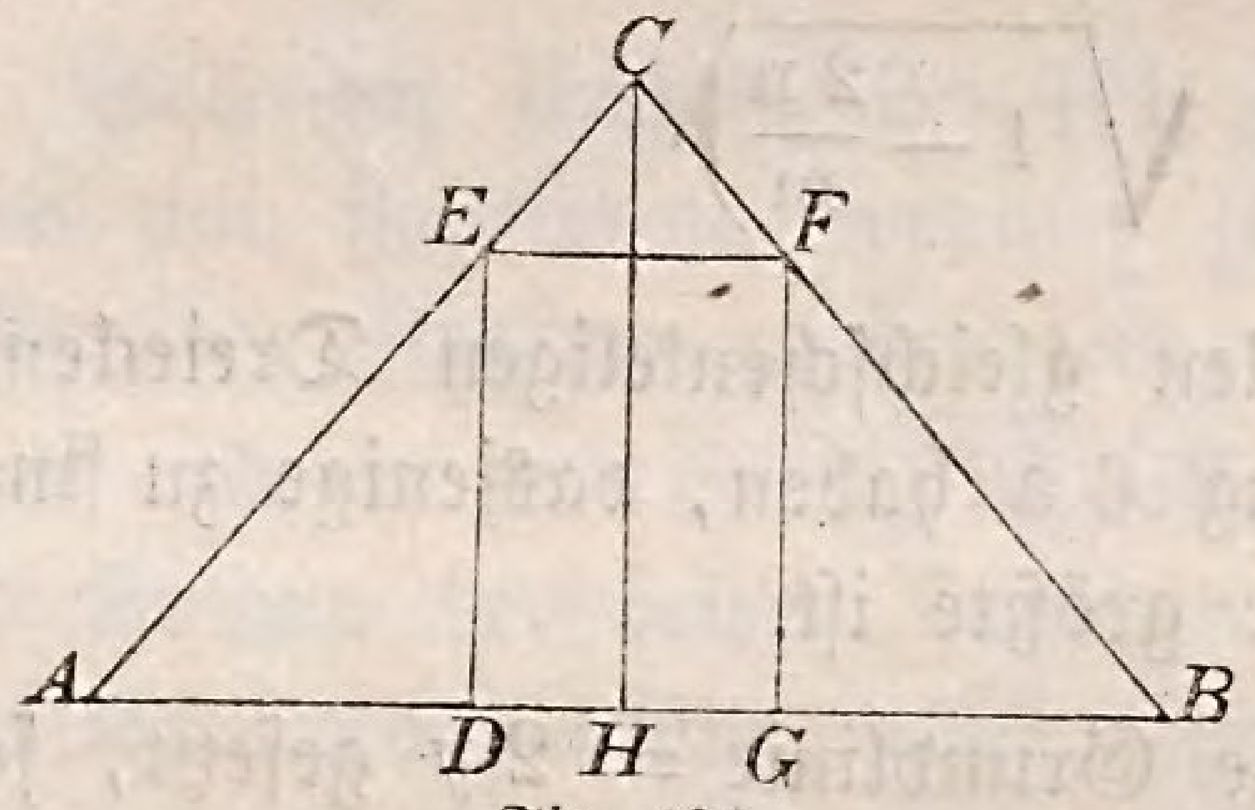


Fig. 124.

161. Aufgabe. Es sind Grundlinie und Höhe eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC gegeben; die Seiten eines darin beschriebenen Rechtecks DEFG zu bestimmen, dessen Inhalt $\frac{n}{m}$ des Dreiecks A B C ist.

Auflösung. Es sei $AB = a$, $CH = h$ gegeben, und $DE = x$, sowie $EF = y$ gesucht, so hat man:

$$1.\ x y = \frac{n}{m} \cdot \frac{a h}{2}, \text{ also } y = \frac{a h n}{2 m x}$$

und $2.\ h - x : h = y : a,$

oder $3.\ a h = h y + a x.$

Der Werth von y (bei 1) in die Gleichung 3 gesetzt, verwandelt dieselbe in

$$4.\ a h = \frac{a h^2 n}{2 m x} + a x,$$

woraus sich ergibt:

$5.\ 2 a m x^2 - 2 a h m x = - a h^2 n,$

oder $6.\ x^2 - h x = - \frac{n h^2}{2 m};$

folglich ist 7. $x = \frac{1}{2} h \left(+1 \pm \sqrt{\frac{m-2n}{m}}\right) = \frac{1}{2} h \left(+1 \pm \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right)$,

also 8. $y = \frac{1}{2} a \left(+1 \pm \sqrt{\frac{m-2n}{m}} = \frac{1}{2} a \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right)\right.$.

Anmerkung. Da dies die Werthe der Rechtecksseiten DE und EF sind, so kann diesmal nur sein

$$\text{entweder } x = \frac{1}{2} h \left(+1 + \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right)$$

$$\text{und } y = \frac{1}{2} a \left(+1 - \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right),$$

$$\text{oder } x = \frac{1}{2} h \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right)$$

$$\text{und } y = \frac{1}{2} a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2n}{m}}\right).$$

162. Aufgabe. Unter allen gleichschenkeligen Dreiecken, welche denselben Umfang 6 a haben, dasjenige zu finden, dessen Inhalt der größte ist.

Auflösung. Wird die ganze Grundlinie $= 2y$ gesetzt, so ist die halbe Grundlinie $= y$ und jeder der beiden gleichen Schenkel $= 3a - y$, also die Höhe $= \sqrt{(3a-y)^2 - y^2} = \sqrt{9a^2 - 6ay}$ $= \sqrt{3a(3a-2y)}$,
demnach der Inhalt des Dreiecks

$$= y\sqrt{3a(3a-2y)} = \sqrt{3a(3a-2y)y^2}.$$

Setzt man nun $y = a - x$, so ist $2y = 2a - 2x$ und $3a - 2y = a + 2x$,

$$\text{also } \sqrt{3a(3a-2y)y^2} = \sqrt{3a(a+2x)(a-x)^2}$$
$$= \sqrt{3a[a^3 - x^2(3a-2x)]}.$$

Wenn x negativ angenommen wird, so ist $3a - 2x$ positiv; und ist x positiv, so wird y oder $a - x$ positiv; und ebenso $3a - 2x$, weil $x < a$ oder $2x < 2a$ oder gar $2x < 3a$ ist. Wie also auch x genommen wird, immer ist $x^2(3a - 2x)$ positiv, demnach $a^3 - x^2(3a - 2x) < a^3$. Offenbar wird dieser Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks den größten Werth ergeben, wenn $x = o$ angenommen wird. Dann ist $y = a$, die

Grundlinie $2y = 2a$ und jeder der beiden Schenkel auch $= 2a$, also das verlangte Dreieck selbst gleichseitig.

163. Aufgabe. Unter allen rechtwinkeligen Dreiecken, welche dieselbe Hypotenuse haben, dasjenige zu finden, welches das Maximum des Umfangs hat.

Auflösung. Die Hypotenuse sei $= h$, die zu suchenden Katheten seien x und y, so hat man, wenn $x = s + d$ und $y = s - d$ angenommen wird,

$$x^2 + y^2 = 2s^2 + 2d^2 = h^2,$$
$$\text{folglich } 2s^2 = h^2 - 2d^2,$$
$$\text{oder } s^2 = \tfrac{1}{2}h^2 - d^2,$$
$$\text{also } s = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 - d^2}.$$

Soll der Umfang $2s + h$ ein Maximum werden, so kann dies nur stattfinden, wenn s zunächst möglichst groß ist; dies wird aber offenbar der Fall sein, wenn man d^2, also auch $d = o$ setzt. Dann ist $s = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2}$, also $2s = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}h^2} = \sqrt{2h^2}$ oder die Summe der beiden Katheten, während die Summe der beiden Kathetenquadrate $= h^2$ gegeben ist, woraus die beiden Katheten selbst leicht gefunden werden. Es ist nämlich:

$$1.\ (x + y)^2 = 2h^2$$
$$\text{und } 2.\ x^2 + y^2 = h^2.$$

Wird die Gleichung 2 von der ersten subtrahirt, so hat man

$$3.\ 2xy = h^2,$$
$$\text{folglich } 4.\ x^2 + y^2 = 2xy,$$
$$\text{oder } 5.\ x^2 - 2xy = -y^2,$$
$$\text{oder } 6.\ (x - y)^2 = o,$$
$$\text{also } 7.\ x = y.$$

Demnach hat das gleichschenkelige Dreieck das Maximum des Umfangs.

Anmerkung. Noch leichter kommt man zu demselben Resultat, wenn sogleich $d = o$ in die oben angenommenen Ausdrücke für x und y substituirt wird, denn dann ist

$$x \text{ oder } s + d = s + o = s$$
$$\text{und } y \text{ oder } s - d = s - o = s,$$

wodurch sich wieder das gesuchte Dreieck als ein gleichschenkeliges erweist.

164. Aufgabe. Unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie a und von gleicher Höhe h dasjenige zu finden, welches das Minimum des Umfangs hat.

Auflösung. Wenn man die gesuchten Seiten mit x und y bezeichnet, und die Höhe h dergestalt die Grundlinie theilt, daß sich die beiden Abschnitte derselben wie $\frac{1}{n} : \frac{n-1}{n}$ verhalten (wobei noch vorausgesetzt wird, daß n eine ganze Zahl ist), so ergeben sich folgende beide Gleichungen:

$$1.\ x^2 = h^2 + \left(\frac{(n-1)\,a}{n}\right)^2 \text{ und } 2.\ y^2 = h^2 + \frac{1}{n^2}\cdot a^2,$$

$$\text{oder } y^2 = h^2 + \frac{a^2}{n^2}.$$

Da der Umfang ein Minimum werden soll, so müssen x und y möglichst kleine Werthe erhalten, und dies kann nur stattfinden, wenn n als ganze Zahl so angenommen wird, daß $\frac{n-1}{n}$ einen möglichst kleinen Bruch ergibt. Diese Zahl muß offenbar größer als 1 sein; sie darf aber nicht mehr als 2 betragen, weil durch jede der folgenden Zahlen der Ausdruck $\frac{n-1}{n}$ einen immer größer werdenden Bruchwerth erhält. Hiernach kann $\frac{n-1}{n}$ nur $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ sein, und ebenso $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Die Grundlinie muß also durch die Höhe halbirt sein, d. h. das verlangte Dreieck kann nur ein gleichschenkeliges werden. Die Seiten x und y selbst sind jetzt leicht zu finden, denn man hat aus den beiden Gleichungen 1 und 2:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ und } y^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$\text{also } x = \sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}a^2} \text{ und } y = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Die Construction besteht einfach darin, daß man auf die Mitte der Grundlinie a die Höhe h lothrecht fällt und die Spitze derselben mit den Endpunkten der Grundlinie verbindet, wodurch sich die gleichen Seiten x und y ergeben.

165. Aufgabe. Unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie a und von gleichem Umfange, $a + b$, dasjenige zu finden, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Da bereits die Summe der beiden andern Seiten $= b$ bekannt ist, so nehme man die eine derselben $= \frac{b}{2} + x$ an; dann ist die andere $= \frac{b}{2} - x$. Der Inhalt des Dreiecks ist demnach, durch die Seiten ausgedrückt,

$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a + b)(a + 2x)(a - 2x)(b - a)},$$

$$\text{oder } = \tfrac{1}{4} \sqrt{(b + a)(b - a)(a + 2x)(a - 2x)},$$

$$\text{oder } = \tfrac{1}{4} \sqrt{(b^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)},$$

und wird offenbar ein Maximum, wenn $4x^2$, also auch $x = 0$ ist. Die beiden gesuchten Seiten sind dann einander gleich, da jede derselben den Werth $\frac{b}{2}$ hat. Folglich hat unter allen Dreiecken auf derselben Grundlinie und von gleichem Umfange das gleichschenkelige Dreieck das Maximum des Inhalts.

Anmerkung. Wie man eine Gleichung zwischen dem Inhalt eines Dreiecks und den Seiten desselben herzuleiten hat, wird im achten Abschnitt, 228. Aufgabe, näher nachgewiesen. Des verwandten Inhalts wegen mußte diese Aufgabe (165), welche die geometrisch-algebraischen Betrachtungen über das Maximum und Minimum vervollständigen hilft, schon hier Platz finden.

Erster Zusatz. In ähnlicher Weise, wie bisher geschehen, lassen sich auch noch folgende Behauptungen begründen:

a) Unter allen Polygonen von gleicher Seitenzahl und von gleichem Umfange ist dasjenige das größte, dessen Seiten einander gleich sind.

b) Unter allen Dreiecken, welche zwei Seiten bezüglich gleich, die dritte aber ungleich haben, hat dasjenige das Maximum des Inhalts, in welchem jene beiden Seiten einen rechten Winkel einschließen.

Stellt man die Dreiecke auf gleiche Grundlinien und sucht man dazu die Höhen, so wird die zugehörige Höhe im rechtwinkeligen Dreiecke größer sein als in jedem andern.

c) Unter allen Parallelogrammen, welche zwei aufeinander folgende Seiten bezüglich gleich haben, ist das Rechteck das größte.

Dieser Satz ist von dem vorigen wesentlich nicht verschieden.

d) Das größte unter allen Polygonen von n gegebenen Seiten ist ein Kreispolygon.

Zweiter Zusatz. Als sehr vortheilhafte Hülfsmittel zur Lösung der Aufgaben vom Maximum und Minimum bewähren sich in vielen Fällen folgende Wahrheiten:

a) Sind zwei Zahlen a und b von verschiedener Größe, so ist ihr doppeltes Product kleiner als die Summe ihrer Quadrate.

Es sei $a > b$ und zwar $a - b = d$ und dabei $d > o$, so ist $2ab < (a^2 + b^2)$, denn es ist

$$a^2 - 2ab + b^2 = d^2,$$

$$\text{also } 2ab = a^2 + b^2 - d^2,$$

$$\text{folglich } 2ab < a^2 + b^2.$$

b) Haben zwei gleiche und zwei ungleiche Zahlen gleiche Summen, so ist das Product aus jenen größer als aus diesen

Ist nämlich $a + a = b + c$

und dabei $b > c$,

so ergibt sich $a^2 > bc$;

denn $4a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

und $b^2 + c^2 > 2bc$ (nach Zusatz 2),

also $4a^2 > 4bc$,

folglich $a^2 > bc$.

Deshalb hat unter allen Rechtecken von gleichem Umfange das Quadrat das Maximum des Umfangs.

c) Je kleiner der Unterschied zweier Zahlen ist, welche dieselbe Summe ergeben, desto größer ist ihr Product.

Es sei $a + b = c + d$ und $a - b < c - d$,

so folgt $ab > cd$;

denn es sei $a + b$ oder $c + d = S$

$a - b = \alpha$ und $c - d = \beta$,

so hat man

$$a + b = S \qquad c + d = S$$
$$a - b = \alpha \qquad c - d = \beta$$

also $a = \frac{1}{2}(S + \alpha)$ $\qquad c = \frac{1}{2}(S + \beta)$

und $b = \frac{1}{2}(S - \alpha)$ $\qquad d = \frac{1}{2}(S - \beta)$.

Demnach ist

$$a\,b = \frac{1}{4}(S^2 - \alpha^2) \text{ und } c\,d = \frac{1}{4}(S^2 - \beta^2).$$

Da $\alpha^2 < \beta^2$ ist, so ergibt sich

$$\frac{1}{4}(S^2 - \alpha^2) > \frac{1}{4}(S^2 - \beta^2);$$

deshalb auch $a\,b > c\,d$.

Sechster Abschnitt.

Geometrische Rectification der Kreislinie. Vom Kreise und von den regelmäßigen Figuren im Kreise und um denselben.

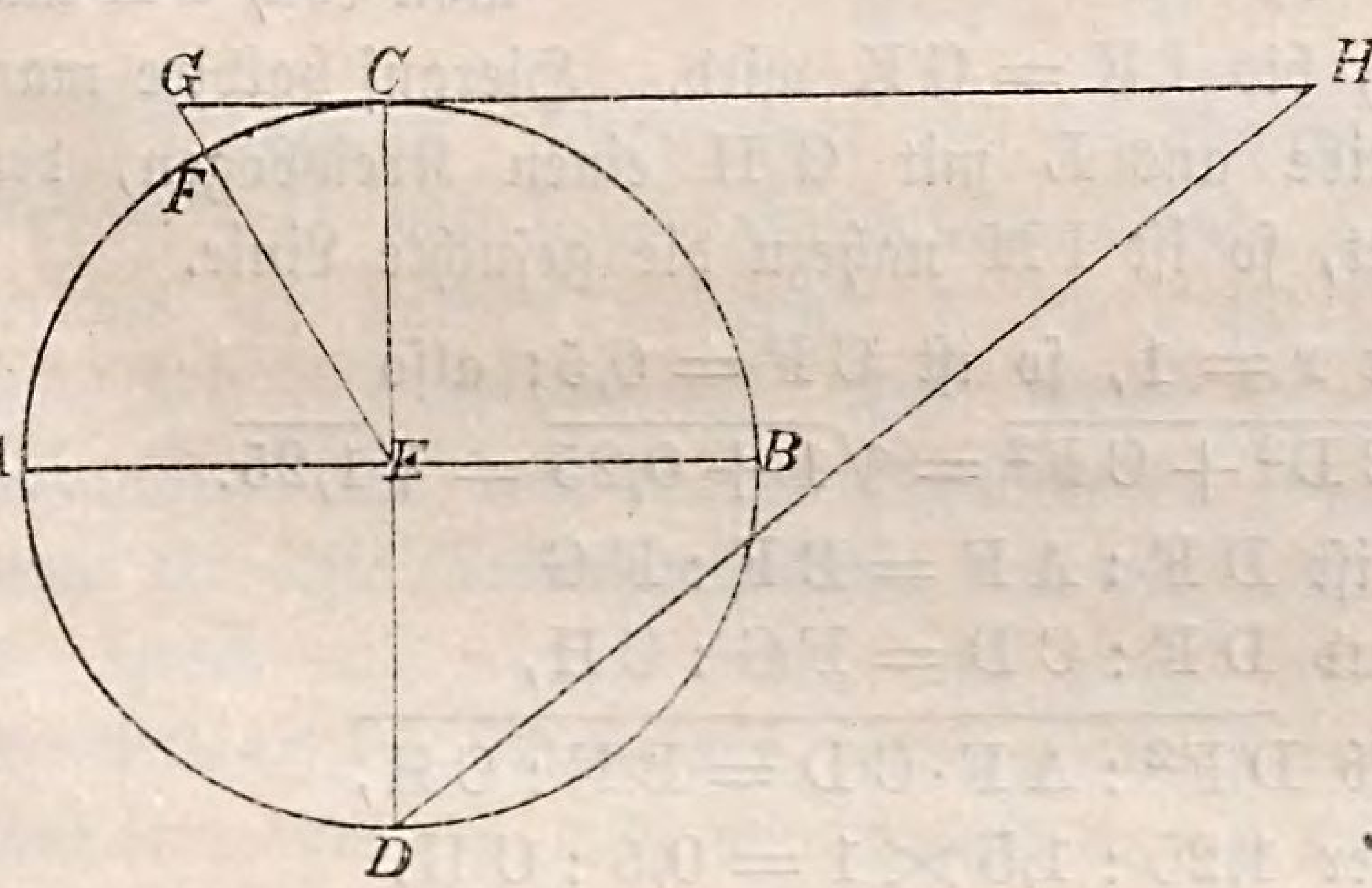


Fig. 125.

166. Aufgabe. Die halbe Peripherie als gerade Linie darzustellen.

Erste Auflösung. Man ziehe die beiden Durchmesser A B und C D, die sich rechtwinkelig schneiden; schneide Bogen $AF = 60°$ ab; verbinde E mit F; lege durch C eine Tangente $GH = 3r$, so ist $DH = r\pi$.

Beweis. Winkel $GEC = 30°$, also ist G C gleich der halben Seite des äußern Sechseck oder $GC = \frac{1}{3} r \sqrt{3}$.

Hieraus folgt $CH = 3r - \frac{1}{3} r \sqrt{3}$,

oder $CH = \frac{1}{3} r (9 - \sqrt{3})$;

demnach $CH^2 = \frac{1}{3} r^2 (28 - 6\sqrt{3})$.

Es ist aber $CD^2 = 4r^2$,

also $DH^2 = \frac{1}{3} r^2 (40 - 6\sqrt{3})$,

folglich $DH = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = 3{,}1415 \ldots r = r\pi$.

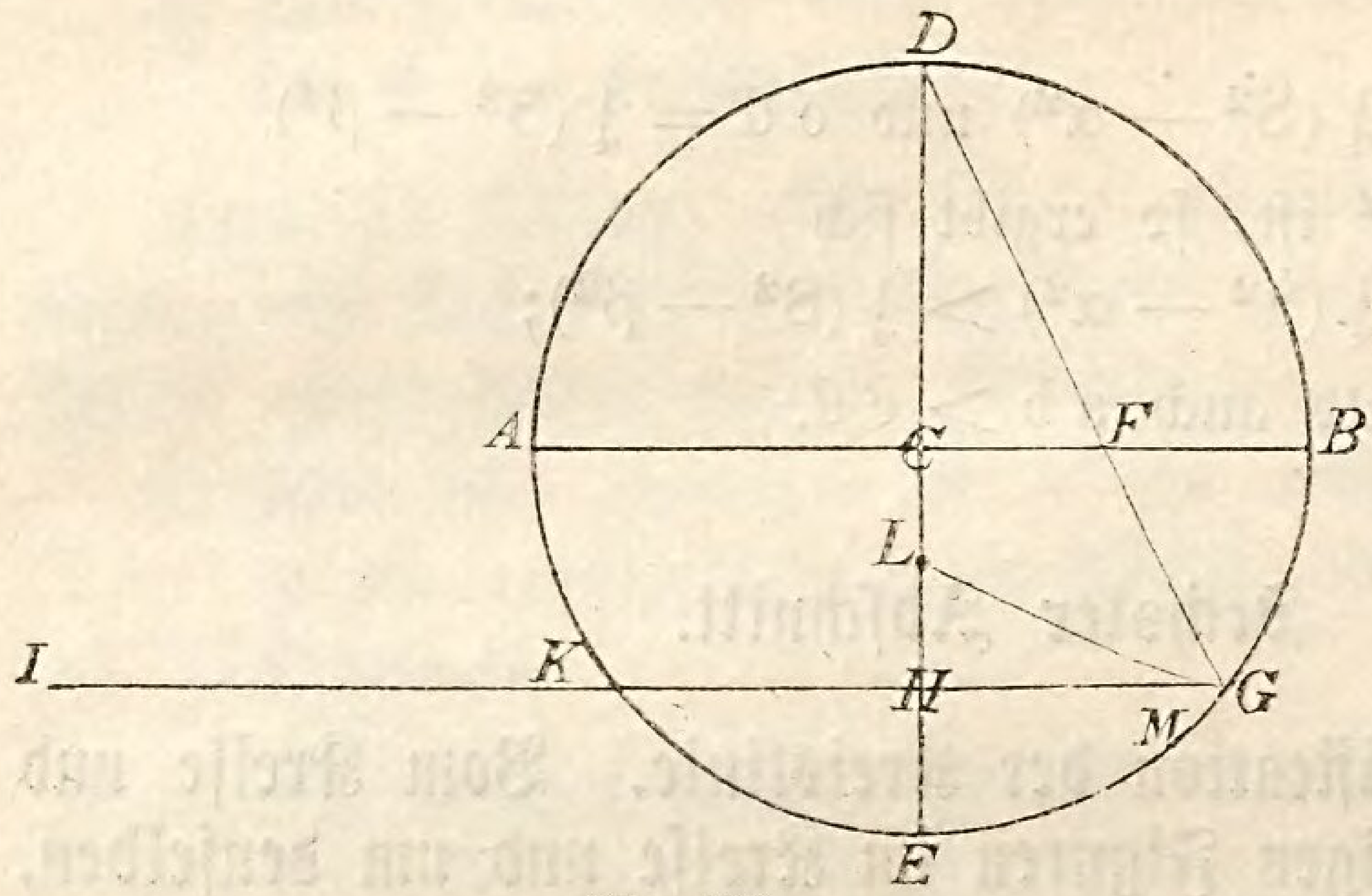


Fig. 126.

Zweite Auflösung.

Man ziehe zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AB und DE, halbire BC, ziehe DF, welche verlängert in G den Kreis schneidet. Nun fälle man Loth GH und verlängere dasselbe, bis IK = GK wird. Hierauf halbire man CH in L, beschreibe aus L mit GH einen Kreisbogen, der GH in M schneidet, so ist IM nahezu die gesuchte Linie.

Beweis. Ist $r = 1$, so ist $CF = 0{,}5$; also

$$DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{1 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}25}.$$

Ferner ist $DF : AF = BF : FG$

und $DF : CD = FG : CH$,

deshalb $DF^2 : AF \cdot CD = BF : CH$,

oder $1{,}25 : 1{,}5 \times 1 = 0{,}5 : CH$,

folglich $CH = \frac{0{,}75}{1{,}25} = 0{,}6$.

Außerdem hat man

$CD : CF = DH : GH$,

d. i. $1 : 0{,}5 = 1{,}6 : GH$;

woraus folgt $GH = 0{,}8$

und $GK = 1{,}6$,

sowie $GI = 3{,}2$.

Da $LH = \frac{1}{2} CH = 0{,}3$ und $LM = GH = 0{,}8$, so ist

$$HM = \sqrt{0{,}64 - 0{,}09} = \sqrt{0{,}55} = 0{,}74161985,$$

$MG = GH - HM = 0{,}8 - 0{,}74161985 = 0{,}05838015$,
also $MI = 3{,}2 - 0{,}05838015 = 3{,}14161985$.

Die wahre Länge des Halbkreises ist aber 3,14159265, folglich ist M I um 0,0000272 des Halbmessers zu groß.

167. Aufgabe. Die Peripherie eines Kreises als gerade Linie darzustellen.

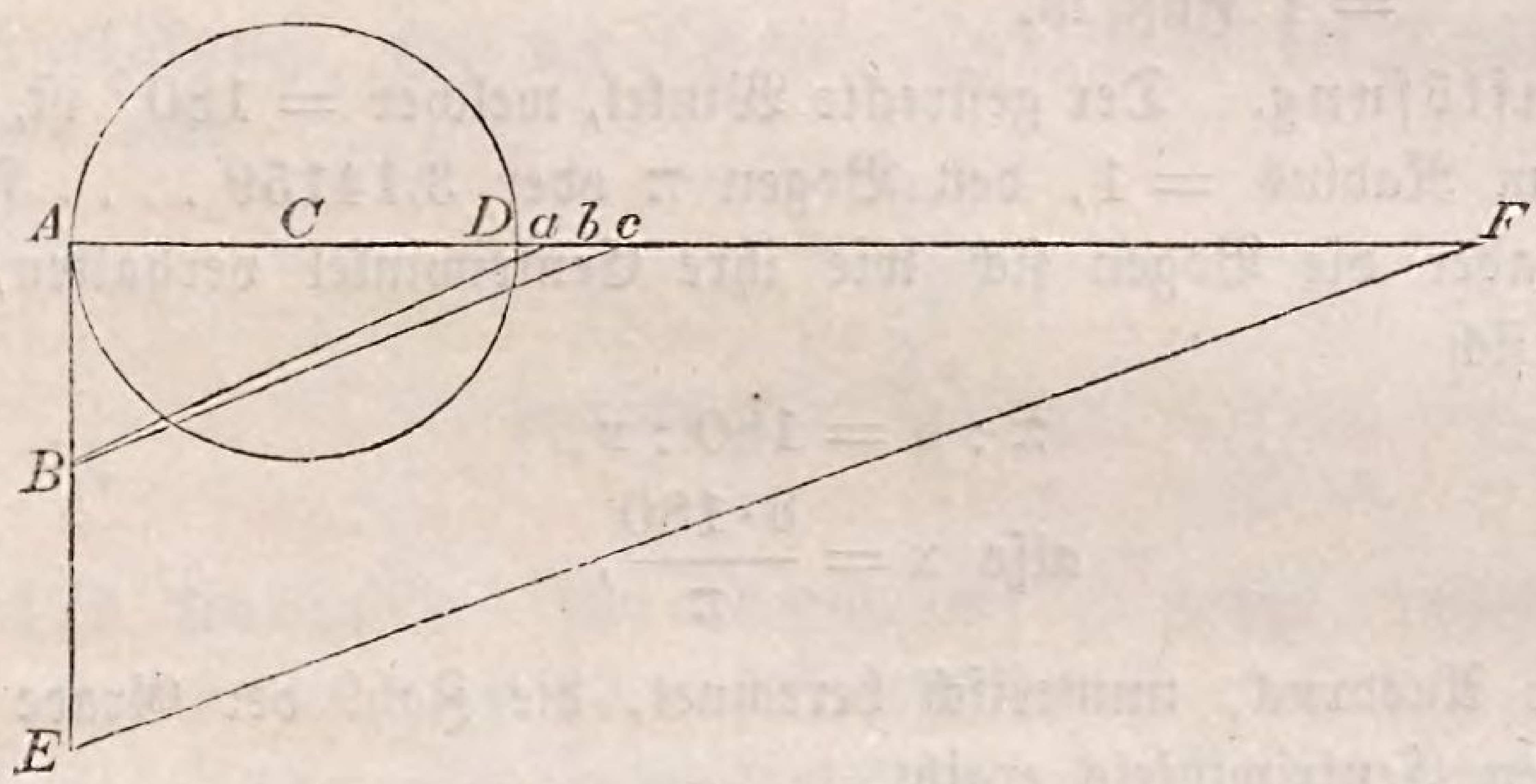


Fig. 127.

Auflösung. Man trage auf der Verlängerung des Durchmessers A D, von seinem Endpunkte D aus, $\frac{1}{5}$ r dreimal ab und errichte im andern Endpunkt A ein Loth A E, von welchem man $AB = r$ abschneidet. Den Punkt B verbinde man mit dem ersten und dem dritten Theilpunkte, nämlich mit a und c, trage die erste Verbindungslinie B a auf dem Lothe von A aus ab, sodaß $AE = Ba$ wird, und ziehe aus E mit B c eine Parallele E F, welche den verlängerten Durchmesser A D in F schneidet; dann ist A F der Peripherie des Kreises gleich.

Beweis. Da die Dreiecke A B c und A E F ähnlich sind, so hat man

$$AB : Ac = AE : AF;$$

und weil $AE = Ba$ ist,

auch $AB : Ac = Ba : AF$,

d. i. $r : \frac{13}{5} r = \sqrt{r^2 + \frac{(11\,r)^2}{5}} : AF$,

oder $r : \frac{13}{5} r = \frac{r}{5}\sqrt{146} : AF$,

oder $25 : 13 = r\sqrt{146} : AF$,

$$\text{folglich } AF = \frac{13\,r}{25}\sqrt{146} = \frac{13\,d}{50}\sqrt{146},$$

welcher Werth bis auf die siebente Decimalstelle sich als richtig erweist.

168. Aufgabe. Den Centriwinkel zu finden, wenn der Bogen desselben = b Fuß und der Radius des Kreises = 1 Fuß ist.

Auflösung. Der gestreckte Winkel, welcher = 180° ist, hat, bei dem Radius = 1, den Bogen π oder 3,14159 .... Fuß. Weil aber die Bogen sich wie ihre Centriwinkel verhalten, so ergibt sich

$$\pi : b = 180 : x,$$

$$\text{also } x = \frac{b \cdot 180}{\pi},$$

welcher Ausdruck, numerisch berechnet, die Zahl der Grade des gesuchten Centriwinkels ergibt.

169. Aufgabe. Es ist gegeben der Centriwinkel = n°, der Radius des Kreises = 1 Fuß; man soll die Länge des Bogens $b = n^\circ$ in Fußen bestimmen.

Auflösung. Nach der vorigen Aufgabe hat man

$$180 : n = \pi : b,$$

$$\text{folglich } b = \frac{n\pi}{180}.$$

Die numerische Berechnung findet hieraus die Zahl der Fuße des zum Centriwinkel n° gehörigen Bogens.

170. Aufgabe. Es ist gegeben der Inhalt eines Sectors (Kreisausschnitts) = s Quadratfuß und der dazu gehörige Centriwinkel = n°; daraus den Radius zu finden.

Auflösung. Wenn der Radius = r Fuß angenommen wird, so ist der Inhalt des ganzen Kreises = $r^2\pi$, und der des Sectors = $\frac{n}{360} \cdot r^2\pi$. Es ist also

$$\frac{n\,r^2\,\pi}{360} = s,$$

$$\text{oder } r^2 = \frac{360 \cdot s}{n \cdot \pi},$$

$$\text{folglich } r = \sqrt{\frac{360 \cdot s}{n \cdot \pi}}.$$

171. Aufgabe. Den Radius des Kreises, r, zu finden, wenn der Inhalt des Sectors = s Quadratfuß und der Bogen des Centriwinkels = b Fuß gegeben ist.

Auflösung. Hat der Radius r Fuß, so ist der Inhalt des Sectors oder

$$s = \frac{b \cdot r}{2},$$

$$\text{woraus } r = \frac{2\,s}{b}$$

folgt.

172. Aufgabe. Den Centriwinkel zu finden, dessen Bogen so lang als der Halbmesser ist.

Auflösung. Der Centriwinkel = x° soll einen Bogen von 1 Fuß haben; deshalb muß sich verhalten:

$$\pi : r = 180 : x,$$

$$\text{woraus } x = \frac{r \cdot 180}{\pi}$$

in Graden gefunden wird. Für den Radius = 1 Fuß wird der Centriwinkel $x = \frac{180}{\pi}$ Grad oder $57^\circ\ 17'\ 44''$.

173. Aufgabe. Ein Kreis, dessen Radius r ist, liegt mit seiner ganzen Fläche in einem andern Kreise, dessen Radius R ist. Man soll den Inhalt des Ringes angeben.

Lösung. Der Inhalt des größern Kreises ist $= R^2 \cdot \pi$, der Inhalt des kleinern $= r^2 \cdot \pi$,

folglich der Inhalt des Ringes

$$= R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi = (R + r)(R - r) \pi,$$

gleichviel ob beide Kreise concentrisch oder excentrisch sind.

174. Aufgabe. Von zwei concentrischen Kreisen ist der Inhalt des Ringes = J und der Radius des größern Kreises = R gegeben; man soll die Breite des Ringes finden.

Auflösung. Wird der unbekannte Halbmesser des kleinern Kreises $= r$ gesetzt, so ergibt sich

$$J = (R^2 - r^2)\,\pi,$$

oder $\frac{J}{\pi} = R^2 - r^2$,

also $r = \sqrt{R^2 - \frac{J}{\pi}}$.

Die Breite des Ringes oder $R - r$ ist demnach

$$= R - \sqrt{R^2 - \frac{J}{\pi}}.$$

175. Aufgabe. Aus der Summe der beiden Radien zweier concentrischen Kreise, $R + r = s$, die Breite des Ringes zu finden, wenn der Inhalt desselben $= J$ sein soll.

Auflösung. Bekanntlich ist

$$(R + r)(R - r)\,\pi = J,$$

daher die Breite des Ringes $R - r = \frac{J}{(R + r)\,\pi} = \frac{J}{s\,\pi}$.

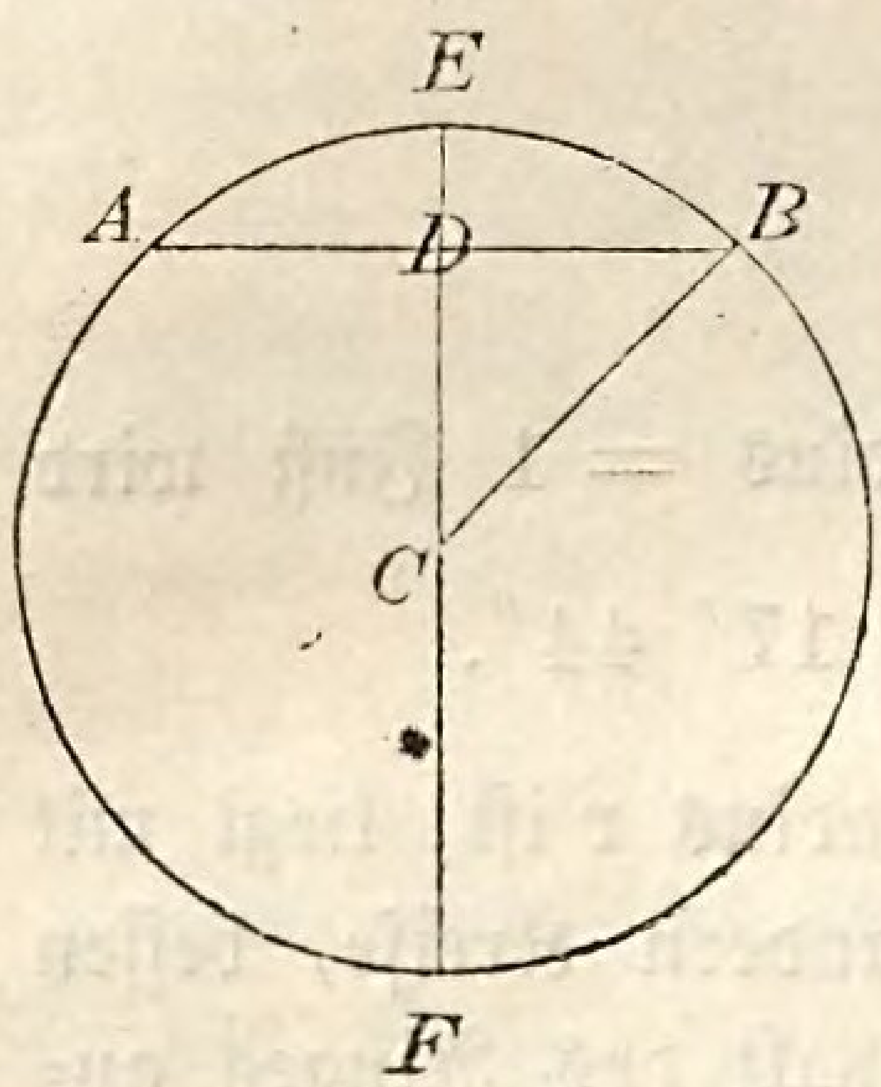


Fig. 128.

176. Aufgabe. Von einem Segment (Kreisabschnitt) ist die Sehne A B $= a$ und die Höhe D E $= h$ gegeben; man soll den Radius r finden.

Auflösung. B D ist die mittlere Proportionale zwischen D E und D F, den beiden Abschnitten des Durchmessers E F. Es ist also

$$DE : BD = BD : DF,$$

d. i. $h : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : 2r - h$;

demnach $2rh - h^2 = \frac{1}{4}a^2$,

oder $2rh = \frac{1}{4}a^2 + h^2$,

folglich $r = \frac{\frac{1}{4}a^2 + h^2}{2h}$.

177. Aufgabe. Von einem Segment sind der Radius $= r$ und die Höhe $= h$ gegeben; daraus die Sehne a zu finden.

Auflösung. Nach der vorigen Aufgabe ist

$$\tfrac{1}{4}a^2 = 2rh - h^2;$$

$$\text{daher } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{2 r h - h^2},$$
$$\text{folglich } a = 2 \sqrt{2 r h - h^2}.$$

178. **Aufgabe.** Die Höhe h des Segments zu finden, wenn der Radius des Kreises $= r$ und die Sehne $= a$ gegeben sind.

Auflösung. Da bereits $\frac{1}{4} a^2 = 2 r h - h^2$ gefunden worden ist, so hat man

$$h^2 - 2 r h = - \tfrac{1}{4} a^2,$$
$$\text{und deshalb } h = r \mp \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} a^2}.$$

Anmerkung. Von den beiden ($\mp$) Zeichen gilt das untere für das kleinere Segment, das obere aber für das größere; wie solches auch an Fig. 128 durch die Anschauung gelehrt wird. In dem rechtwinkeligen Dreiecke $B C D$ ist nämlich die Hypotenuse $B C = r$, die Kathete $B D = \frac{1}{2} a$, also $C D = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$. Die Höhe des kleinern Segments oder $D E$ ist demnach $C E - C D$ d. i. $r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$, während augenscheinlich $D F$ oder die Höhe des größern Segments, als Summe von $C F$ und $C D$, sich $= r + \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$ ergibt.

179. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt F des Kreises zu finden, wenn die Peripherie $= p$ gegeben ist.

Auflösung. Da stets $p = 2 r \pi$ ist, so findet sich zunächst

$$r = \frac{p}{2 \pi}.$$

Ferner ist der Inhalt des Kreises oder $F = r^2 \pi$, folglich auch

$$F = \frac{p^2 \cdot \pi}{4 \pi} = \frac{p^2}{4 \pi} = \tfrac{1}{4} p^2 \cdot \frac{1}{\pi}.$$

180. **Aufgabe.** Aus dem Inhalt einer Kreisfläche $= F$ die Peripherie p zu finden.

Auflösung. Wenn r den unbekannten Radius und d den Durchmesser vorstellt, so ist

$$r^2 \pi = F \text{ oder auch } \tfrac{1}{4} d^2 \pi = F;$$
$$\text{folglich } r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} \quad \text{und} \quad d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}},$$
$$\text{woraus } p = 2 r \pi \text{ oder } d \pi,$$
$$\text{also } p = 2 \pi \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 2 \sqrt{F \cdot \pi}$$

gefunden wird.

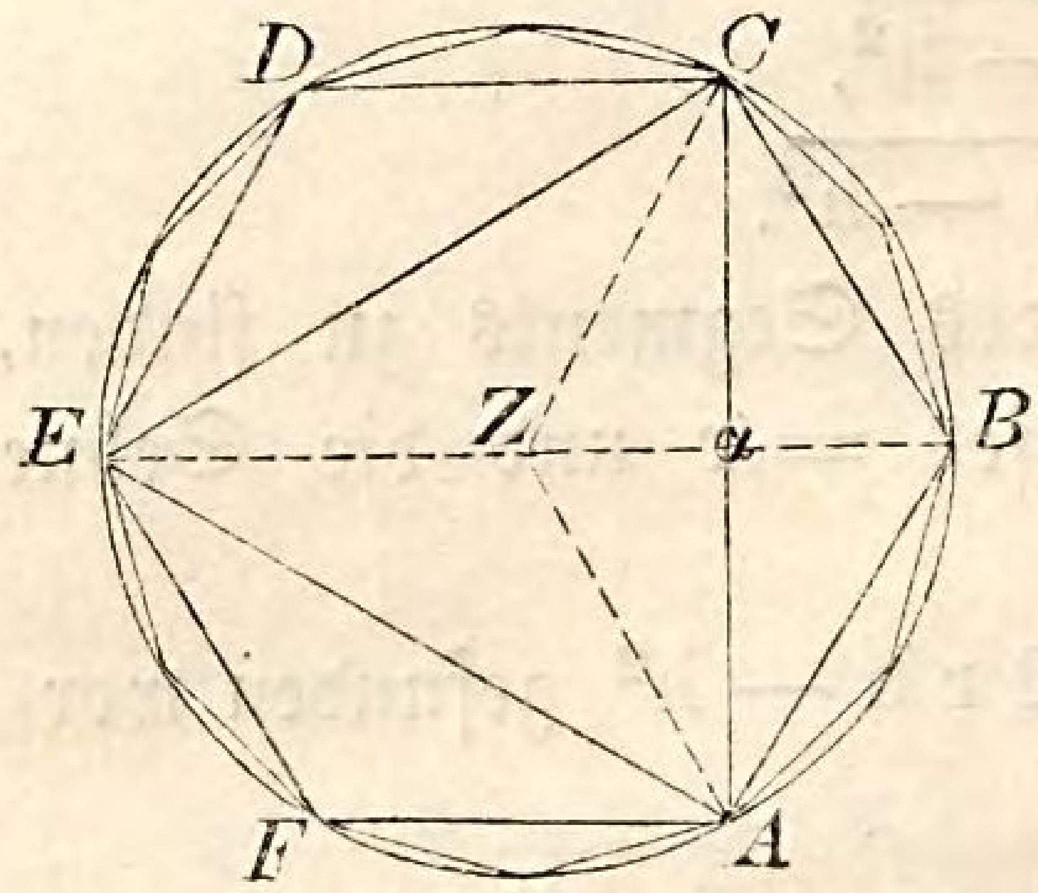


Fig. 129.

181. Aufgabe. Die Seite d des regelmäßigen Sechsecks zu finden, wenn der Radius des umschriebenen Kreises = r gegeben ist.

Lösung. Die Betrachtung der Figur lehrt, daß der Centriwinkel AZB = 60° und die halben Vieleckwinkel Z A B und ZBA ebenfalls = 60° sein müssen. Dreieck Z A B ist also gleichseitig, folglich A B oder d = r.

182. Aufgabe. In einen Kreis, dessen Radius = r ist, ein reguläres Dreieck zu beschreiben.

Construction. Man theile vermittelst des Halbmessers die Peripherie in sechs gleiche Theile, und verbinde je zwei derselben durch eine Sehne; so schließen die drei zusammenstoßenden Sehnen ein reguläres Dreieck ein.

Anmerkung. Setzt man A C, d. i. die Seite des regulären Dreiecks = a, so ist $a^2 = 3\,r^2$. Werden nämlich noch die Radien Z C und Z A gezogen, so erhält man einen Rhombus A B C Z, während offenbar A C den Radius in α halbirt und senkrecht auf demselben steht. Ueberdies ist auch A C in α halbirt. Man hat also

$$A\,Z = r,\ A\,\alpha = \tfrac{1}{2}\,a \text{ und } Z\,\alpha = \tfrac{1}{2}\,r;$$

und infolge dessen

$$r^2 = (\tfrac{1}{2}\,a)^2 + (\tfrac{1}{2}\,r)^2,$$

$$\text{also } \tfrac{3}{4}\,r^2 = \tfrac{1}{4}\,a^2,$$

$$\text{oder } 3\,r^2 = a^2.$$

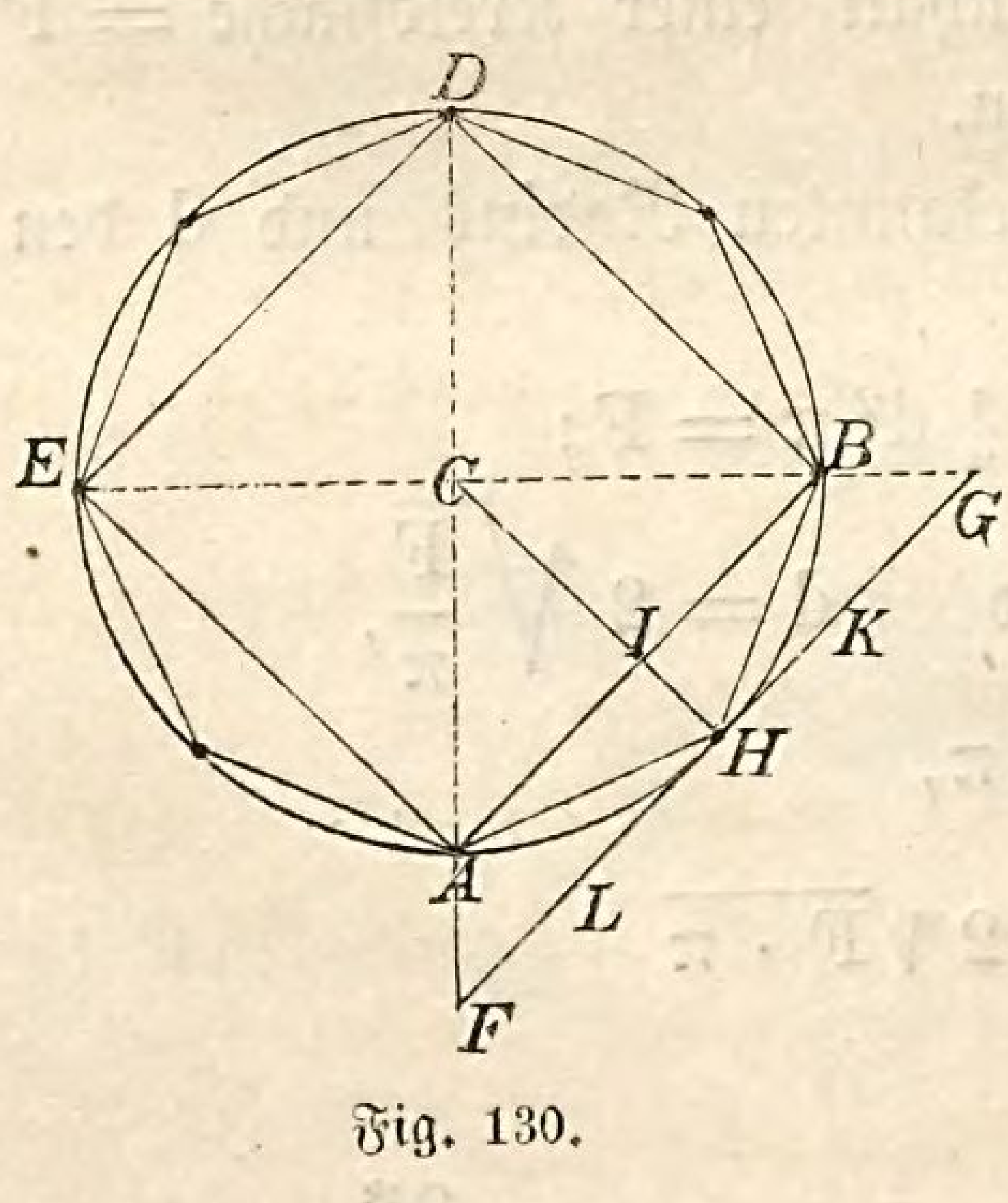


Fig. 130.

183. Aufgabe. In einen Kreis, dessen Radius = r ist, ein Quadrat zu beschreiben.

Construction. Man theile den Kreis durch einen Durchmesser in zwei Halbkreise, halbire jeden derselben und ziehe die dazu gehörigen Sehnen, so erhält man das Quadrat.

Erster Zusatz. Die Centriwinkel um c sind Rechte, daher ist, wenn

die Seite des Quadrats = b gesetzt wird,

$$BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

$$\text{d. i. } b^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2.$$

Zweiter Zusatz. Durch fortgesetzte Halbirung eines jeden Bogens erhält man, vom Quadrat ausgehend, ein reguläres Vieleck von 8, 16, 32, 64 u. s. w. Seiten, und in gleicher Weise, wenn das regelmäßige Sechseck zu Grunde gelegt wird, ein reguläres Vieleck von 12, 24, 48, 96 u. s. w. Seiten.

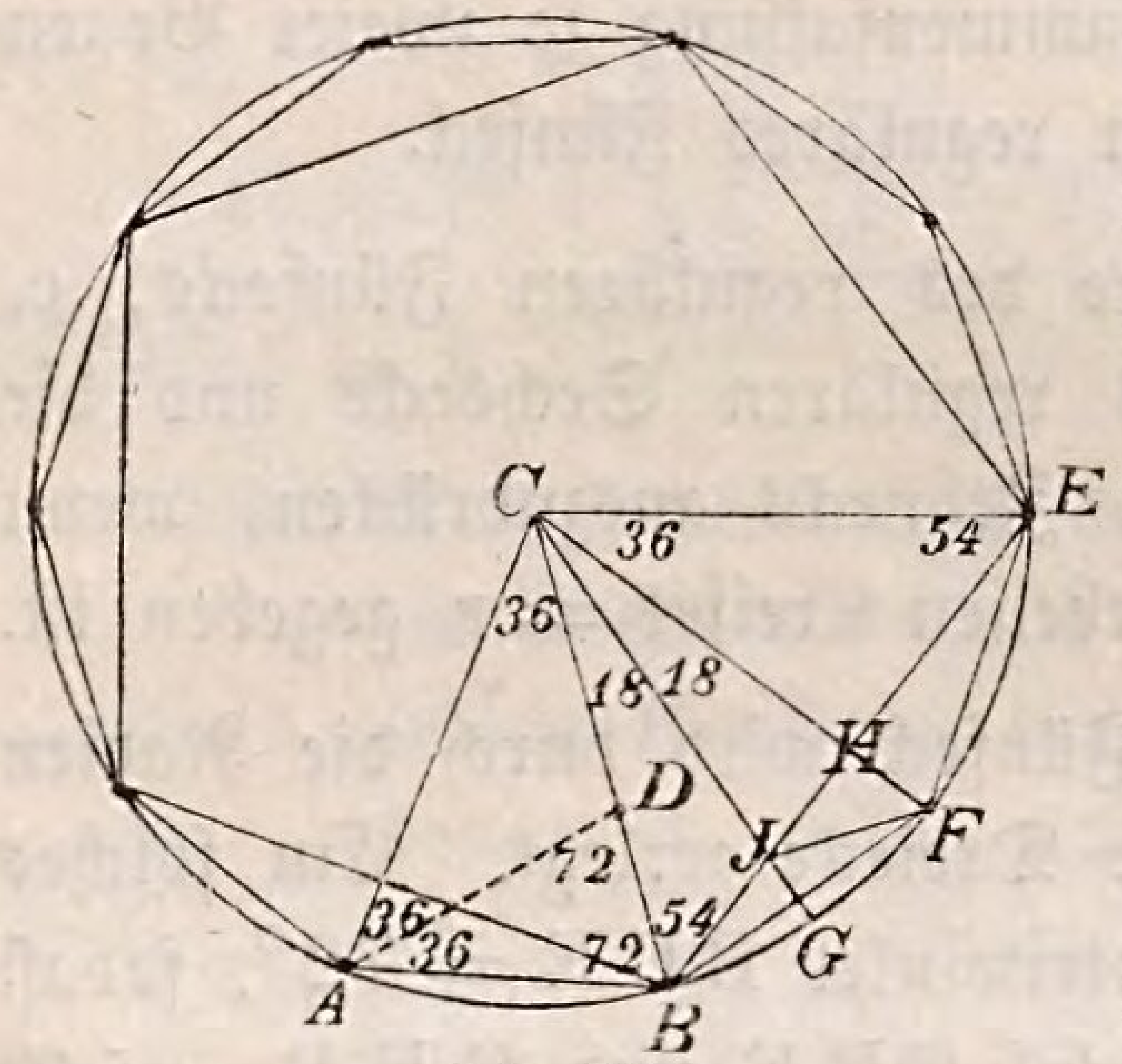


Fig. 131.

184. Aufgabe. Die Seite e des regulären Zehnecks im Kreise zu finden, wenn der Radius = r gegeben ist.

Die Auflösung dieser bereits in Nr. 71 enthaltenen Aufgabe ergibt

$$e = -\frac{r}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\,r\,(-1 + \sqrt{5}).$$

Beweis. Zieht man im regulären Zehneck die Radien nach den Ecken, so wird dasselbe in 10 congruente Dreiecke zerlegt. Der Centriwinkel eines solchen Dreiecks, z. B. des Dreiecks ABC, muß stets = 36° sein. Wenn aber Winkel ACB = 36° ist, so muß jeder der beiden andern Winkel CAB und CBA = 72° sein. Halbirt man den Winkel CAB durch die Linie AD, so ergeben sich zwei ähnliche Dreiecke ADB und ACB, denn sie haben bezüglich dieselben Winkel und sind beide gleichschenkelig. Es ist nämlich CA = CB = r und AB = AD = DC. (Letzteres wegen der gleichen Winkel an AC im Dreieck ADC.) Infolge dessen ist BD oder BC — CD = BC — AB = r — AB, und, da AB die Seite des regulären Zehnecks ist, auch = r — e. Aus der vorhin erwähnten Aehnlichkeit der Dreiecke ACB und ADB folgt aber schließlich

$$AC : AB = AB : BD,$$

$$\text{d. i. } r : e = e : r - e,$$

woraus $e = \frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})$

gefunden wird.

Erster Zusatz. Wird jeder Bogen halbirt und die dazu gehörige Sehne gezogen, so ergibt sich aus dem Zehneck ein reguläres Zwanzigeck, und bei fortgesetztem Verfahren ein regelmäßiges Vieleck von 40, 80, 160 u. s. w. Seiten.

Zweiter Zusatz. Durch Zusammenfassung je zweier Bogen des regulären Zehnecks entsteht ein reguläres Fünfeck.

185. Aufgabe. Die Seite des regulären Fünfecks, c, durch die Seite d des regulären Sechsecks und die Seite e des regulären Zehnecks auszudrücken, wenn der Radius des umschriebenen Kreises = r gegeben ist.

Auflösung. Das reguläre Fünfeck wird durch die Radien nach den Ecken in fünf congruente Dreiecke zerlegt. Ein solches Dreieck, z. B. C B E hat den Centriwinkel $B C E = 72°$, sodaß jeder der beiden halben Vieleckswinkel C B E und $C E B = 54°$ sein muß. Halbirt man den Centriwinkel B C E durch die Linie C F, um B F und F E, die Seiten des regulären Zehnecks, zu erhalten, so wird Winkel $B C F = 36°$. Durch Halbirung dieses Winkels erhält man

Winkel $F C G = 18°$,

folglich Winkel $E C G = 36° + 18° = 54°$ = Winkel C E B.

Die beiden Dreiecke C E B und C E I sind aber, weil jedes zwei Winkel von 54° hat und also gleichschenkelig ist, einander ähnlich. Ferner ist durch die Gerade C I G die Sehne B F halbirt worden. Wird nun noch F I gezogen, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck B I F, welches mit dem ebenfalls gleichschenkeligen Dreieck B E F den Winkel I B F oder E B F an der dritten Seite gemein hat. Daraus folgt auch die Gleichheit der Winkel I F B und B E F. Demnach ist Dreieck B I F dem Dreieck B E F ähnlich. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CEB und C E I ergibt sich

$$E I : E C = E C : E B,$$

oder I. $E C^2 = E I \cdot E B$;

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke B E F und B I F folgt

$$B\,I : B\,F = B\,F : B\,E,$$

oder II. $B\,F^2 = B\,I \cdot B\,E.$

Durch Addition von I. und II. findet man

$(E\,I + B\,I) \cdot B\,E$ oder $B\,E^2 = C\,E^2 + B\,F^2 = B\,C^2 + B\,F^2$,

d. i. $c^2 = d^2 + e^2$.

Zusatz. Da $d = r \cdot$ und $e = \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5})$ ist, so findet sich

$$c^2 = r^2 + \tfrac{1}{4} r^2 (6 - 2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{4} r^2 (10 - 2\sqrt{5}),$$

folglich $c = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

186. Aufgabe. Aus der Seite a eines regulären n Ecks im Kreise die Seite b des regulären 2 n Ecks in demselben Kreise zu berechnen, wenn der Radius $= r$ bekannt ist. (Fig. 129.)

Auflösung. Es sei $C\,A = a$ gegeben und $B\,C = B\,A = b$ gesucht. Dreieck $B\,C\,\alpha$ ist dem Dreieck $B\,C\,E$ ähnlich, woraus folgt:

I. $B\,\alpha : B\,C = B\,C : B\,E$

und II. $B\,\alpha : C\,\alpha = C\,\alpha : E\,\alpha.$

Aus I. ergibt sich $B\,\alpha = \frac{B\,C^2}{B\,E} = \frac{b^2}{2\,r}.$

Aus II. erhält man $B\,\alpha = \frac{C\,\alpha \cdot C\,\alpha}{E\,\alpha} = \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\,r - B\,\alpha}.$

Folglich ist III. $\frac{b^2}{2\,r} = \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\,r - B\,\alpha}$,

oder $\frac{b^2}{2\,r} = \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\,r - \frac{b^2}{2\,r}} = \frac{\frac{1}{2} r\, a^2}{4\,r^2 - b^2}$,

oder $b^2 = \frac{r^2\, a^2}{4\,r^2 - b^2}$;

woraus folgt $b^4 - 4\,r^2 b^2 = -\,r^2\, a^2$,

also $b^2 = r \cdot (2\,r \pm \sqrt{4\,r^2 - a^2})$

und endlich $b = \sqrt{r\,(2\,r \pm \sqrt{4\,r^2 - a^2})}$.

Der größere von diesen Werthen gibt die Sehne E C im

größern Abschnitt und der kleinere die Sehne B C im kleinern Abschnitte des Kreises.

Anmerkung. Wenn a die Seite des regulären Sechsecks im Kreise vorstellt, also $= r$ ist, so erhält man für b die Seite des Zwölfecks $= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Wird dieser Werth statt a gesetzt, so ergibt sich die Seite des 24Ecks. Auf diese Weise findet man durch fortgesetzte Rechnung die Seite des eingeschriebenen regulären Vielecks von 48, 96, 192, 384 u. s. w. Seiten. Für den Radius $r = 1$ ist nämlich die Seite des eingeschriebenen

6Ecks = 1,0000000 . . . .
12 „ = 0,5176380 . . . .
24 „ = 0,2610524 . . . .
48 „ = 0,1308062 . . . .
96 „ = 0,0654380 . . . .
192 „ = 0,0327234 . . . .
384 „ = 0,0163624 . . . .

187. Aufgabe. Aus der Seite b des eingeschriebenen nEcks die Seite c des umschriebenen nEcks zu berechnen. (Fig. 130.)

Auflösung. In dem rechtwinkeligen Dreieck A C I ist $CA = r$ und $AI = \frac{1}{2}b$ bekannt; daraus wird $CI = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}$ gefunden. Ferner sind die Dreiecke C A B und C F G ähnlich, wodurch man erhält:

$$CI : CH = AB : FG,$$

d. i. $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} : r = b : c;$

und hieraus folgt sogleich

$$FG \text{ oder } c = \frac{b\,r}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}}.$$

Anmerkung. Da die Seite b des eingeschriebenen Sechsecks $= r = 1$ ist, so muß c, die Seite des umschriebenen Sechsecks,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

betragen. Wenn daher statt b nach und nach die in der vorherigen Aufgabe angegebenen Werthe gesetzt werden, so findet sich die Seite des umschriebenen

6Ecks = 1,1547006 . . . .
12 „ = 0,5358984 . . .

24Ecks	= 0,2633050	
48 „	= 0,1310870	
96 „	= 0,0654732	.
192 „	= 0,0327278	
384 „	= 0,0163628	

Erster Zusatz. Der Umfang eines regulären Vielecks ist das Product aus der Anzahl aller Seiten mit der Zahl der Längeneinheiten einer Seite. Demnach läßt sich nun sowol der Umfang des eingeschriebenen als der des umschriebenen regulären nEcks berechnen, und dadurch erhält man die Grenzen, zwischen denen die Länge der Kreislinie sich befinden muß. Die Annäherung an dieselbe wird desto größer, je mehr Seiten die eingeschriebenen und umschriebenen regulären Vielecke haben. So mühsam auch dies Verfahren ist, so bediente man sich doch desselben früher lange Zeit, um die Peripherie annähernd zu berechnen. Gegenwärtig kennt man bequemere und kürzere Wege, auf denen man jede gewünschte Zahl von Decimalstellen erhält. Der Erste, der auf die angedeutete Weise die Länge der Peripherie berechnete, war Ludolph von Cöln (richtiger van Ceulen). Er fand für den Durchmesser 1 die Peripherie

$$= 3,\ 141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 50\ldots,$$

welche Zahl daher noch jetzt den Namen der Ludolphischen Zahl führt, in den Rechnungen aber meistens mit π bezeichnet wird. Für gewöhnlich genügen schon sieben Decimalstellen; und wo es nicht auf sehr große Genauigkeit ankommt, kann man mit Archimedes die Peripherie als $\frac{22}{7}$ des Durchmessers betrachten. Genauer ist das von Metius gefundene Verhältniß 113 : 355, welches überdies sich dadurch empfiehlt, daß es dem Gedächtniß sehr leicht eingeprägt werden kann.

Zweiter Zusatz. Hier möge noch eine Formel angegeben werden, mit deren Hülfe man die Ludolphische Zahl beliebig genau berechnen kann. Es ist nämlich

$$\pi = 8\,[\tfrac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{(1.\,3.\,5.\,7} + \frac{1}{5.\,7.\,9.\,11} + \frac{1}{9.\,11.\,13.\,15} + \ldots.$$

$$+ \frac{1}{(4\,m - 3)\,(4\,m - 1)\,(4\,m + 1)\,(4\,m + 3)} + \ldots.)],$$

wobei m die Ordnungszahl der Glieder in der innern Klammer vorstellt. Je größer die Zahl der mit 6 zu multiplicirenden Brüche in der innern Klammer wird, desto genauer ergibt sich auch die Zahl π.

188. Aufgabe. Es ist gegeben der Inhalt des eingeschriebenen n Ecks = p, der des umschriebenen n Ecks = P; man soll den Inhalt q des eingeschriebenen 2 Ecks finden. (Sämmtliche Vielecke sind hier als regelmäßige gedacht.)

Auflösung. Wenn A B die Seite des n Ecks p, B H die Seite des 2 n Ecks q und F G die Seite des n Ecks P ist, so ergibt sich (Fig. 130):

$$p = n \cdot \triangle ABC \text{ und } q = 2n \triangle BCH.$$

Es verhält sich demnach

$p : q = \triangle ABC : 2 \triangle BCH$, oder $= \frac{1}{2} \triangle ABC : \triangle BCH$, d. i. $= \triangle BCI : \triangle BCH$.

Die Dreiecke B C I und B C H verhalten sich aber, weil sie dieselbe Höhe B I haben, wie ihre Grundlinien C I und C H; demgemäß verhält sich auch

$$\text{I. } p : q = CI : CH.$$

Ferner ist der Inhalt des n Ecks $P = n \cdot \triangle CFG$, während bereits $q = 2n \cdot \triangle BCH$ gefunden worden. Hieraus folgt $q : P = 2 \triangle BCH : \triangle CFG$, oder $= \triangle BCH : \frac{1}{2} \triangle CFG$, d. i. $q : P = \triangle BCH : \triangle CGH$,

welche letztern beiden Dreiecke wieder dieselbe Höhe haben.

Also ist

$$\text{II. } q : P = BC : CG.$$

Da B I mit G H parallel läuft, so findet folgende Proportion statt:

$$CI : CH = BC : CG,$$

und ergeben demnach die Gleichungen I. und II.:

$$\text{III. } p : q = q : P;$$

d. h. das innere Vieleck von 2 n Seiten ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem innern und äußern Vieleck von n Seiten, und daher ist zuletzt

$$q = \sqrt{P \cdot p}.$$

189. Aufgabe. Wenn unter den in voriger Aufgabe enthaltenen Voraussetzungen p, q und P gegeben sind, den Inhalt Q des umschriebenen 2nEcks zu finden. (Fig. 130.)

Auflösung. Wenn C L den Winkel F C H und C K den Winkel H C G halbirt, so ist L K die Seite des 2nEcks Q und $Q = 2n \cdot \triangle CLK$ oder $= 4n \cdot \triangle CLH$, während man bereits $P = 2n \cdot \triangle CFH$ kennt. Daher verhält sich

I. $P : Q = \triangle CFH : 2 \triangle CLH$ oder $= FH : 2LH$.

In der vorigen Aufgabe wurde gefunden:

$p : q = CI : CH$, oder $= CA : CF$, oder $= CH : CF$,

und, weil C L den Winkel F C H halbirt, auch $= HL : LF$.

Hieraus folgt

$$p + q : p = HL + LF : HL, \text{ d. i. } = FH : LH;$$

also II. $p + q : 2p = FH : 2LH$.

Demnach findet die Proportion

$$P : Q = p + q : 2p$$

statt, und daraus ergibt sich

$$Q = \frac{2p \cdot P}{p + q}.$$

Zusatz. Mit Hülfe dieser Formel läßt sich die Zahl π schon viel bequemer berechnen, als auf dem bisher angegebenen Wege möglich ist. Setzt man nämlich den Radius = 1, so ist der Inhalt des

	im Kreise	um den Kreis
4Ecks	2,0000	4,0000 . . . . .
8 „	2,8284	3,3137 . . . . .
16 „	3,0614	3,1826 . . . . .
32 „	3,1214	3,1517 . . . . .
64 „	3,1365	3,1440 . . . . .
128 „	3,1402	3,1422 . . . . .
256 „	3,1412	3,1417 . . . . .
512 „	3,1415	3,1416 . . . . .

und der Inhalt der Kreisfläche selbst = 3,1415 . . . Der Inhalt des Kreises ist aber das Product aus der Peripherie und dem halben Radius, oder aus der halben Peripherie und dem

Radius; und da dieser $= 1$ angenommen worden, so ergibt sich hieraus sofort die Zahl π oder die Länge der halben Kreislinie.

190. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein reguläres 15Eck zu beschreiben.

Construction. Da $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ist, so hat man nur $\frac{1}{10}$ der Peripherie (d. i. den Bogen des regulären 10Ecks) von $\frac{1}{6}$ des Kreisumfanges (d. i. vom Bogen des 6Ecks) abzuschneiden. Der sich ergebende Rest ist der Bogen des regelmäßigen 15Ecks.

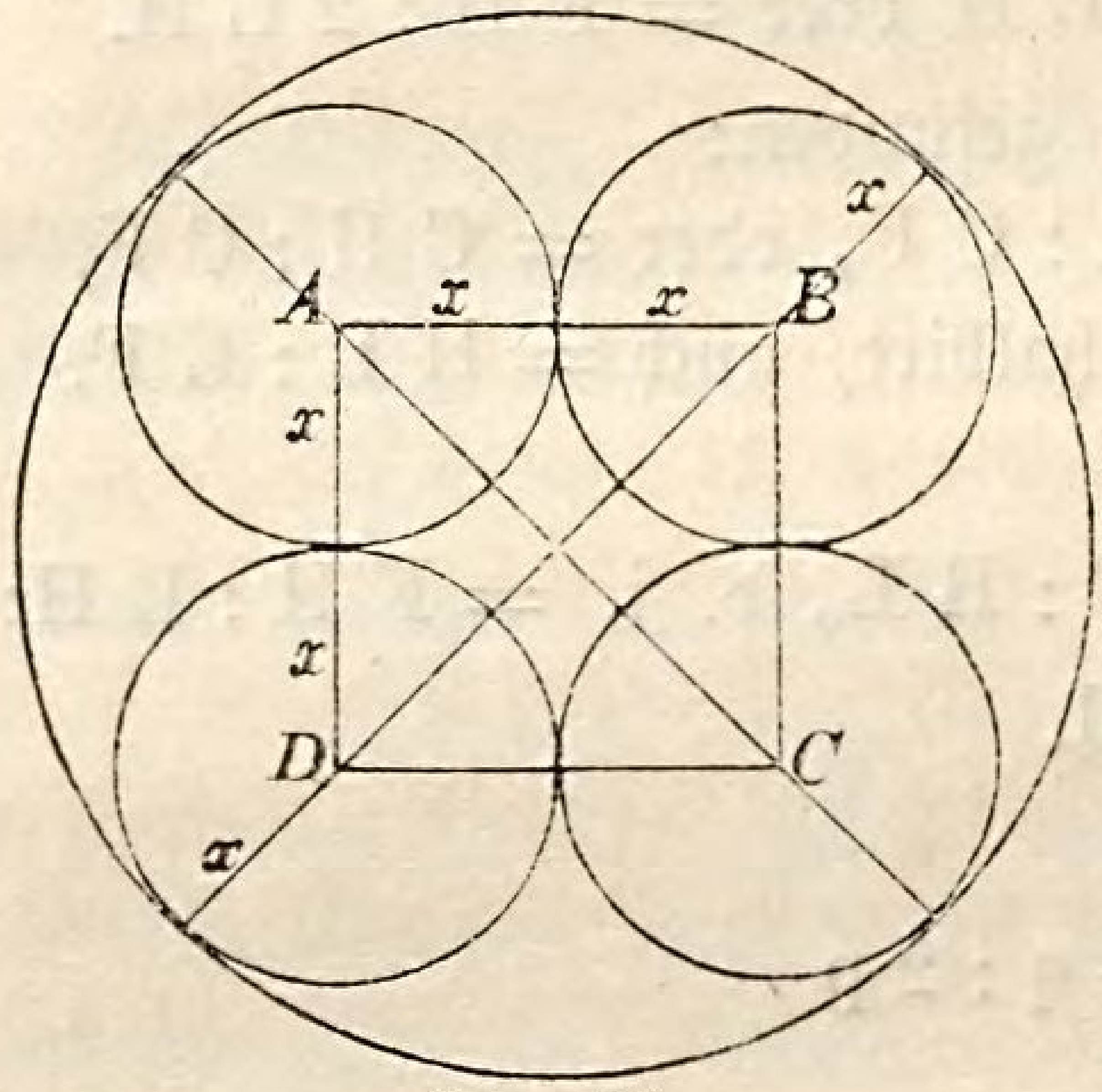


Fig. 132.

191. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis (Radius $= r$) vier gleiche Kreise zu construiren, welche sich sowol untereinander selbst, als auch den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung. Es sei x der Radius der gesuchten Kreise. Die Centralen der vier eingeschriebenen Kreise bilden ein Quadrat A B C D, dessen Seite $= 2\,x$ ist. Man hat also

$$A\,B^2 + A\,D^2 = B\,D^2,$$

d. i. $4\,x^2 + 4\,x^2 = (2\,r - 2\,x)^2$,

oder $4\,x^2 = 2\,(r^2 - 2\,r\,x + x^2)$,

oder $2\,x^2 = r^2 - 2\,r\,x + x^2$;

also $x^2 + 2\,r\,x = r^2$,

folglich $x = -r + \sqrt{2\,r^2}$ oder $= -r + \sqrt{2\,r \cdot r} = r(-1 + \sqrt{2})$.

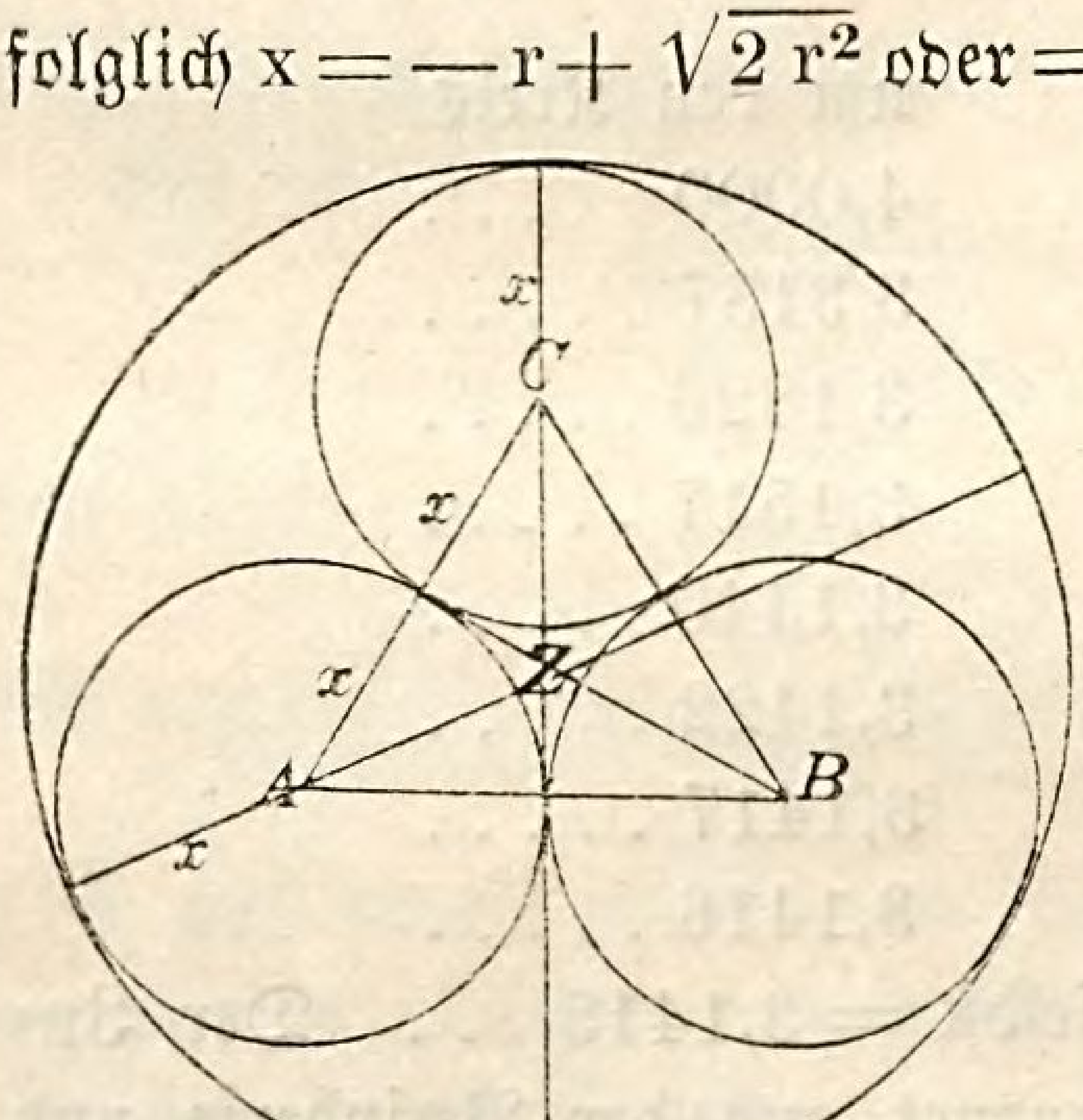


Fig. 133.

Anmerkung. Der erste und zweite Ausdruck eignet sich mehr zum Construiren, während die letzte Formel für numerische Berechnungen bequemer ist.

192. Aufgabe. Drei Kreise unter denselben Bedingungen in einen gegebenen Kreis zu construiren.

Auflösung. Es sei x der Radius der gesuchten Kreise und r der Radius des gegebenen

Kreises. Die drei Centralen bilden ein gleichseitiges Dreieck A B C, dessen Seite $= 2x$ ist. Beschreibt man um das Dreieck A B C einen Kreis, so ist der Radius desselben $= r - x$. Hieraus ergibt sich (nach Aufgabe 182) die Gleichung $AC^2 = 3\,CZ^2$,

d. i. $(2x)^2 = 3(r - x)^2$,

oder $\frac{4}{3}x^2 = r^2 - 2rx + x^2$,

oder $\frac{1}{3}x^2 + 2rx = r^2$,

oder $x^2 + 6rx = 3r^2$.

Folglich ist $x = -3r + \sqrt{12r^2} = -3r + 2\sqrt{3r^2} = r(-3 + 2\sqrt{3})$.

193. Aufgabe. Sechs Kreise sollen unter denselben Bedingungen in den gegebenen Kreis construirt werden.

Auflösung. Die sechs Centralen bilden ein reguläres Sechseck, dessen Seite $= 2x$ ist; daher muß auch die Gerade aus einer Ecke nach dem Centrum des gegebenen Kreises $= 2x$ sein. Demnach zerfällt der Radius r (des gegebenen Kreises) in drei gleiche Theile, von denen jeder dem Radius x der gesuchten Kreise gleich ist. Hieraus erhellt $x = \frac{1}{3}r$; d. h. der Radius eines der zu construirenden sechs Kreise beträgt $\frac{1}{3}$ des gegebenen Radius.

194. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis zehn Kreise zu construiren, welche nicht nur denselben, sondern auch sich selbst untereinander berühren.

Auflösung. Da die zehn Centralen ein reguläres Zehneck bilden, so hat man nach Nr. 184 die Gleichung

$r - x : 2x = x : r - 3x$,

oder $4x^2 = r^2 - 4rx + 3x^2$,

oder $x^2 + 4rx = r^2$;

woraus folgt $x = -2r + \sqrt{5r^2} = r(-2 + \sqrt{5})$.

195. Aufgabe. Unter denselben Bedingungen fünf gleiche Kreise in den gegebenen Kreis zu construiren.

Auflösung. Die fünf Centralen bilden ein reguläres Fünfeck, dessen Seite $= 2x$ ist. Der Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises beträgt $r - x$, also hat man die Seite des in diesen Kreis eingeschriebenen Sechsecks $= r - x$ und die Seite des in denselben Kreis eingeschriebenen Zehnecks

$$= \frac{(r - x) \cdot (-1 + \sqrt{5})}{2}.$$

Daraus ergibt sich nach Nr. 185 die Gleichung

$$(2x)^2 = (r-x)^2 + \left(\frac{(r-x)\cdot(-1+\sqrt{5})}{2}\right)^2,$$

$$\text{oder } 4x^2 = (r-x)^2 + \left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot (r-x)^2\right],$$

$$\text{oder } 3x^2 = r^2 - 2rx + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot(r^2 - 2rx + x^2),$$

$$\text{oder } 6x^2 = 2r^2 - 4rx + (3-\sqrt{5})\cdot(r^2 - 2rx + x^2),$$

$$\text{oder } 3x^2 - 5r^2 + 10rx = -\sqrt{5}\,(r^2 - 2rx + x^2);$$

und wenn auf beiden Seiten mit $\sqrt{5}$ dividirt wird, so hat man

$$\frac{3x^2 + 10rx - 5r^2}{\sqrt{5}} = 2rx - x^2 - r^2.$$

Daraus erhellt:

$$\frac{3x^2+10rx}{\sqrt{5}} + x^2 - 2rx = \frac{5r^2}{\sqrt{5}} - r^2 = r^2\left(\frac{5}{\sqrt{5}} - 1\right) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)r^2,$$

$$\text{oder } 3x^2 + 10rx + \sqrt{5}\,(x^2 - 2rx) = (5-\sqrt{5})\,r^2,$$

$$\text{d. i. } (3+\sqrt{5})\,x^2 + (5-\sqrt{5})\,2rx = (5-\sqrt{5})\,r^2;$$

$$\text{also } x^2 + \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot 2rx = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot r^2.$$

Wird behufs Vervollständigung des Quadrats auf beiden Seiten $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^2 \cdot r^2$ zugezählt, so findet sich:

$$\left(x + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right) r\right)^2 = \frac{8\,(5-\sqrt{5})\;r^2}{(3+\sqrt{5})^2},$$

$$\text{und daher } x = r\cdot\left(\frac{-5+\sqrt{5} \pm 2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}}\right).$$

Anmerkung. Die Gleichung

$$4x^2 = (r-x)^2 + \left[(r-x)^2 \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

kann auch umgeformt werden in

$$4x^2 = (r-x)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = (r-x)^2 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right),$$

oder $8x^2 = (r^2 - 2rx + x^2)(5 - \sqrt{5})$.

Dividirt man auf beiden Seiten mit $5 - \sqrt{5}$, so erhält man

$$\frac{8x^2}{5-\sqrt{5}} = r^2 - 2rx + x^2,$$

$$\text{oder } \left(\frac{8}{5-\sqrt{5}} - 1\right) x^2 + 2rx = r^2,$$

$$\text{oder } (3+\sqrt{5})x^2 + (5-\sqrt{5})\,2rx = (5-\sqrt{5})r^2,$$

und diese Gleichung ist die bereits oben gefundene, welche zur Bestimmung der Unbekannten x führte, und zwar ist

$$x = r \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{5}+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}}\right),$$

weil x als Linie positiv werden muß.

196. Aufgabe. Den Radius r des Kreises zu finden, wenn zwei eingeschriebene Figuren, nämlich ein reguläres Dreieck und ein Quadrat, zusammengenommen den Flächeninhalt a^2 haben.

Auflösung. Es sei die Seite des regulären Dreiecks $= x$, und die des Quadrats $= y$, so ist von früher her bekannt:

$$\text{I. } x^2 = 3r^2 \text{ und II. } y^2 = 2r^2.$$

Um aber den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, muß man zuvor die Höhe desselben suchen; sie ist

$$\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{3r^2 - \tfrac{3}{4}r^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}r^2} = \frac{3r}{2}.$$

Demnach ist der Inhalt des Dreiecks $\frac{3}{4}r^2 \cdot \sqrt{3}$, und daher

$$\text{III. } a^2 = \tfrac{3}{4}r^2 \cdot \sqrt{3} + 2r^2 = r^2(2 + \tfrac{3}{4}\sqrt{3}),$$

woraus sich findet:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2+\frac{3}{4}\sqrt{3}}} = \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + \frac{3a}{4}\sqrt{3a^2}}}.$$

Der zweite Ausdruck für r läßt sich leicht construiren. Für numerische Berechnungen kann die erste Formel auch verwandelt werden, nämlich in

$$r = \frac{2a}{\sqrt{8+3\sqrt{3}}}.$$

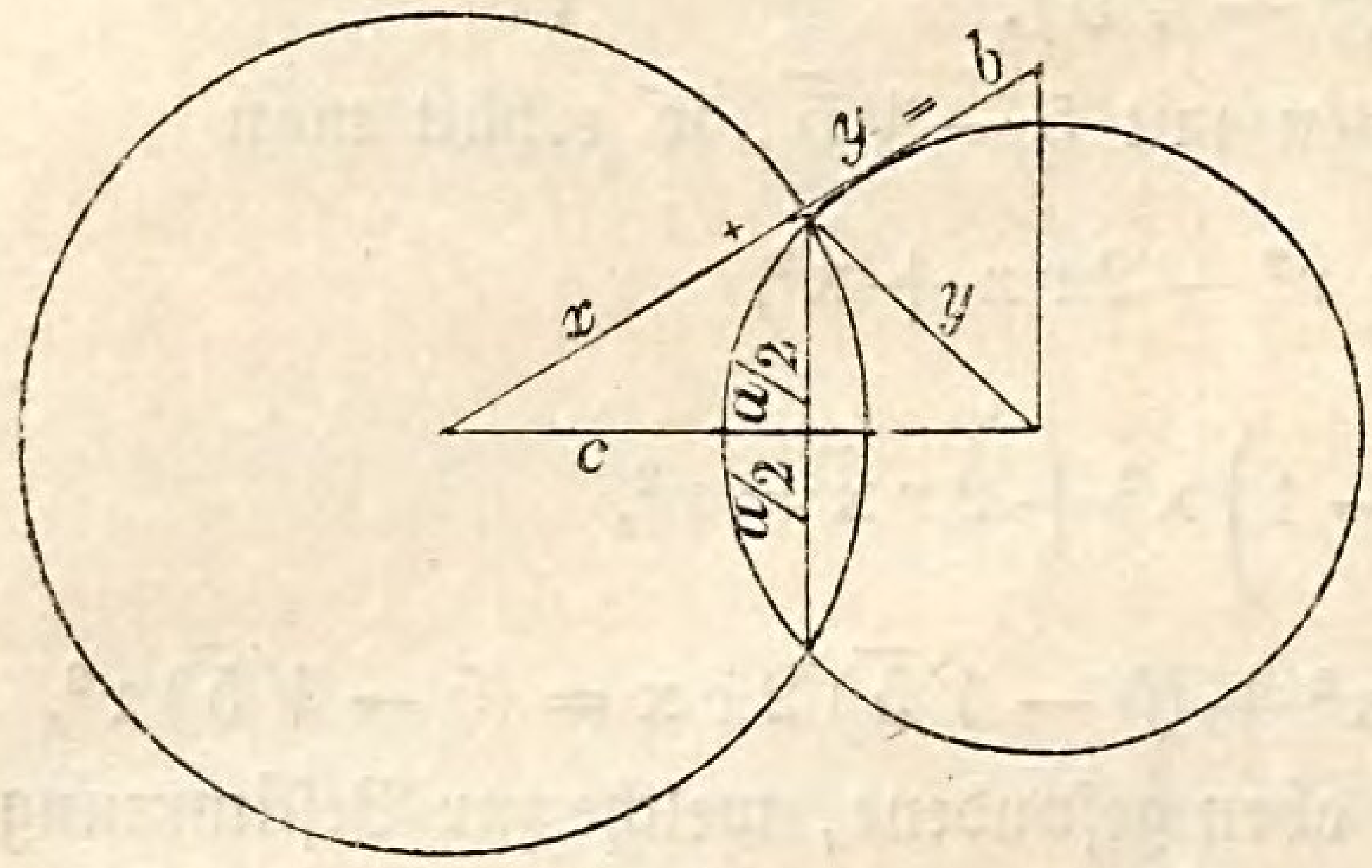


Fig. 134.

197. Aufgabe. Die Radien zweier sich schneidenden Kreise zu finden, wenn die gemeinschaftliche Sehne $= a$, die Summe der Radien $= b$ und die Centralentfernung $= c$ gegeben ist.

Auflösung. Der größere Radius sei $= x$, der kleinere $= y$, so hat man

$$\text{I. } x + y = b \text{ und II. } \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \pm \sqrt{y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = c.$$

Aus I. findet sich $y = b - x$ und $y^2 = b^2 - 2bx + x^2$.

Wird dieser Werth von y^2 in II. substituirt, so verwandelt sich II. in

$$\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2} \pm \sqrt{b^2 - 2bx + x^2 - \tfrac{1}{4}a^2} = c$$

$$\text{oder } \pm \sqrt{b^2 - 2bx + x^2 - \tfrac{1}{4}a^2} = c - \sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$

Quadrirt man auf beiden Seiten, so erhält man die Gleichung

$$b^2 - 2bx + x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = c^2 - 2c\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2} + x^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Hieraus folgt $b^2 - c^2 - 2bx = -2c\sqrt{x^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$.

Quadriren wir, um das Wurzelzeichen fortzuschaffen, nochmals auf beiden Seiten, so findet sich:

$$b^4 + c^4 - 2b^2c^2 + 4b^2x^2 - 4b(b^2 - c^2)x = 4c^2x^2 - a^2c^2,$$

$$\text{oder } 4(b^2 - c^2)x^2 - 4b(b^2 - c^2)x = 2b^2c^2 - a^2c^2 - b^4 - c^4;$$

$$\text{also } x^2 - bx = \frac{c^2(2b^2 - a^2) - b^4 - c^4}{4(b^2 - c^2)};$$

$$\text{auch } (x - \tfrac{1}{2}b)^2 = \tfrac{1}{4}c^2\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{b^2 - c^2}\right);$$

und daraus erhellt:

$$x = \frac{b}{2} \pm \frac{c}{2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}.$$

Siebenter Abschnitt.

Construction des Quadrats und des regulären Triangels, sowie der rechtwinkeligen und der gleichschenkeligen Dreiecke nach gegebenen Bedingungen.

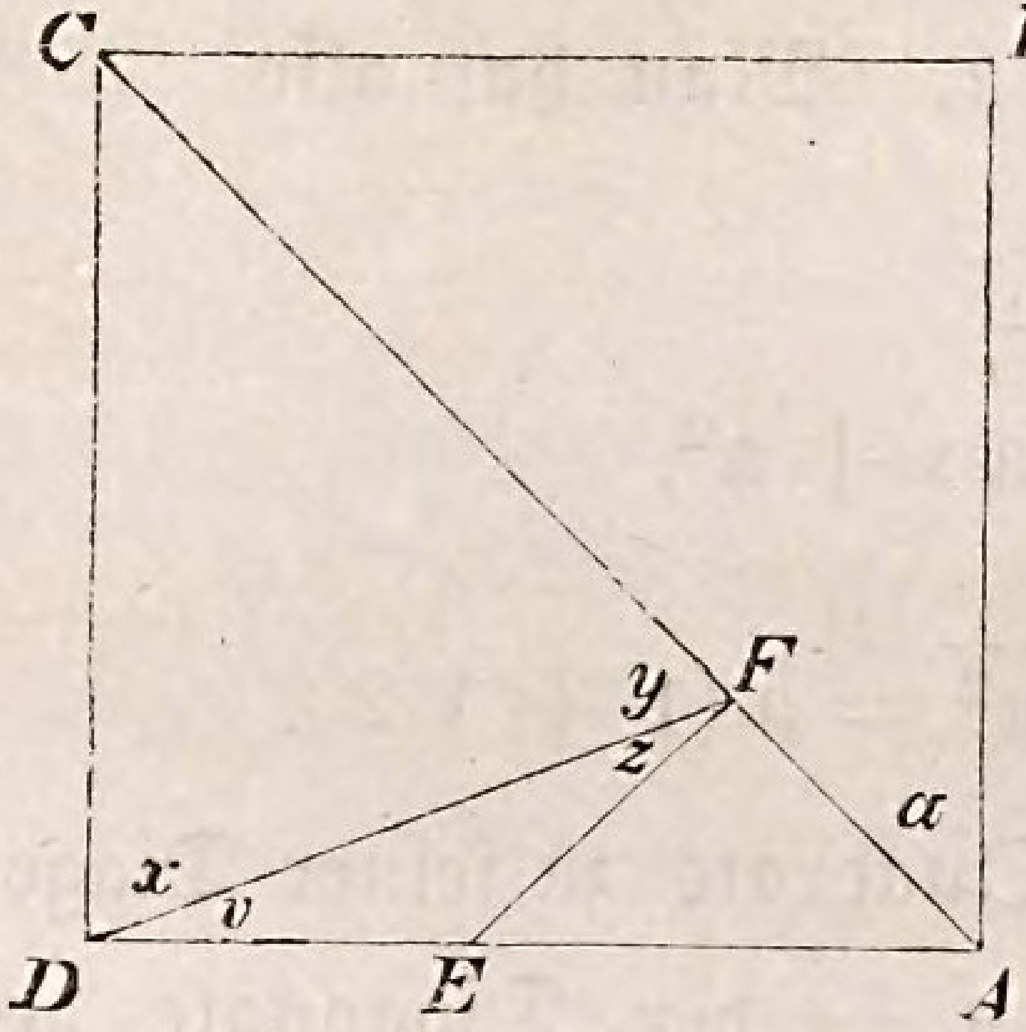


Fig. 135.

198. Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, wenn die Differenz zwischen der Diagonale und der Seite desselben = a gegeben ist.

Analysis. Es sei A B C D das verlangte Quadrat und A F = a, so sind, wenn F mit D verbunden und F E rechtwinkelig an A F durch F gelegt wird, die Dreiecke C D F und D E F gleichschenkelig; d. h. man hat nicht nur C D = C F, sondern auch D E = E F, weil die Winkel v und z als Complementswinkel der gleichen Winkel x und y auch gleich sein müssen. Ferner ist das Dreieck A E F $\sim$ A C D, da beide den Winkel bei A gemein haben und ihre Winkel bei B und D Rechte sind; und weil Dreieck A C D gleichschenkelig ist, so muß dies deshalb auch bei dem Dreieck A E F der Fall sein, nämlich A F = E F. Da bereits D E = E F gefunden worden, so ist auch D E = A F, und weil A E die Hypotenuse des rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks A E F bildet, so ist dadurch die Richtung der Seite des Quadrats bestimmt, während man noch überdies diese Seite A D ihrer Länge nach, A E + A F, kennt.

Construction. Man lege E F = A F = a rechtwinkelig an A F, ziehe A E und verlängere diese Linie so, daß D E = A F wird. Alsdann errichte man C D in D senkrecht auf A D, verlängere A F so weit, daß sie C D in C schneidet, und vollende das Parallelogramm A B C D, so ist es das verlangte Quadrat.

Beweis. Dreieck A E F ist dem Dreieck A C D ähnlich, da beide rechtwinkelig sind und den Winkel bei A gemein haben, und weil ersteres per constr. gleichschenkelig ist, so gilt dies auch von dem Dreieck A C D. Daher ist A D = C D, folglich ABCD ein Quadrat.

Wird ferner D F gezogen, so ist $\triangle$ D E F gleichschenkelig, folglich Winkel v = z; also auch Winkel x = y und daher C F = C D. Demnach ist A F = a, d. h. der Ueberschuß der Diagonale A C über die Seite C D des Quadrats.

Berechnung. Wird die Seite des Quadrats = x angenommen, so ist die Diagonale = x + a. Man hat also

$$CD^2 + AD^2 = AC^2,$$

d. i. $x^2 + x^2 = (x + a)^2$,

oder $2x^2 = x^2 + 2ax + a^2$,

folglich $x^2 - 2ax = a^2$,

woraus erhellt $x = a + \sqrt{2a^2} = a(1 + \sqrt{2})$.

Zusatz. Da sich die Seite eines Quadrats zu seiner Diagonale verhält wie $1 : \sqrt{2}$, so ist x = a + der Diagonale des Quadrats von a, wie solches die Figur zeigt, wo A D = E D + E A ist, während $EA = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, d. h. die Diagonale des Quadrats von a bildet.

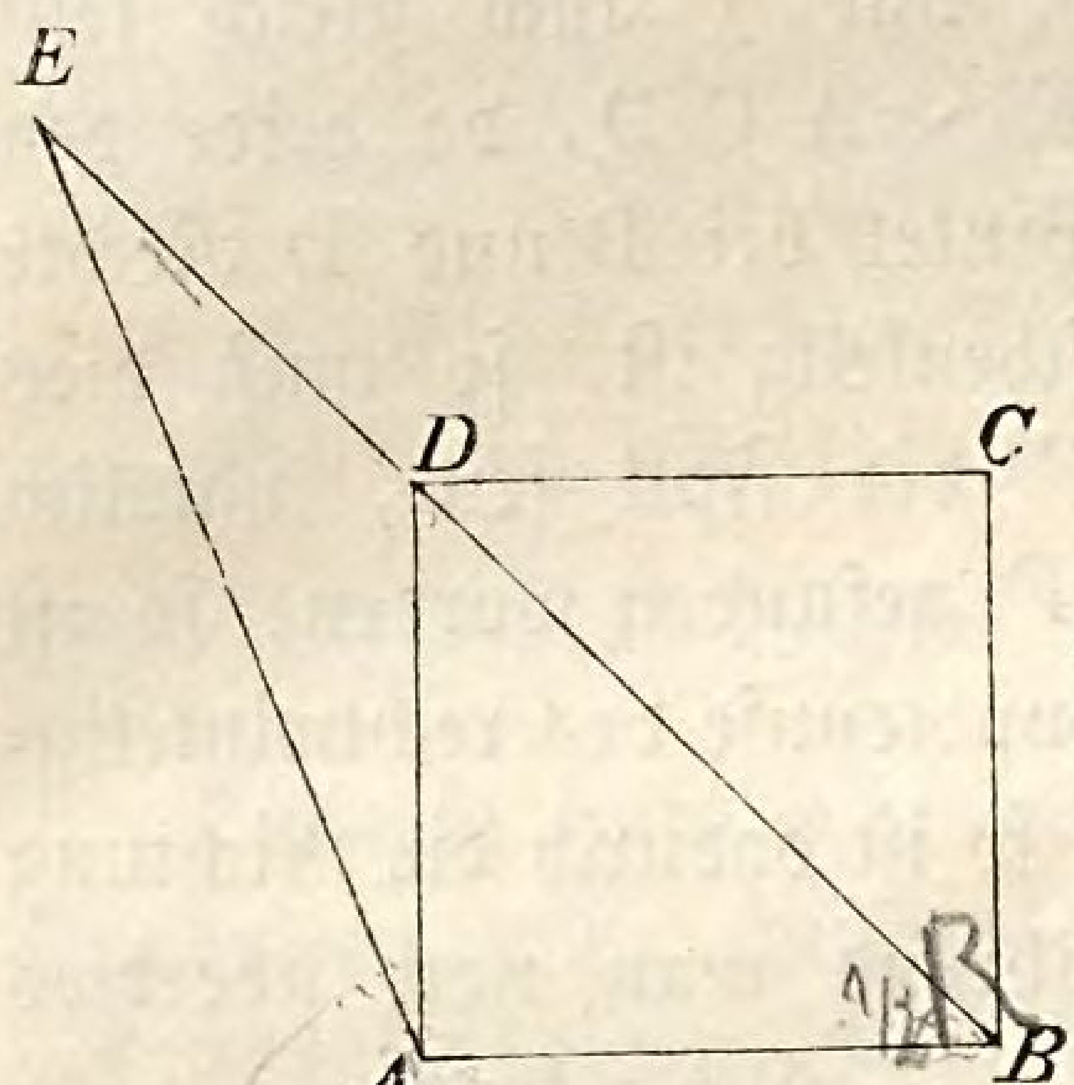


Fig. 136.

199. Aufgabe. Ein Quadrat A B C D zu zeichnen, wenn die Summe der Diagonale und Seite, d. h. B D + A D = a, gegeben ist.

Analysis. Angenommen, A B C D sei das verlangte Quadrat, so ist, wenn B D um A D verlängert und E mit A verbunden wird, Dreieck A B E bekannt; denn es ist B E = a und Winkel A B E = $\frac{1}{2}$ Rechten, und weil A D = D E, so ist Winkel E = E A D und Winkel B D A = 2 E, folglich E = $\frac{1}{2}$ A B D = $\frac{1}{4}$ Rechten. Daher kennt man im Dreieck A B E auch die Seite A B, welche zugleich Seite des gesuchten Quadrats ist.

Construction. Man trage an B E = a zwei Winkel an, nämlich in B die Hälfte eines Rechten und in E einen Winkel = $\frac{1}{4}$ Rechten, und verlängere die Schenkel bis zum Durchschnitt A; so ist A B die Seite des verlangten Quadrats. Um dieses zu construiren, hat man nur noch in A und B Lothe zu er-

richten, dieselben gleich A B zu machen und ihre Endpunkte zu verbinden.

Der Beweis ist in der Analysis enthalten.

Berechnung. Wird die Seite des Quadrats $= x$ gesetzt, so ist die Diagonale $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$ und daraus ergibt sich die Gleichung

$$a = x + x\sqrt{2} = x(1 + \sqrt{2});$$

$$\text{folglich } x = \frac{a}{1+\sqrt{2}} = \frac{a^2}{a + a\sqrt{2}} = \frac{a^2}{a + \sqrt{2a^2}}.$$

Anmerkung. Die dritte Formel für x läßt sich leicht construiren.

200. Aufgabe. Von einem gleichseitigen Dreieck ist der Inhalt $= F$ gegeben, man soll die Seite x finden.

Auflösung. Die Höhe des Dreiecks ist $= \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ $= \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{3}$, daher findet sich der Inhalt

$$F = \tfrac{1}{4}x^2 \cdot \sqrt{3};$$

$$\text{woraus erhellt } x = 2\sqrt{\frac{F}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}F \cdot \sqrt{3}}.$$

Anmerkung. Wenn F in Quadratzollen gegeben ist, so bezeichnet die Formel für x die Zahl der Zolle, welche die Seite des regulären Triangels mißt. — Der Formel für F kann man sich bedienen, um den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, wenn die Seite desselben bekannt ist.

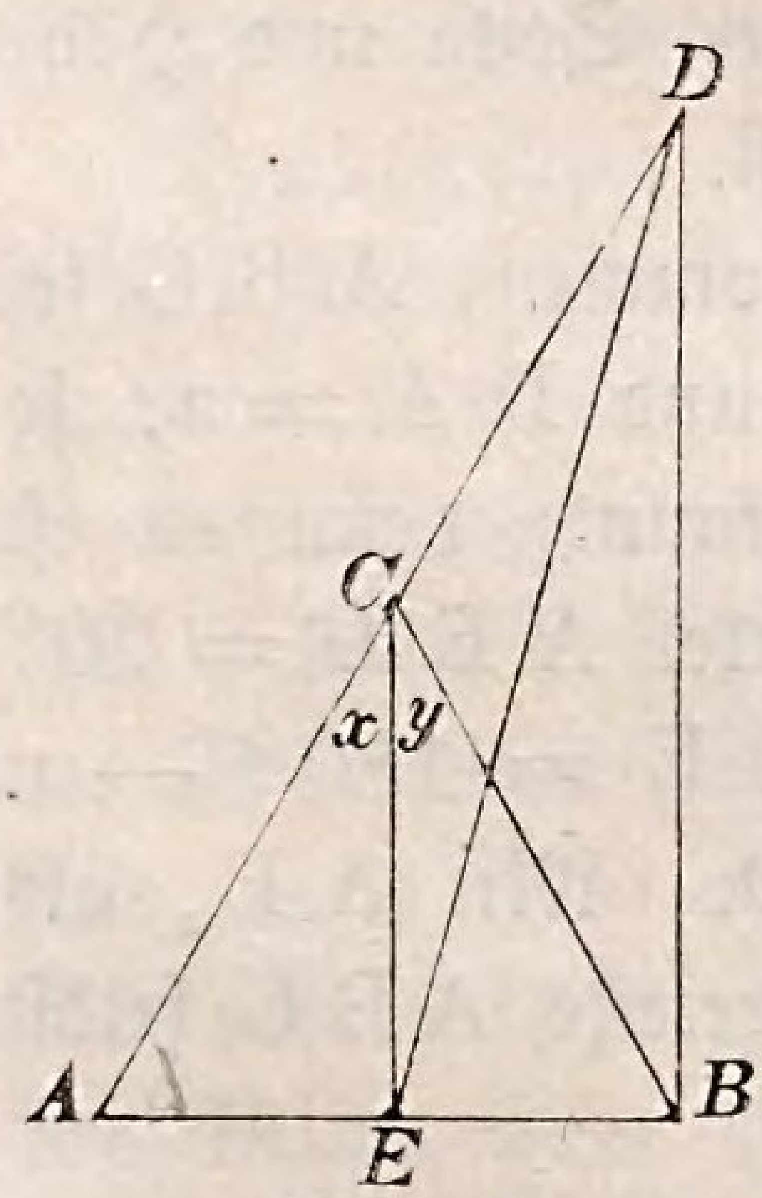


Fig. 137.

201. Aufgabe. Die Seite x des gleichseitigen Dreiecks zu finden, wenn die Summe der Seite und der Höhe $= a$ gegeben ist.

Analysis. Angenommen, A B C sei das gesuchte Dreieck und C E die Höhe desselben, so ist, wenn A C um C E verlängert, und D mit E verbunden wird, Dreieck A D E bekannt, denn es hat zu einer Seite $A D = a$ und Winkel $D A E = 60°$, sowie Winkel $A D E = 15° = \frac{1}{4}$ Winkel A, weil $x = y$ $= \frac{1}{2} A C B = 30°$ und Winkel $E C D = 30 + 120 = 150°$, also Winkel $C D E + C E D = 30°$; und, da diese beiden, an der Grundlinie D E des gleichschenkeligen Dreiecks C D E liegend,

einander gleich sein müssen, jeder derselben $= 15° = \frac{1}{4}$ C oder $\frac{1}{4}$ A. Mit A E ist aber auch A B gefunden, denn die Höhe des gleichseitigen Dreiecks steht in der Mitte von A B.

Construction. Man ziehe eine Gerade A D = a, und lege an dieselbe in A einen Winkel = 60° und in D = 15°, und verlängere die Schenkel, bis sie sich in E schneiden. Alsdann errichte man in E das Loth E C, welches die A D in C trifft, so ist A C die Seite des gesuchten Dreiecks A B C und = 2 A E.

Beweis. Da nach der Construction Winkel A = 60° und A E C = 1 Rechten ist, so muß Winkel x = 30° sein. Wird noch A E um sich selbst verlängert und B C gezogen, so sind die Dreiecke A C E und C B E congruent, und daher A C = B C, Winkel x = Winkel y und auch Winkel A = B, woraus folgt, daß jeder der drei Winkel des Dreiecks A B C = 60°, und dieses selbst also gleichseitig ist.

Berechnung. Setzt man die Seite = x, so ist die Höhe $= \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{3}$; also findet folgende Gleichung statt:

$$x(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = a,$$

woraus folgt $x = \frac{a}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2a}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2a^2}{2a + \sqrt{3a^2}}$.

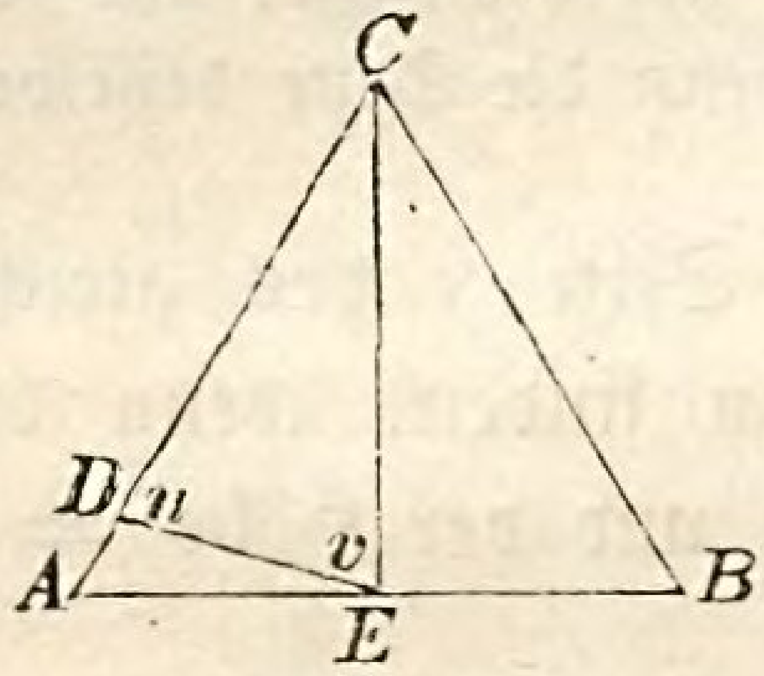


Fig. 138.

202. Aufgabe. Das gleichseitige Dreieck zu construiren, wenn die Differenz zwischen der Seite und Höhe = a gegeben ist.

Analysis. Angenommen, A B C sei das verlangte Dreieck und D A = a, so ist Dreieck A D E bekannt; denn es ist die Seite A D = a, Winkel A = 60°, Winkel A E D = 90° — v = 90 — 75 = 15°, und Winkel A D E = 180° — u = 180 — 75 = 105° = 7 × Winkel A E D. Mit A E, als der Hälfte von A B, ist aber die Seite des Dreiecks A B C selbst gefunden.

Construction. Man lege unter einem Winkel von 60° eine gerade Linie A B in A an A D, welche = a ist, und in D eine Linie D E unter einem Winkel $\frac{7}{4}$ A und verlängere die Schenkel bis zum Durchschnitt in E. Alsdann errichte man in

E ein Loth E C, bis es die verlängerte D A in C trifft, mache E B = A E und verbinde B mit C, so ist A B C das verlangte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke A C E und B C E folgt, daß Seite A C = B C und Winkel A = Winkel B, sowie Winkel x = y = 30°, also auch C = A = B und A B = A C = B C ist. Da ferner Winkel A D E = 105° und Winkel A E D = 15° ist (per constr.), so ist u = 180 — 105 = 75° und v = 90 — 15 = 75°, also u = v und deshalb C D = C E = C A — a.

Berechnung. Da die Seite = x und die Höhe = $\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{3}$ ist, so haben wir diesmal

$$x\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = a;$$

$$\text{also } x = \frac{a}{1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2a}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2a^2}{2a - \sqrt{3}\,a^2}.$$

203. Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck A B C zu construiren, wenn der Umfang = a und die Höhe C F = h gegeben ist.

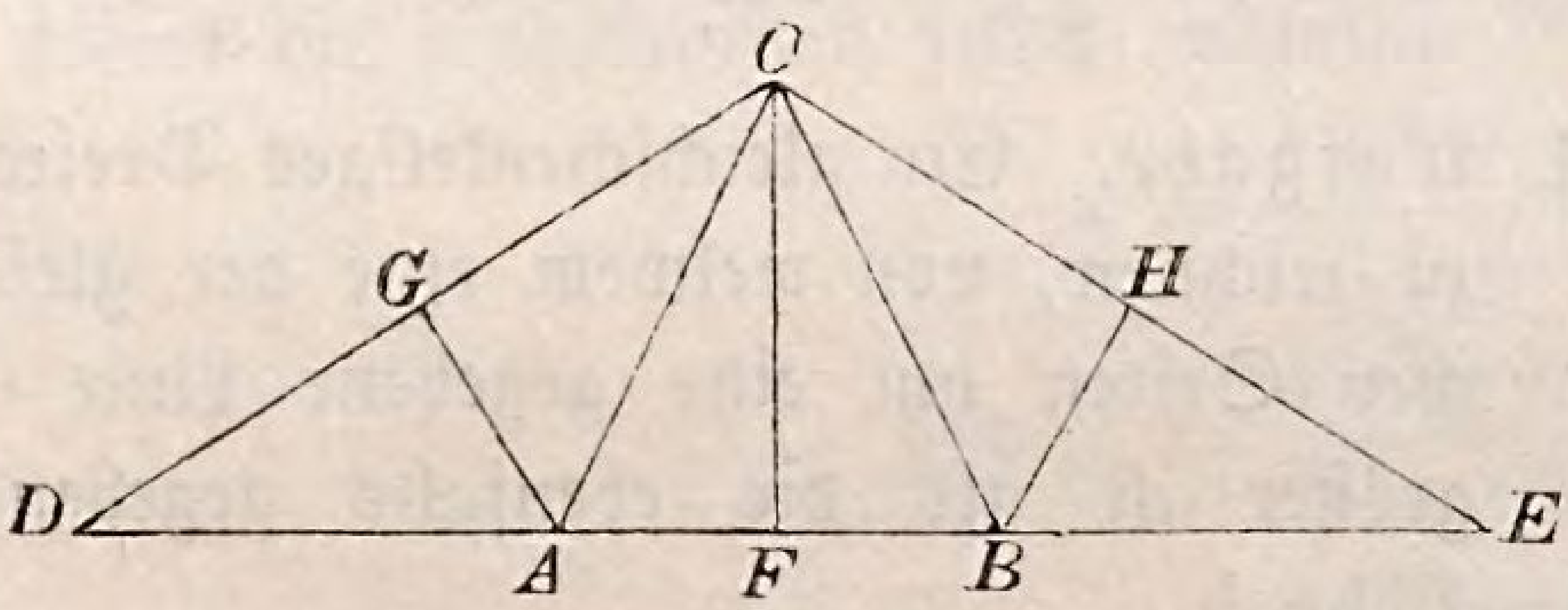


Fig. 139.

Analysis. Angenommen, Dreieck A B C sei das verlangte, so ist, wenn man A B auf beiden Seiten so weit verlängert, daß A D = A C und B E = B C wird, D E = a. Verbindet man D und E mit C, so ist das Dreieck C D E gleichschenkelig, nämlich C D = C E, während noch die Höhe C F auf der Mitte der Grundlinie steht. Daher kennt man Dreieck C D E. Ferner sind, weil A D = A C und B E = B C gemacht worden, die Dreiecke A C D und B C E gleichschenkelig. Errichtet man auf der Mitte ihrer Grundlinien in G und H Lothe bis zum Durchschnitt mit D E, so finden sich die Punkte A und B, die, mit C verbunden, das gesuchte Dreieck A B C ergeben.

Construction. Man zeichne eine Linie D E = a, errichte in ihrer Mitte ein Loth F C = h und verbinde C mit D und E.

Alsdann errichte man auf der Mitte von C D und C E die Lothe G A und H B bis zum Durchschnitt mit D E, und ziehe noch A C und B C, so ist $\triangle$ A B C das verlangte.

Berechnung. Wird einer der gleichen Schenkel $= x$ und die Grundlinie $= y$ gesetzt, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } 2x + y = a$$

$$\text{und II. } x^2 - \tfrac{1}{4} y^2 = h^2.$$

Aus I. findet sich

$$y = a - 2x,$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2} y = \tfrac{1}{2} a - x,$$

$$\text{und } \tfrac{1}{4} y^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - a x + x^2.$$

Durch Substituirung dieses Werthes von $\frac{1}{4} y^2$ verwandelt sich die Gleichung II. in

$$x^2 - (\tfrac{1}{4} a^2 - a x + x^2) = h^2,$$

$$\text{d. i. } a x - \tfrac{1}{4} a^2 = h^2,$$

$$\text{woraus folgt } x = \frac{h^2 + \frac{1}{4} a^2}{a} \text{ und } y = \frac{\frac{1}{2} a^2 - 2 h^2}{a}.$$

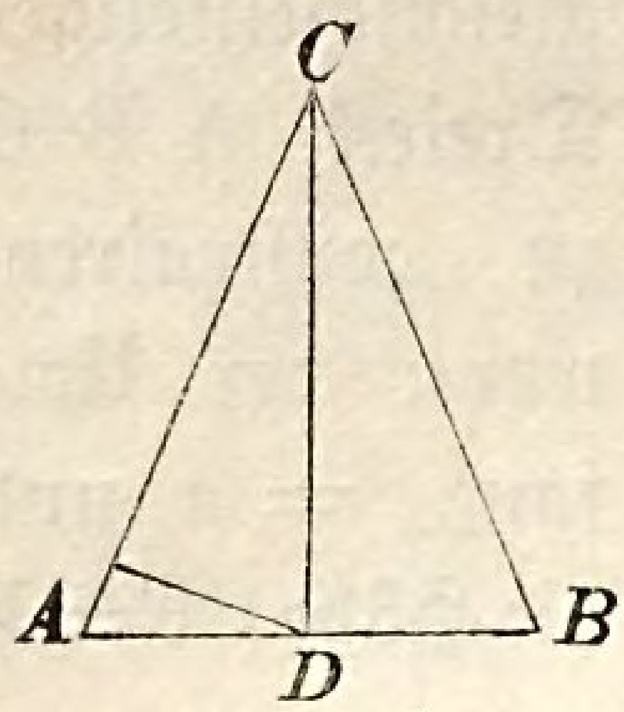


Fig. 140.

204. Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine der gleichen Seiten um eine gegebene Linie d größer ist als die ebenfalls gegebene Höhe h.

Geometrische Lösung. Man errichte auf einer beliebigen Linie A B ein Loth $C D = h$, und schneide mit einer Zirkelöffnung $= h + d$ von C aus die A B auf beiden Seiten von C D, so finden sich die Punkte A und B, die, mit C verbunden, das verlangte Dreieck A B C ergeben.

Algebraische Lösung. Wird jede der gleichen Seiten $= x$ und die Grundlinie $= 2y$ gesetzt, so finden folgende beiden Gleichungen statt:

$$\text{I. } x - h = d \text{ und II. } x^2 - y^2 = h^2.$$

Aus I. findet sich

$$x = h + d \text{ und } x^2 = h^2 + 2 d h + d^2.$$

Setzt man diesen Werth von x^2 in die Gleichung II., so erhält man

$$h^2 + 2 d h + d^2 - y^2 = h^2,$$

oder $y^2 = 2dh + d^2$,

folglich $y = \sqrt{d(2h + d)}$

und die Grundlinie selbst, d. i. $2y = 2\sqrt{d(2h + d)}$.

205. **Aufgabe.** Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Höhe $= h$ und die Differenz zwischen der Summe der beiden gleichen Seiten und der Grundlinie $= d$ gegeben ist.

Auflösung. Man setze jede der gleichen Seiten $= x$ und die Grundlinie $= 2y$, so erhält man die beiden Gleichungen:

I. $2x - 2y = d$ und II. $x^2 - y^2 = h^2$,

oder $x - y = \frac{1}{2}d$ oder $(x + y)(x - y) = h^2$.

Die Gleichung II. durch I. dividirt gibt

$$x + y = \frac{2h^2}{d}.$$

Aus der Summe $x + y$ und der Differenz $x - y$ finden sich sofort die Unbekannten selbst, nämlich

$$x = \frac{4h^2 + d^2}{4d}$$

und $y = \dfrac{4h^2 - d^2}{4d}$,

also $2y = \dfrac{4h^2 - d^2}{4d}$.

206. **Aufgabe.** Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine der gleichen Seiten $= a$ und die Summe aus der Grundlinie und der Höhe $= b$ gegeben ist.

Auflösung. Die Grundlinie sei $= 2x$ und die Höhe $= y$, so findet sich

I. $2x + y = b$ und II. $x^2 + y^2 = a^2$.

Wird, um die Berechnung zu erleichtern,

$$2x - y = d$$

eingeführt, so erhalten wir mit Hülfe der Gleichung I., indem wir addiren,

$4x = b + d$,

oder $x = \frac{1}{4}(b + d)$, also $x^2 = \frac{1}{16}(b^2 + 2bd + d^2)$;

und wenn wir subtrahiren,

$$2\,y = b - d,$$

oder $y = \frac{1}{2}(b - d)$, also $y^2 = \frac{1}{4}(b^2 - 2\,b\,d + d^2)$.

Durch Substituirung der Werthe von x^2 und y^2 verwandelt sich die Gleichung II. in

$$\tfrac{1}{16}(5\,b^2 - 6\,b\,d + 5\,d^2) = a^2,$$

oder $5\,d^2 - 6\,b\,d = 16\,a^2 - 5\,b^2$,

und, wenn auf beiden Seiten mit 5 multiplicirt wird,

$$25\,d^2 - 30\,b\,d = 80\,a^2 - 25 b^2.$$

Hieraus folgt $(5\,d - 3\,b)^2 = 80\,a^2 - 16\,b^2 = 16(5\,a^2 - b^2)$;

daher ist $5\,d = 3\,b \pm 4\sqrt{5\,a^2 - b^2}$,

$$\text{und } d = \frac{3\,b \pm 4\sqrt{5\,a^2 - b^2}}{5}.$$

$$\text{Nun ist } \tfrac{1}{4}(b + d) = x = \frac{8\,b \pm 4\sqrt{5\,a^2 - b^2}}{2\,v} = \frac{2\,b \pm \sqrt{5\,a^2 - b^2}}{5},$$

$$\text{also } 2\,x = \frac{4\,b \pm 2\sqrt{5\,a^2 - b^2}}{5}.$$

$$\text{und } b - 2\,x \text{ oder } y = \frac{b \mp 2\sqrt{5\,a^2 - b^2}}{5}.$$

Zusatz. Wenn außer der Seite a die Differenz zwischen der Grundlinie und der Höhe $= d$ bekannt ist, so hat man

$$2\,x + y = s$$

einzuführen. Dann ergibt die Rechnung

$$x = \tfrac{1}{4}(s + d)$$

$$y = \tfrac{1}{4}(s - d),$$

und die Gleichung II. verwandelt sich in

$$\tfrac{1}{16}(5\,s^2 - 6\,d\,s + 5\,d^2) = a^2,$$

woraus

$$s = \frac{3\,d \pm 4\sqrt{5\,a^2 - d^2}}{5}$$

gefunden wird, sodaß sich ferner ergibt:

$$2\,x = \frac{4\,d \pm 2\sqrt{5\,a^2 - d^2}}{5}$$

$$\text{und } y = \frac{d \mp 2\sqrt{5\,a^2 - d^2}}{5}.$$

Setzt man also in den obengefundenen Formeln statt b allemal d, so ergeben sich die hier gesuchten Ausdrücke für die Grundlinie $2x$ und die Höhe y.

207. **Aufgabe.** Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn der Flächeninhalt $= F$ und die Höhe $= h$ gegeben ist.

Auflösung. Die Grundlinie sei $= 2y$ und eine der gleichen Seiten $= x$. Zur Bestimmung der Unbekannten dienen die beiden Gleichungen

$$\text{I. } h.y = F \text{ und II. } x^2 - h^2 = y^2.$$

Aus I. ergibt sich sogleich

$$y = \frac{F}{h};$$

$$\text{also } 2y = \frac{2F}{h} = \frac{F}{\frac{1}{2}h},$$

d. h. die Grundlinie des gesuchten Dreiecks ist die andere Seite eines Rechtecks, das bei dem gegebenen Inhalt F noch eine gegebene Seite $\frac{1}{2}h$ hat.

Da jetzt Grundlinie und Höhe bekannt sind, so läßt sich das verlangte gleichschenkelige Dreieck sofort construiren. Um die Seite x zu berechnen, hat man nur

$$y^2 = \frac{F^2}{h^2}$$

in die Gleichung II. zu setzen, wodurch sich ergibt:

$$x^2 = h^2 + \frac{F^2}{h^2}.$$

$$\text{Demnach ist } x = \frac{\sqrt{h^4 + F^2}}{h}.$$

208. **Aufgabe.** Ein gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, das den Flächeninhalt F und eine gegebene Grundlinie hat.

Auflösung. Die gegebene Grundlinie sei $= 2a$, die gesuchte Höhe $= y$ und die unbekannte Seite $= x$, so erhält man die Gleichungen

$$\text{I. } ay = F \text{ und II. } x^2 - a^2 = y^2.$$

Die erste Gleichung ergibt sogleich

$$y = \frac{F}{a},$$

sodaß nun Grundlinie und Höhe des gesuchten Dreiecks bekannt sind.

Da ferner

$$y^2 = \frac{F^2}{a^2}$$

ist, so verwandelt sich dadurch die Gleichung II. in

$$x^2 = \frac{F^2 + a^4}{a^2},$$

$$\text{woraus } x = \frac{\sqrt{F^2 + a^4}}{a}$$

gefunden wird.

209. **Aufgabe.** Aus einer der gleichen Seiten b und dem Flächeninhalt F das gleichschenkelige Dreieck zu finden.

Auflösung. Um die Grundlinie 2 x und die Höhe y zu finden, hat man die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x\,y = F \text{ und II. } x^2 + y^2 = b^2$$

in bekannter Weise zu lösen.

Aus I. folgt

$$2\,x\,y = 2\,F,$$

und diese Gleichung zu II. addirt, bezüglich von derselben subtrahirt, führt zu den beiden neuen Gleichungen

$$\text{III. } (x + y)^2 = b^2 + 2\,F \text{ und IV. } (x - y)^2 = b^2 - 2\,F,$$

woraus sich ergibt:

$$\text{V. } x + y = \sqrt{b^2 + 2\,F} \text{ und VI. } x - y = \sqrt{b^2 - 2\,F}.$$

Aus der Summe und der Differenz der Unbekannten aber werden diese selbst leicht gefunden, nämlich

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2\,F} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - 2\,F}.$$

Daher ist nun auch die Grundlinie 2 x bekannt.

Anmerkung. Um diese Formel geometrisch zu construiren, verwandle man das Rechteck von dem Inhalt 2 F in ein Quadrat, sodaß dann nur noch die Summe und die Differenz zweier Quadrate als Quadrat darzustellen ist.

210. Aufgabe. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ist gegeben die Hypotenuse $= a$ und der Inhalt $= F$; man soll das Dreieck selbst finden.

Wenn x und y die gesuchten Katheten sind, so hat man zu ihrer Bestimmung folgende beiden Gleichungen:

$$\text{I. } x\,y = 2\,F \text{ und II. } x^2 + y^2 = a^2.$$

Wird die Gleichung I. mit 2 multiplicirt, so findet man

$$2\,x\,y = 4\,F;$$

und mit Hülfe der Gleichung II.

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,y = a^2 + 4\,F \text{ und } x^2 + y^2 - 2\,x\,y = a^2 - 4\,F,$$

woraus sich ergibt:

$$x + y = \sqrt{a^2 + 4\,F} \text{ und } x - y = \sqrt{a^2 - 4\,F}.$$

Diese beiden Gleichungen, zueinander addirt, oder voneinander subtrahirt, geben endlich

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4\,F} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\,F},$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4\,F} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\,F}.$$

Anmerkung. Um diese Formel geometrisch zu construiren, hat man das Rechteck von dem Inhalt $4\,F$ zuvor in ein Quadrat zu verwandeln, um dann in bekannter Weise verfahren zu können.

211. Aufgabe. Von einem rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreieck ist der Umfang $= u$ und die auf die Hypotenuse gefällte Höhe $= h$ gegeben; man soll die Seiten des Dreiecks finden.

Auflösung. Wenn die gleichen Katheten mit x bezeichnet werden, so ist die Hypotenuse $= \sqrt{2\,x^2} = x\sqrt{2}$, also der Umfang

$$u = x\,(2 + \sqrt{2}),$$

woraus sich findet

$$\text{I. } x = \frac{u}{2 + \sqrt{2}}.$$

Ferner ist der doppelte Inhalt des Dreiecks =

$$x^2 = h \cdot x\sqrt{2}.$$

Diese Gleichung ergibt

$$\text{II. } x = h\sqrt{2}.$$

Aus I. und II. folgt aber

$$h\sqrt{2} = \frac{u}{2 + \sqrt{2}}$$

oder $2h(1 + \sqrt{2}) = u$.

Dies ergibt $h = \frac{u}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{u^2}{2u + 2u\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}u^2}{\frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{2}u \cdot u}}$,

d. h. die auf die Hypotenuse eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks gefällte Höhe ist selbst schon bekannt, wenn nur der Umfang $= u$ gegeben ist. Demnach würde obige Aufgabe allgemein so auszudrücken zu sein: Ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, das den gegebenen Umfang u hat.

Soll die Hypotenuse noch berechnet werden, so hat man nur den in der Gleichung I. gefundenen Werth von x in den Ausdruck $x\sqrt{2}$ zu setzen, wodurch man für die Hypotenuse die Formel

$$\frac{u\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

oder, wenn man oben und unten mit $2 - \sqrt{2}$ multiplicirt und dann gehörig kürzt,

$$u(-1 + \sqrt{2}) \text{ oder } -u + \sqrt{2u^2}$$

erhält.

212. Aufgabe. Ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck zu zeichnen, wenn die auf die Hypotenuse gefällte Höhe $= h$ gegeben ist.

Die geometrische Lösung besteht blos darin, daß man einen rechten Winkel zeichne, denselben durch eine Linie $= h$ halbire und die Schenkel des rechten Winkels so weit verlängere, bis sie die durch den Fußpunkt der Höhe h rechtwinkelig gelegte Gerade schneiden. Das dadurch entstehende Dreieck ist das oben verlangte.

Berechnung. Es sei jede der Katheten $= x$, die Hypotenuse daher $= x\sqrt{2}$, so ist der doppelte Inhalt des Dreiecks $=$

$$x^2 = h \cdot x\sqrt{2};$$

und daraus folgt $x = h\sqrt{2} = \sqrt{2h^2}$,

sowie $x\sqrt{2} = 2h$,

d. h. im rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse genau das Doppelte der auf sie gefällten Höhe.

213. Aufgabe. Die Katheten a und b eines rechtwinkeligen Triangels zu berechnen, wenn die Höhe h auf die Hypotenuse c und der Flächeninhalt F gegeben ist.

Auflösung. Der doppelte Flächeninhalt ist

$$2F = ch,$$

und daraus folgt $c = \frac{2F}{h}$.

Ferner ist

$$a^2 + b^2 = c^2 = \frac{4F^2}{h^2}, \text{ und } ab = ch = 2F.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben

$$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{4F(F+h^2)}{h^2} \text{ und } a^2 - 2ab + b^2 = \frac{4F(F-h^2)}{h^2},$$

$$\text{also } a + b = \frac{2}{h}\sqrt{F(F+h^2)} \text{ und } a - b = \frac{2}{h}\sqrt{F(F-h^2)};$$

und daraus findet man

$$a = \frac{1}{h}\sqrt{F(F+h^2)} + \frac{1}{h}\sqrt{F(F-h^2)}$$

$$b = \frac{1}{h}\sqrt{F(F+h^2)} - \frac{1}{h}\sqrt{F(F-h^2)}.$$

Anmerkung. Um ohne vorherige Berechnung der Katheten das Dreieck geometrisch zu construiren, beschreibe man über der gegebenen Hypotenuse einen Halbkreis, errichte in einem beliebigen Punkt derselben ein Loth = h und ziehe durch den obern Endpunkt dieses Lothes eine Parallele mit der Hypotenuse. Wo die Parallele den Halbkreis berühret, liegt die Spitze des gesuchten Dreiecks.

214. Aufgabe. Die Seiten eines rechtwinkeligen Triangels zu finden, wenn s, die Summe seiner Katheten, und h, die Höhe auf die Hypotenuse, gegeben ist.

Auflösung. Wird die Differenz der Katheten oder $x - y = d$ angenommen, so erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d) \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(s - d),$$

und für die Hypotenuse $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2 + d^2)}$.

Der doppelte Inhalt des Dreiecks ist demnach =

$$\tfrac{1}{4}(s^2 - d^2) = h\sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2 + d^2)},$$

und hieraus ergibt sich durch weiteres Umformen:

$$d^4 - (2s^2 + 8h^2)d^2 = 8h^2s^2 - s^4,$$

deshalb auch $d^2 = s^2 + 4h^2 \pm \sqrt{16h^2(s^2 + h^2)}$;

folglich $d = \sqrt{s^2 + 4h^2 \pm 4h\sqrt{s^2 + h^2}}$;

also schließlich

$$x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 + 4h^2 - 4h\sqrt{s^2 + h^2}}$$

und $y = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 + 4h^2 - 4h\sqrt{s^2 + h^2}}$.

Anmerkung. Um sich durch Rechnung zu überzeugen, daß in der Formel für d^2 das $(+)$ Zeichen vor der Wurzelgröße unbeachtet bleiben muß, setze man der Kürze wegen die Hypotenuse $= z$. Dann ist

I. $z^2 = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}d^2$ und II. $hz = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}d^2$.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen zuerst d dadurch, daß man die II. mit der Zahl 2 multiplicirt und zu der I. addirt, so ergibt sich

$$z^2 + 2hz = s^2,$$

woraus $z = -h \pm \sqrt{s^2 + h^2}$ folgt.

Da z die Hypotenuse vorstellt, so muß der Werth positiv sein, also hat man

$$z = -h + \sqrt{s^2 + h^2},$$

und durch Substituirung dieses Werthes für z verwandelt sich die Gleichung II. in

$$-h^2 + h\sqrt{s^2 + h^2} = \tfrac{1}{4}s^2 - \tfrac{1}{4}d^2,$$

oder $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}s^2 + h^2 - h\sqrt{s^2 + h^2}$,

auch $d^2 = s^2 + 4h^2 - 4h\sqrt{s^2 + h^2}$;

daher ist $d = \sqrt{s^2 + 4h^2 - 4h\sqrt{s^2 + h^2}}$.

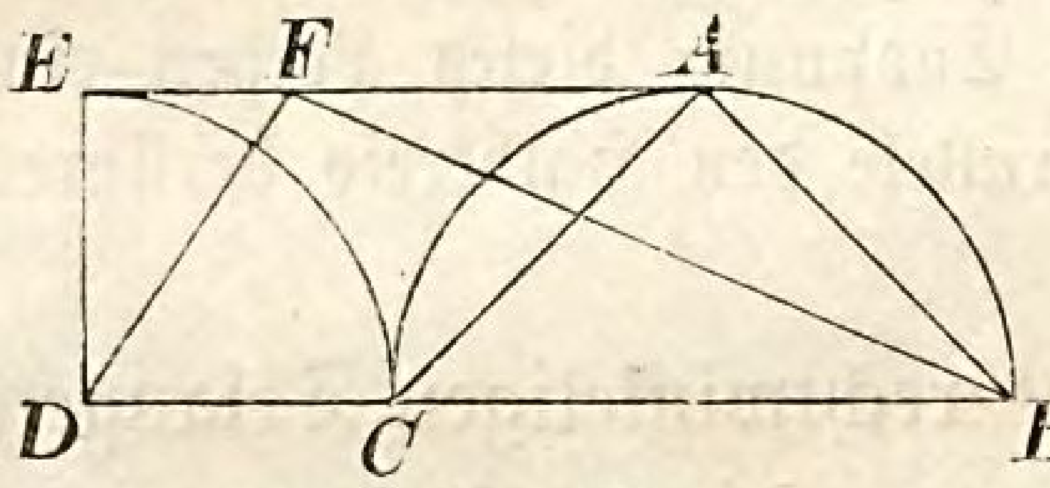


Fig. 141.

Geometrische Construction. Man construire aus s und h ein rechtwinkeliges Dreieck B D F, sodaß die Hypotenuse $BD = \sqrt{s^2 + h^2}$ wird, beschreibe aus D mit dem Radius $DF = h$ den Quadranten E F C, so ist B C die Hypotenuse des gesuchten rechtwinkeligen Dreiecks. Ueber B C errichte man einen Halbkreis C A B und ziehe durch E die mit B D parallele E A, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Die Construction der algebraischen Formeln für x, y und z verlangt zunächst, daß der Gleichung

$$s^2 + h^2 = u^2$$

Genüge geschehe. Dann findet sich sofort

$$z = u - h.$$

Um aber x und y zu finden, hat man erst noch v^2 so zu zeichnen, daß

$$4hu = v^2$$

wird. Alsdann ergibt sich

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}s \pm \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + 4h^2 - v^2},$$

welche Formeln nach dem Pythagoräischen Lehrsatze leicht zu construiren sind.

215. Aufgabe. Aus der Hypotenuse a eines rechtwinkeligen Dreiecks und der Differenz d seiner Katheten die letztern zu finden.

Auflösung. Die gesuchten Katheten sind x und $x + d$, also hat man

$$x^2 + (x + d)^2 \text{ oder } 2x^2 + 2dx + d^2 = a^2,$$

$$\text{oder } x^2 + dx = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}d^2;$$

$$\text{also } x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}d^2}.$$

216. Aufgabe. Aus einer Kathete a eines rechtwinkeligen Triangels und der Differenz d zwischen der andern Kathete und der Hypotenuse die letztere zu finden.

Auflösung. Wird die Hypotenuse mit x bezeichnet, so ist die unbekannte Kathete $= x - d$, und demnach

$$x^2 = (x - d)^2 + a^2,$$

$$\text{oder } 2dx = a^2 + d^2;$$

$$\text{also } x = \frac{a^2 + d^2}{2d} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{d} + \frac{d}{2}.$$

217. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn der Umfang $= a$ und die Höhe auf der Hypotenuse $= b$ gegeben ist.

Auflösung. Die Hypotenuse sei $= x$, also die Summe der beiden Katheten $= a - x$. Wird nun die Differenz der Katheten mit y bezeichnet, so sind dieselben

$$\frac{1}{2}(a - x + y) \text{ und } \frac{1}{2}(a - x - y);$$

und es ergeben sich daraus folgende Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{(a - x) + y}{2} \cdot \frac{(a - x) - y}{2} = bx$$

$$\text{und II. } (a - x + y)^2 + (a - x - y)^2 = 4x^2.$$

Aus I. erhält man

$$\text{III. } (a - x)^2 - 4bx = y^2$$

und aus II.

$$\text{IV. } (a - x)^2 + y^2 = 2x^2.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen y^2 dadurch, daß man statt y^2 den Werth davon setzt, so findet sich

$$2(a - x)^2 - 4bx = 2x^2,$$

oder $(a - x)^2 - 2bx = x^2$,

d. i. $a^2 - 2ax = 2bx$;

woraus folgt $a^2 = 2(a + b)x$,

$$\text{also } x = \frac{a^2}{2(a + b)} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a + b}.$$

Anmerkung. Da nun auch die Hypotenuse bekannt ist, so läßt sich das verlangte Dreieck ohne Schwierigkeit jetzt zeichnen. Sollen aber die Katheten noch besonders berechnet werden, so betrachte man ihre Differenz als Unbekannte. Zu diesem Zwecke dient die Gleichung IV., aus der sich ergibt:

$$y^2 = 2x^2 - (a - x)^2 = x^2 + 2ax - a^2,$$

$$\text{oder } y^2 = x(x + 2a) - a^2 = \frac{a^4 - 4(a^3 b + a^2 b^2)}{4(a + b)^2};$$

$$\text{also } y = \frac{a\sqrt{a^2 - 4b(a + b)}}{2(a + b)}.$$

Es sind also jetzt Summe und Differenz der Katheten bekannt, mithin auch die Katheten selbst.

218. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe der Katheten $= a$ und die Summe der Hypotenuse und der Höhe auf sie $= b$ gegeben ist.

Auflösung. Die Katheten seien x und y, die Höhe auf die Hypotenuse $= h$, und die Hypotenuse selbst, der Kürze wegen, $= z$: so haben wir zur Bestimmung der vier Unbekannten die vier Gleichungen

$$\text{I. } x + y = a,$$

$$\text{II. } z + h = b,$$

$$\text{III. } xy = hz,$$

$$\text{IV. } x^2 + y^2 = z^2.$$

Die zweifache III., zu IV. addirt, gibt

$$(x + y)^2 \text{ oder } a^2 = z^2 + 2hz = z(z + h),$$

$$\text{d. i. nach II. } a^2 = b\,z;$$

$$\text{deshalb ist V. } z = \frac{a^2}{b}.$$

Ferner ist nach II.:

$$h = b - z;$$

$$\text{also jetzt VI. } h = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

$$\text{Aus III. findet sich } x\,y = h\,z = \frac{a^2}{b}\left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right);$$

$$\text{demnach VII. } 4\,x\,y = \frac{4\,a^2\,(b^2 - a^2)}{b^2}.$$

Diese Gleichung aber in Verbindung mit I. gibt die beiden unbekannten Katheten x und y. Man hat nämlich

$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = a^2;$$

und subtrahiren wir hiervon die Gleichung VII., so erhalten wir

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = \frac{4\,a^4 - 3\,a^2\,b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\,(4\,a^2 - 3\,b^2);$$

$$\text{also } x - y = \frac{a}{b}\,\sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2},$$

sodaß wir nun Summe und Differenz der beiden Unbekannten kennen, woraus sich diese selbst ergeben:

$$x = \tfrac{1}{2}\,a\left(\frac{b + \sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2}}{b}\right)$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}\,a\left(\frac{b - \sqrt{4\,a^2 - 3\,b^2}}{b}\right).$$

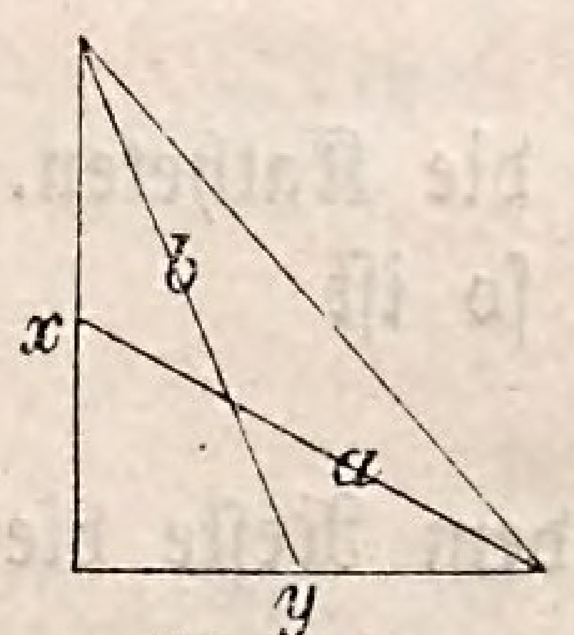


Fig. 142.

219. Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Transversalen a und b gegeben, welche durch die Halbirungspunkte der Katheten gehen; man soll hieraus die beiden Katheten (x und y) finden.

Auflösung. Es ergeben sich hier zwei Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I. } \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = a^2 \text{ oder } x^2 + 4\,y^2 = 4\,a^2$$

$$\text{und II. } x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = b^2 \text{ oder } 4\,x^2 + y^2 = 4\,b^3.$$

Wird die Gleichung II. von der vierfachen I. subtrahirt, so ergibt sich

$$15\,y^2 = 16\,a^2 - 4\,b^2,$$
$$\text{oder } y^2 = \tfrac{4}{15}(4\,a^2 - b^2);$$
$$\text{also } y = \sqrt{\tfrac{4}{15}(4\,a^2 - b^2)}.$$

Subtrahiren wir aber die I. von der vierfachen II., so erhalten wir

$$15\,x^2 = 16\,b^2 - 4\,a^2,$$
$$\text{oder } x^2 = \tfrac{4}{15}(4\,b^2 - a^2);$$
$$\text{daher } x = \sqrt{\tfrac{4}{15}(4\,b^2 - a^2)}.$$

220. Aufgabe. Die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks zu finden, wenn der Umfang $= u$ und der Flächeninhalt $= F$ gegeben ist.

Auflösung. Zur Bestimmung der unbekannten Katheten x und y dienen die beiden Gleichungen

$$\frac{x\,y}{2} = F \text{ und } x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = u,$$

$$\text{oder I } 2\,x\,y = 4\,F \qquad \text{oder II } \sqrt{x^2 + y^2} = u - (x + y).$$

Aus II. findet sich

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2\,u\,(x + y) + x^2 + 2\,x\,y + y^2,$$
$$\text{oder } 2\,u\,(x + y) = u^2 + 2\,x\,y = u^2 + 4\,F \text{ (siehe I)};$$
$$\text{also III } x + y = \frac{u^2 + 4\,F}{2\,u}.$$

Demach ist die Hypotenuse oder $\sqrt{x^2 + y^2}$ nach Gleichung II. $=$

$$u - \left(\frac{u^2 + 4\,F}{2\,u}\right) = \frac{u^2 - 4\,F}{2\,u}.$$

Aus den Gleichungen I. und III. ergeben sich die Katheten. Setzen wir nämlich der Kürze wegen $x + y = s$, so ist

$$(x + y)^2 = s^2.$$

Hiervon die doppelte II abgezogen und aus dem Reste die Wurzel gezogen, gibt:

$$x - y = \sqrt{s^2 - 8\,F}.$$

Aus der Summe und Differenz der Katheten x und y erhält man

$$x = \tfrac{1}{2}\,s + \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 - 8\,F}$$
$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}\,s - \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 - 8\,F}.$$

Da aber $s = \frac{u^2 + 4F}{2u}$ in der Gleichung III. gefunden worden, so hat man nur noch diesen Werth zu quadriren und nebst dem Werthe von $\frac{1}{2}s$ in die Formeln für x und y zu setzen, wodurch man endlich erhält:

$$x = \frac{u^2 + 4F + \sqrt{u^4 - 24u^2F + 16F^2}}{4u}$$

und $$y = \frac{u^2 + 4F - \sqrt{u^4 - 24u^2F + 16F^2}}{4u}.$$

221. Aufgabe. Aus der Fläche F und der Summe s der Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks alle drei Seiten zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man der Kürze wegen die Hypotenuse mit z, während die gesuchten Katheten x und y sind, so ergeben sich die Gleichungen

$$\text{I. } x + y = s \quad \text{II. } xy = 2F \quad \text{III. } z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Durch Einführung einer neuen Unbekannten

$$d = x + y$$

erhält man mit Hülfe der Gleichung I.:

$$x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d$$

und $$y = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d,$$

und diese Werthe, in die II. und III. gesetzt, geben

$$\text{IV. } \tfrac{1}{4}s^2 - \tfrac{1}{4}d^2 = 2F \text{ und V. } z = \sqrt{\tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}d^2},$$

oder $$\text{VI. } \tfrac{1}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}d^2 = 4F \text{ und VII. } z^2 = \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{2}d^2.$$

Werden die VI. und VII. addirt, so findet man

$$s^2 = 4F + z^2,$$

oder $$z^2 = s^2 - 4F;$$

folglich $$\text{VIII. } z = \sqrt{s^2 - 4F}.$$

Um die beiden Katheten noch zu finden, quadrire man die Gleichung I. und ziehe die vierfache II. davon ab, wodurch sich ergibt $(x - y)^2 = s^2 - 8F$; folglich

$$\text{IX. } x - y = \sqrt{s^2 - 8F}.$$

Aus den Gleichungen I. und IX. aber findet man sogleich

$$x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 - 8F}$$

und $$y = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}\sqrt{s^2 - 8F}.$$

222. Aufgabe. Aus der Fläche F und der Hypotenuse a eines rechtwinkeligen Dreiecks die beiden Katheten zu finden.

Auflösung. Die Katheten seien x und y, so ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 = a^2 \text{ und II. } x y = 2 F.$$

Die doppelte II., zur I. addirt, gibt

$$\text{III. } (x + y)^2 = a^2 + 4 F \text{ oder } x + y = \sqrt{a^2 + 4 F}.$$

Subtrahirt man aber die verdoppelte II. von der I., so erhält man:

$$\text{IV. } (x - y)^2 = a^2 - 4 F \text{ oder } x - y = \sqrt{a^2 - 4 F}.$$

Aus III. und IV. ergibt sich durch Addition, bezüglich durch Subtraction:

$$x = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4 F} + \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4 F}$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4 F} - \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4 F}.$$

223. Aufgabe. Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks zu finden, wenn die Hypotenuse = a gegeben ist und der Umfang ebenso viel Längeneinheiten (z. B. Zoll) haben soll, als der Inhalt Flächeneinheiten (z. B. Quadratzoll.)

Auflösung. Zur Bestimmung der Unbekannten x und y dienen die beiden Gleichungen

$$\text{I. } x^2 + y^2 = a^2 \text{ und II. } \frac{x y}{2} = a + x + y,$$

welche, wenn

$$x = \tfrac{1}{2} s + \tfrac{1}{2} d \text{ und } y = \tfrac{1}{2} s - \tfrac{1}{2} d$$

gesetzt wird, sich verwandeln in

$$\text{III. } \tfrac{1}{2} s^2 + \tfrac{1}{2} d^2 = a^2 \text{ und IV. } \tfrac{1}{8} s^2 - \tfrac{1}{8} d^2 = a + s.$$

Die vierfache IV. zur III. addirt, bezüglich von derselben subtrahirt, gibt

$$\text{V. } s^2 = a^2 + 4 a + 4 s \text{ und VI. } d^2 = a^2 - 4 a - 4 s.$$

Aus V. findet sich

$$s^2 - 4 s = a^2 + 4 a,$$

$$\text{also VII. } s = 2 + \sqrt{a^2 + 4 a + 4} = 2 + a + 2 = a + 4.$$

Demnach verwandelt sich VI. in

$$d^2 = a^2 - 8 a - 16;$$

$$\text{deshalb ist VIII. } d = \sqrt{a^2 - 8 a - 16}.$$

Die Gleichungen VII. und VIII. aber ergeben ohne weiteres

$$x = \tfrac{1}{2}\,a + 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 8a - 16}$$

und $$y = \tfrac{1}{2}\,a + 2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 8a - 16}.$$

Anmerkung. Da man bei numerischen Berechnungen fast immer für die Katheten Bruchtheile erhält, so fragt es sich jetzt, wie man die Hypotenuse annehmen muß, damit die Formeln für die Katheten ganze Zahlen ergeben. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\sqrt{a^2 - 8\,a - 16} = a - z,$$

wodurch sich findet:

$$x = \frac{a + 4 + a - z}{2} = a + 2 - \frac{z}{2}$$

und $$y = \frac{a + 4 - (a - z)}{2} = 2 + \frac{z}{2}.$$

Ferner ist $a^2 - 8\,a - 16 = a^2 - 2\,a\,z + z^2$,

also auch $2\,a\,z - 8\,a = z^2 + 16$,

oder $(2\,z - 8)\,a = z^2 + 16$;

daher $a = \dfrac{z^2 + 16}{2\,z - 8}$.

Die Ausführung der hier angezeigten Division, nämlich:

Divisor	Dividend	Quotient
$2\,z - 8$	$z^2 + 16$	$= \dfrac{z}{2} + 2 + \dfrac{16}{z - 4}$
	$z^2 - 4\,z$	
	$4\,z + 16$	
	$4\,z - 16$	$\underbrace{}_{2}$
	$\dfrac{32}{2\,z - 8}$	$\dfrac{16}{z - 4}$

ergibt: $a = \dfrac{z}{2} + 2 + \dfrac{16}{z - 4}$,

und dieser Werth, in obige Formel für x gesetzt, liefert sogleich

$$x = 4 + \frac{16}{z - 4},$$

während $y = 2 + \dfrac{z}{2}$

bereits bekannt ist.

Da also a eine ganze Zahl ist, so müssen auch x und y ganze Zahlen sein. Dazu gehört aber,

1. daß $z - 4$ eine ganze Zahl sei,
2. daß $z - 4$ ein genauer Theil von 16, also eine gerade Zahl sei,
3. daß z nicht größer als $16 + 4$ angenommen werde.

Der möglichen Fälle gibt es hier nur zwei. Wird nämlich $z = 6$ oder $z = 8$ genommen, so findet sich im ersten Falle $x = 12$ und im

zweiten $x = 8$, während $y = 5$, bezüglich $= 6$ wird. Die Hypotenuse ist dann $= 13$, bezüglich $= 10$, und der Umfang sowie der Flächeninhalt $= 12 + 5 + 13 = \frac{12 \times 5}{2} = 30$, oder im zweiten Falle $= 8 + 6 + 10 = \frac{8 \times 6}{2} = 24$. Außer den Zahlen 6 und 8 gibt es keine andere Zahl für z, weil alle, nachdem 4 subtrahirt worden, keine Theiler von 16 sind, die zum Quotienten eine ganze Zahl ergeben.

Achter Abschnitt.

Geometrisch-algebraische Entwickelungen am Triangel überhaupt und rein geometrische Construction desselben unter Bedingungen.

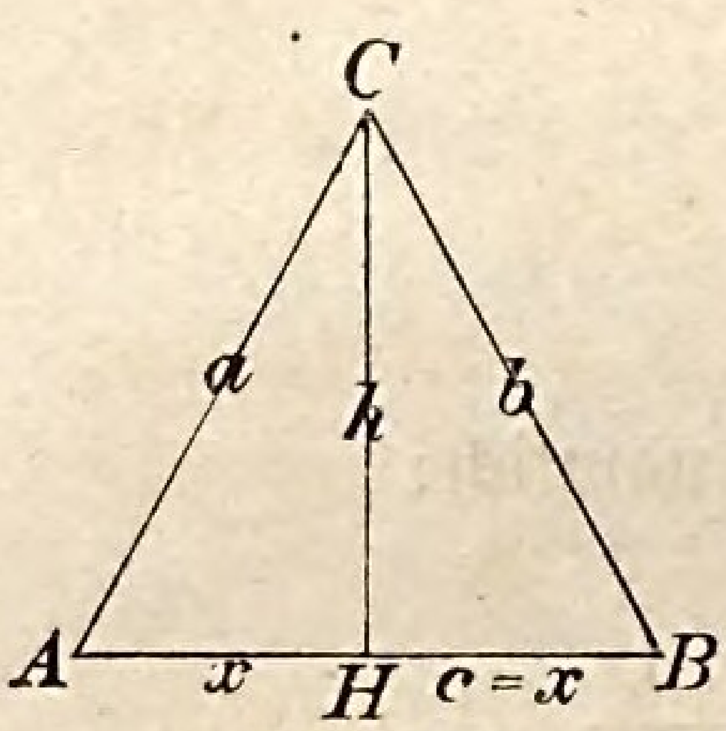


Fig. 143.

224. Aufgabe. Im Dreieck A B C sind die Seiten $AC = a$, $BC = b$ und $AB = c$ gegeben; man soll die Segmente A H und B H, in welche die Grundlinie A B durch die Höhe C H getheilt wird, durch Rechnung finden.

Auflösung. Setzen wir der Kürze wegen die Höhe $= h$ und das Segment $AH = x$, so ist $BH = c - x$. Da das Dreieck A B C durch die Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke A C H und B C H zerlegt worden, so können wir, dem Pythagoräischen Lehrsatze gemäß, das Quadrat der Höhe zweimal ausdrücken, wodurch sich folgende Gleichung findet:

$$h^2 = a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

oder $a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$;

also $a^2 + c^2 - b^2 = 2cx$;

folglich A H oder $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

und B H oder $c - x = c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

225. Aufgabe. Vom Dreieck A B C (Fig. 143) sind die beiden Seiten $AC = a$ und $AB = c$ gegeben; man soll die dritte Seite B C oder b, deren gegenüberliegender Winkel A ein spitzer ist, durch Rechnung finden.

Auflösung. Nehmen wir wieder, wie in der vorigen Aufgabe, die Höhe und die Segmente der Grundlinie zu Hülfe, so erhalten wir zwei Gleichungen, nämlich:

$$\text{I. } a^2 = h^2 + x^2 \text{ und II. } b^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Aus I. erhellt $h^2 = a^2 - x^2$,

und dieser Werth von h^2, in II. gesetzt, gibt

$$b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2\,c\,x + x^2,$$

folglich $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c\,x$,

d. h. das Quadrat der Seite b ist, wenn der ihr gegenüberliegende Winkel A ein spitzer ist, stets kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck aus c und x (d. i. aus A B und A H).

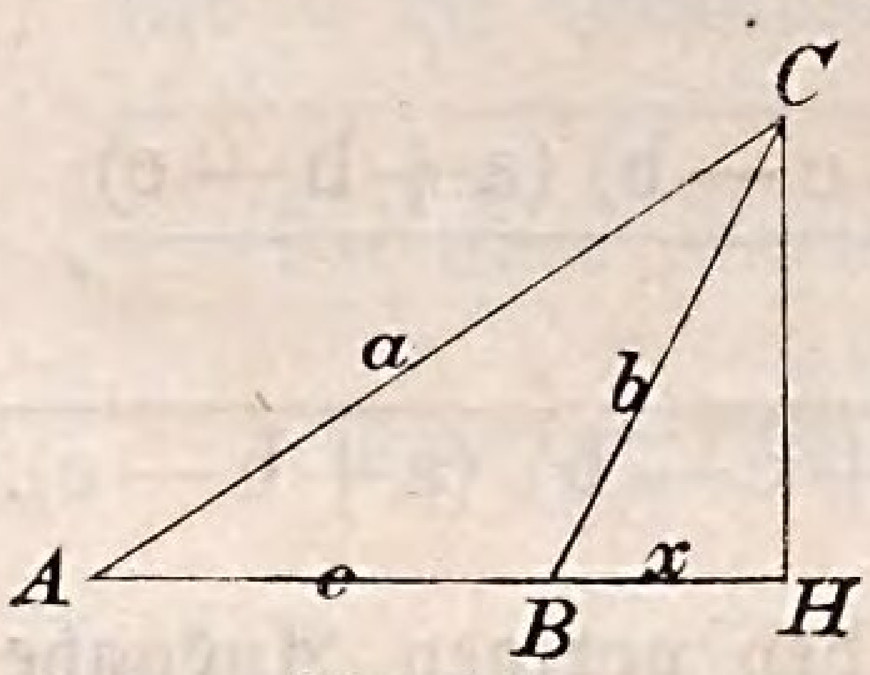


Fig. 144.

226. Aufgabe. Im Dreieck A B C sind A B = c und B C = b gegeben, man soll die dritte Seite A C oder a finden, wenn noch vorausgesetzt wird, daß der ihr gegenüberliegende Winkel B ein stumpfer ist.

Auflösung. Diesmal fällt die Höhe C H auf die Verlängerung der Grundlinie A B. Bezeichnen wir diese Verlängerung B H mit x, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } b^2 = h^2 + x^2 \text{ und II. } a^2 = h^2 + (c + x)^2.$$

Aus I. folgt $h^2 = b^2 - x^2$,

und durch Substituirung dieses Werthes von h^2 verwandelt sich die Gleichung II. in

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2\,c\,x + x^2,$$

d. i. $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c\,x$,

d. h. das Quadrat der Seite a, deren gegenüberstehender Winkel B ein stumpfer ist, ist stets größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, und zwar um das doppelte Rechteck aus c und x (d. h. aus A B und deren Verlängerung B H).

227. Aufgabe. Die Höhe h des Dreiecks A B C durch die drei Seiten a, b und c auszudrücken.

Auflösung. Gehen wir von Fig. 143 aus, so haben wir

$$h^2 = a^2 - x^2;$$

$$\text{also } h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(a + x)\ (a - x)},$$

und da in Nr. 224 bereits $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ gefunden worden, so haben wir diesen Werth statt x in die Formel für h zu zu setzen. Es ist aber

$$a + x = a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c}$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}$$

$$\text{und } a - x = a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c}.$$

Daher findet sich

$$h = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4c^2}},$$

$$\text{oder } h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Betrachten wir nun Fig. 144. Aus der vorigen Ausgabe (226) ist bekannt:

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ und } x = \frac{a^2 - (c^2 + c^2)}{2c},$$

$$\text{also } h = \sqrt{(b+x)(b-x)}.$$

Wird der Werth von x substituirt, so findet sich zunächst:

$$b + x = b + \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2c} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2c}$$

$$\text{und } b - x = b - \frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2c};$$

folglich wie oben:

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Zusatz. Wird $a + b + c = s$ gesetzt, so ist $b + c - a = s - 2a$, $a + c - b = s - 2b$ und $a + b - c = s - 2c$, daher:

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{s(s-2a)(s-2b)(s-2c)},$$

oder $h = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)(\frac{1}{2} s - c)}$.

Diese letztere Formel erleichtert numerische Berechnungen, indem sie dieselben sehr abkürzt, wovon man sich bei der praktischen Anwendung bald überzeugt.

228. Aufgabe. Den Inhalt F eines Dreiecks zu finden, wenn die drei Seiten a, b und c gegeben sind.

Auflösung. Der Inhalt jedes Dreiecks ist das halbe Product aus den Längeneinheiten der Grundlinie und Höhe. Wenn also c die Grundlinie und h die Höhe vorstellt, so findet sich

$$F = \tfrac{1}{2} c\, h.$$

Da aber bereits in der vorigen Aufgabe

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

oder $h = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)(\frac{1}{2} s - c)}$

sich ergeben hat, so erhellt:

$$F = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

oder $F = \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)(\frac{1}{2} s - c)}$.

229. Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks den Halbmesser R des umschriebenen Kreises zu finden (Fig. 16).

Auflösung. In dem Dreieck A B C sei A B = c die Grundlinie und C H = h die Höhe und K der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Wird nun von C aus der Durchmesser C G = 2 R gezogen und G mit A verbunden, so erhalten wir zwei rechtwinkelige Dreiecke A C G und B C H, die wegen der gleichen Peripheriewinkel B und G einander ähnlich sind. Daher findet folgende Proportion statt:

$$AC : CG = CH : BC$$

d. h. $a : 2R = h : b$.

Folglich ist $R = \frac{ab}{2h}$.

Wird Zähler und Nenner mit c multiplicirt, so erhellt:

$$R = \frac{a\,b\,c}{2\,c\,h} = \frac{a\,b\,c}{4\,F},$$

oder nach Nr. 228:

$$R = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}},$$

oder auch $R = \frac{\frac{1}{4}\,a\,b\,c}{\sqrt{\frac{1}{2}\,s\,(\frac{1}{2}\,s-a)\,(\frac{1}{2}\,s-b)\,(\frac{1}{2}\,s-c)}}$.

Zusatz. Sind nicht blos die drei Seiten bekannt, sondern auch der Radius R des umschriebenen Kreises, so findet sich aus dieser Gleichung der Inhalt des Dreiecks:

$$F = \frac{a\,b\,c}{4\,R}.$$

230. Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks A B C den Halbmesser r des darin beschriebenen Kreises zu bestimmen. (Fig. 17.)

Auflösung. Ist K der Mittelpunkt des Kreises, so sind die Lothe aus K auf die Seiten Halbmesser des eingeschriebenen Kreises. Demnach hat man:

$$\triangle\ A\,C\,K = \tfrac{1}{2}\,a\,r,$$
$$\triangle\ A\,B\,K = \tfrac{1}{2}\,c\,r$$
und $\triangle\ B\,C\,K = \tfrac{1}{2}\,b\,r,$
folglich $\triangle\ A\,B\,C = \tfrac{1}{2}\,r\,(a+b+c).$

Dies ist wieder ein Ausdruck für den Flächeninhalt F des gegebenen Dreiecks, und dadurch erhalten wir nach Nr. 228 die Gleichung: $r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

$$= F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)};$$

woraus sich ergibt:

$$r = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{a+b+c},$$

oder $r = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{1}{2}\,s\,(\frac{1}{2}\,s-a)\,(\frac{1}{2}\,s-b)\,(\frac{1}{2}\,s-c)}$.

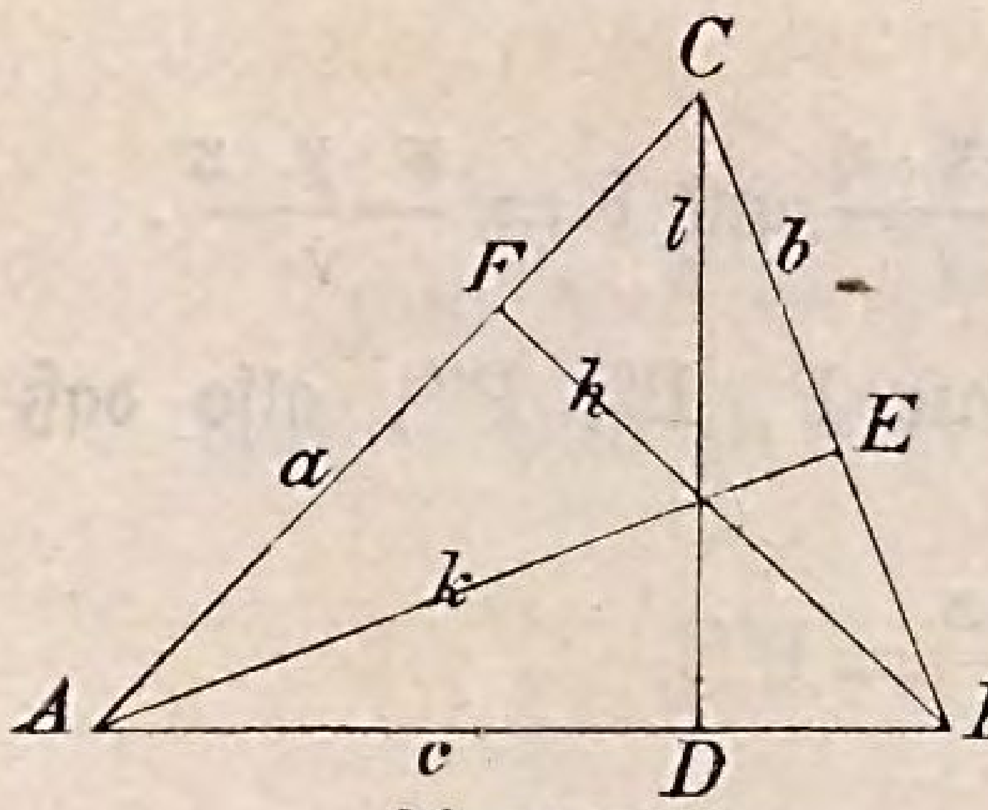


Fig. 145.

231. **Aufgabe.** Aus den drei Höhen eines Dreiecks die Seiten und den Inhalt zu finden.

Auflösung. Die gesuchten Seiten seien a, b und c und die gegebenen Höhen bezüglich h, k und l, so ist der doppelte Inhalt des Dreiecks oder $2F = ah = bk = cl$, woraus sich findet:

$$b = \frac{ah}{k} \text{ und } c = \frac{ah}{l}.$$

Ferner hat man 4 F oder

$$2ah = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Durch Substituirung der Werthe von b und c verwandelt sich diese Formel in

$$2ah = \sqrt{\frac{a(kl+hl+hk)}{kl} \cdot \frac{a(hl+hk-kl)}{kl} \cdot \frac{a(kl+hk-hl)}{kl} \cdot \frac{a(kl+hl-hk)}{kl}},$$

oder $2hk^2l^2 = a\sqrt{(kl+hl+hk)(hl+hk-kl)(kl+hk-hl)(kl+hl-hk)}$.

Folglich ist $a = \dfrac{2h \cdot k^2 \cdot l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$;

also $\dfrac{ah}{k}$ oder $b = \dfrac{2k \cdot h^2 \cdot l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$

und $\dfrac{ah}{l}$ oder $c = \dfrac{2l \cdot h^2 \cdot k^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$;

sowie $\frac{1}{2}cl$ oder $F = \dfrac{h^2k^2l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(hk+hl+kl)}}$.

Anmerkung. Um diese Formeln geometrisch zu construiren, verwandle man zuerst die Rechtecke aus den Höhen in Quadrate, z. B. daß sich ergibt:

$$hk = m^2;\ hl = n^2 \text{ und } kl = p^2.$$

Alsdann setze man

$$m^2 + n^2 + p^2 = r^2; \quad m^2 + n^2 - p^2 = s^2;$$
$$m^2 + p^2 - n^2 = u^2 \text{ und } n^2 + p^2 - m^2 = v^2,$$

wodurch man erhält:

$$a = \frac{2h \cdot k^2 l^2}{r \cdot s \cdot u \cdot v};\ b = \frac{2k \cdot h^2 \cdot l^2}{r \cdot s \cdot u \cdot v} \text{ und } c = \frac{2l \cdot h^2 \cdot k^2}{r \cdot s \cdot u \cdot v}$$

$$\text{sowie } F = \frac{h^2 \cdot k^2 \cdot l^2}{r \cdot s \cdot u \cdot v}.$$

Hierauf suche man Linien, welche den Gleichungen

$$\frac{k^2}{r} = x;\ \frac{l^2}{s} = y;\ \frac{h^2}{u} = z$$

Genüge leisten, woraus folgt:

$$a = \frac{2\,h \cdot x \cdot y}{u \cdot v};\ b = \frac{2\,k \cdot y \cdot z}{r \cdot v};\ c = \frac{2\,l \cdot x \cdot z}{s \cdot v} \text{ und } F = \frac{x \cdot y \cdot z}{v}.$$

Zuletzt suche man die vierte Proportionale P, P′, P″, also daß man hat:

$$\frac{x\,y}{v} = P;\ \frac{y\,z}{v} = P' \text{ und } \frac{x\,z}{v} = P''.$$

Dann wird

$$a = \frac{2\,h \cdot P}{u};\ b = \frac{2\,k \cdot P'}{r};\ c = \frac{2\,l \cdot P''}{s} \text{ und } F = x \cdot P',$$

sodaß die Dreiecksseiten, jede als vierte Proportionale zu drei nun bekannten Linien, schließlich durch eine einfache Construction leicht gefunden werden, während der Inhalt F nichts weiter ist als das Rechteck aus den Linien x und P′.

232. Aufgabe. Aus der Grundlinie c und der Höhe h auf derselben die beiden andern Seiten des Dreiecks zu finden, wenn noch das Rechteck aus diesen beiden unbekannten Seiten $= f$ gegeben ist.

Auflösung. Sind x und y die unbekannten Seiten, so ist

$$\text{I. } x\,y = f.$$

Ferner hat man für den doppelten Inhalt des Dreiecks zwei Ausdrücke, wodurch sich folgende Gleichung findet:

$$\text{II. } c\,h = \tfrac{1}{2}\sqrt{(c+x+y)\,(-c+x+y)\,(c+x-y)\,(c-(x-y)},$$

$$\text{oder } 4\,c^2 h^2 = [-c^2 + (x+y)^2] \cdot [c^2 - (x-y)^2].$$

Wird $x = \frac{1}{2}(s+d)$ und $y = \frac{1}{2}(s-d)$ gesetzt, so erhält man aus obigen beiden Gleichungen:

$$\text{III. } s^2 - d^2 = 4\,f$$

$$\text{und IV. } (s^2 - c^2)\,(c^2 - d^2) = 4\,c^2\,h^2.$$

Aus III. ergibt sich $d^2 = s^2 - 4\,f$, und dieser Werth, in IV. gesetzt, gibt

$$(s^2 - c^2)\,(c^2 - s^2 + 4\,f) = 4\,c^2\,h^2;$$

$$\text{oder } (s^2 - c^2)\,(4\,f - (s^2 - c^2)) = 4\,c^2\,h^2;$$

$$\text{oder } (s^2 - c^2)^2 - 4\,f\,(s^2 - c^2) = -4\,c^2\,h^2.$$

Daher ist $[(s^2 - c^2) - 2\,f]^2 = 4\,f^2 - 4\,c^2 h^2 = 4\,(f^2 - c^2 h^2)$,

$$\text{und } s^2 - c^2 - 2\,f = \pm\, 2\sqrt{f^2 - c^2\,h^2};$$

$$\text{also } s^2 = c^2 + 2\,f \pm 2\sqrt{f^2 - c^2\,h^2};$$

folglich $s = \sqrt{c^2 + 2f \pm 2\sqrt{f^2 - c^2 h^2}}$

und $\sqrt{s^2 - 4f}$ oder $d = \sqrt{c^2 - 2f \pm 2\sqrt{f^2 - c^2 h^2}}$.

Aus s und d aber ergibt sich sogleich auch x und y selbst.

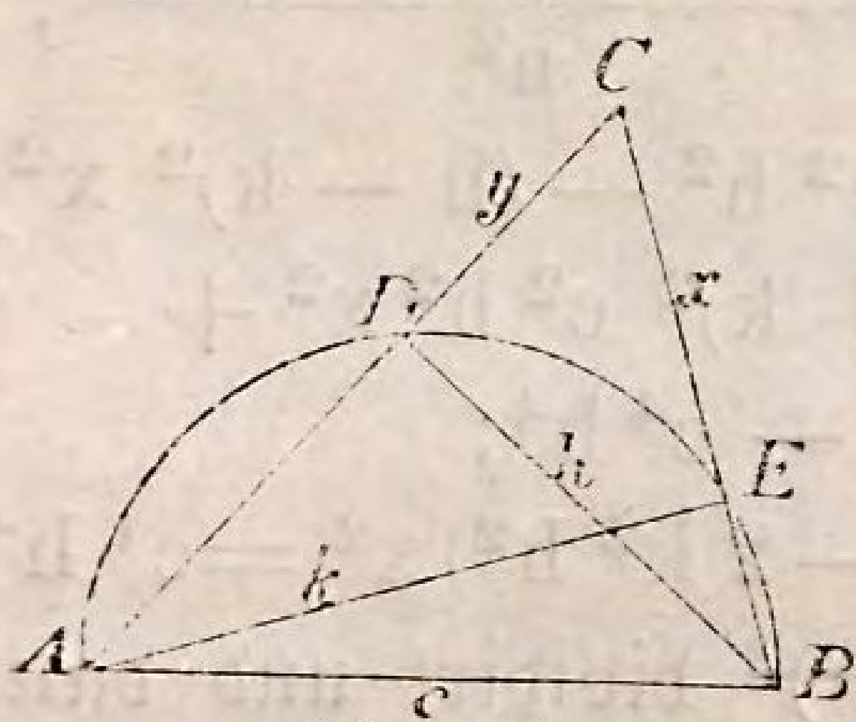


Fig. 146.

233. **Aufgabe.** In einem Dreieck ABC ist gegeben die Grundlinie $AB = c$ und die beiden aus ihren Endpunkten auf die andern Seiten gefällten Lothe $AE = k$ und $BD = h$; man soll die beiden andern Seiten $AC = y$ und $BC = x$ finden.

Geometrische Lösung.

Analysis. Es sei Dreieck ABC das gesuchte, so ist im Dreieck ABE Seite $AB = c$, $AE = k$ und Winkel $AEB = 90^\circ$ und im Dreieck ABD Seite $AB = c$, $BD = h$ und Winkel $ADB = 90^\circ$.

Folglich sind beide Dreiecke bekannt. Da Rechte, als Peripheriewinkel betrachtet, auf dem Durchmesser ruhen, so muß AB Durchmesser eines Kreises sein, in dessen Peripherie die Endpunkte der Sehnen k und h liegen.

Construction. Man beschreibe über $AB = c$ einen Halbkreis, trage von A aus k und von B aus h als Sehne ein, ziehe BE und AD, und verlängere beide bis zum Durchschnitt, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Algebraische Lösung.

Für den Inhalt F des Dreiecks finden sich diesmal drei Ausdrücke; man hat nämlich

$$F = \tfrac{1}{2}kx = \tfrac{1}{2}hy = \tfrac{1}{4}\sqrt{(c+x+y)(-c+x+y)(c-x+y)(c+x-y)},$$

sodaß sich folgende beide Gleichungen ergeben:

$$\text{I. } kx = hy$$

$$\text{und II. } 2kx = \sqrt{(x+y+c)\,(x+y-c)\,(x-y+c)\,(-x+y+c)}.$$

Diese letztere Gleichung quadrirt, gibt

$$4k^2x^2 = [(x+y)^2 - c^2]\cdot[c^2 - (x-y)^2];$$

und substituirt man in dieselbe den Werth von y aus I., nämlich

$$y = \frac{kx}{h},$$

so erhält man

$$4\,k^2\,x^2 = \left[\frac{(h\,x + k\,x)^2}{h^2} - c^2\right]\cdot\left[c^2 - \frac{(h\,x - k\,x)^2}{h^2}\right],$$

$$\text{oder } 4\,k^2\,x^2 = \frac{(h + k)^2\,x^2 - c^2\,h^2}{h^2}\cdot\frac{c^2\,h^2 - (h - k)^2\,x^2}{h^2};$$

$$\text{also } 4\,k^2\,h^4\,x^2 = [(h + k)^2\,x^2 - c^2\,h^2]\cdot[c^2\,h^2 - (h - k)^2\,x^2];$$

$$\text{oder } 4\,k^2\,k^4\,x^2 = -(h^2 - k^2)^2\,x^4 + (h + k)^2\,c^2\,h^2\,x^2 + (h - k)^2\,c^2\,h^2\,x^2 - c^4\,h^4;$$

$$\text{d. h. } (h^2 - k^2)^2\,x^4 - 2\,h^2\,(c^2\,h^2 + c^2\,k^2 - 2\,k^2\,h^2)\,x^2 = c^4\,h^4.$$

Wenn man diese Gleichung mit $(h^2 - k^2)^2$ dividirt und dann auflöst, so findet sich

$$x = h\cdot\frac{\sqrt{c^2\,h^2 + c^2\,k^2 - 2\,h^2\,k^2 \pm 2\,h\,k\sqrt{(c^2 - h^2)(c^2 - k^2)}}}{h^2 - k^2};$$

und versucht man noch die Wurzel im Zähler auszuziehen, so wird

$$x = h\left(\frac{k\sqrt{c^2 - h^2} \pm h\sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2}\right)$$

$$\text{und } y = k\left(\frac{k\sqrt{c^2 - h^2} \pm h\sqrt{c^2 - k^2}}{h^2 - k^2}\right).$$

Anmerkung. Um diese Formeln zu construiren, suche man zuerst eine Linie $w = \frac{k\sqrt{c^2 - h^2}}{h + k}$ und dann noch eine Linie $v = \frac{h\,w}{h - k}$. Alsdann zeichne man eine Linie $u = \frac{h\sqrt{c^2 - k^2}}{h + k}$ und hierauf eine Linie $n = \frac{h\,u}{h - k}$, so wird $x = v \pm n$. Auf dieselbe Weise verfahre man mit den beiden Theilen des Werthes von y.

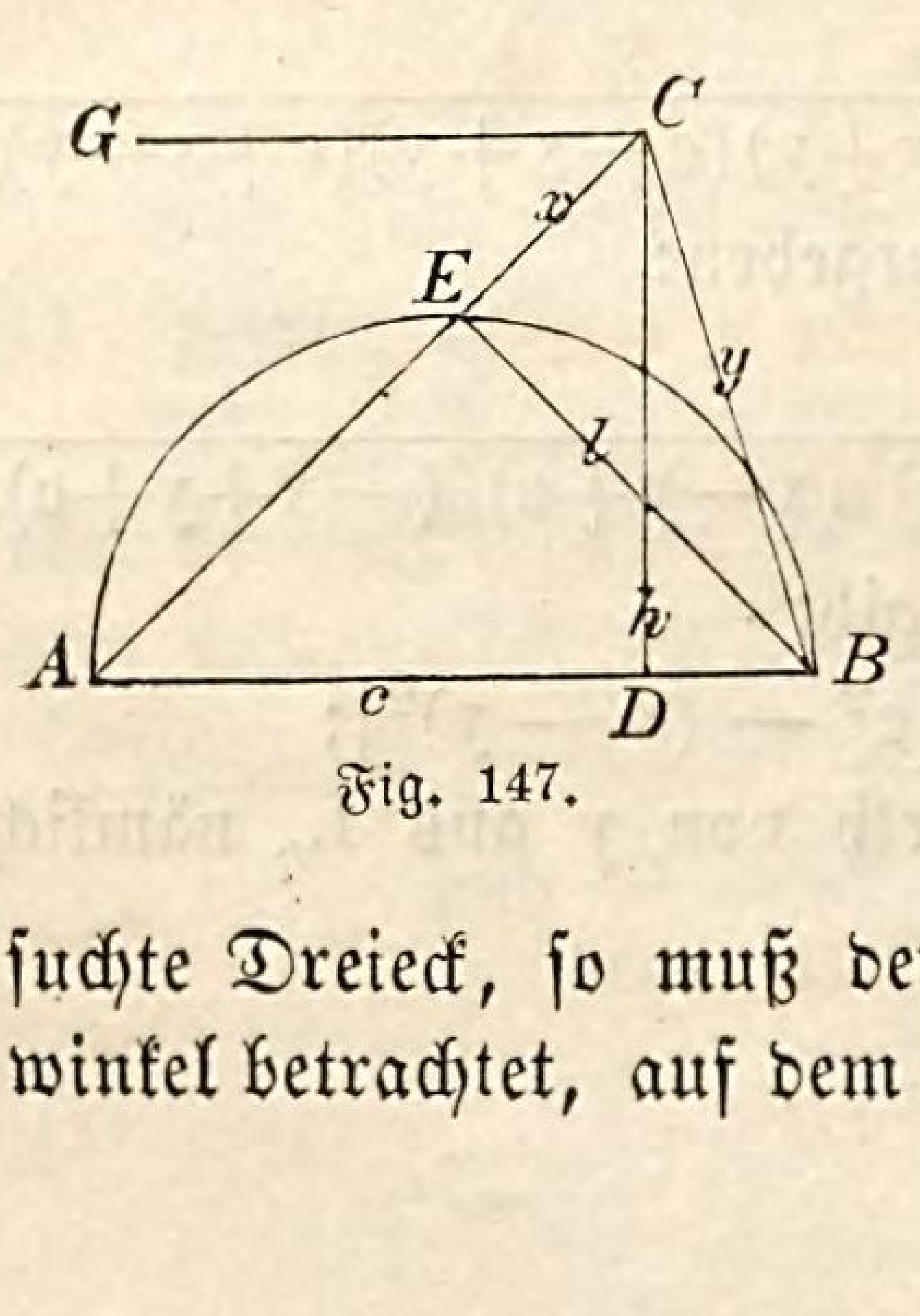


Fig. 147.

234. Aufgabe. Im Dreieck A B C ist gegeben die Grundlinie A B = c und ihre Höhe C D = h, sowie eine der beiden andern Höhen, B E = l; man soll die Seiten A C = x und B C = y finden.

Geometrische Lösung.

Analysis. Es sei A B C das gesuchte Dreieck, so muß der rechte Winkel A E B, als Peripheriewinkel betrachtet, auf dem Durchmesser ruhen. A B wäre demnach

Durchmesser eines Kreises, in dessen Peripherie Punkt E liegt. Dieser wird gefunden, wenn man von A aus B E = l als Sehne einträgt. Dadurch wird auch A E bestimmt; und verlängert man A E über E hinaus, bis sie die unter dem Abstande C D = h mit A B parallellaufende Linie G C schneidet, so findet sich Punkt C. Durch Verbindung dieses Punktes mit A ergibt sich alsdann das verlangte Dreieck.

Construction. Man beschreibe über A B = c einen Halbkreis, trage von B aus l als Sehne ein, errichte auf A B ein Loth = h und lege durch den Endpunkt derselben eine Parallele mit AB, verbinde alsdann A mit E und verlängere A E bis zum Durchschnitt mit der Parallele G C, und verbinde endlich den Durchschnittspunkt C mit B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Winkel A E B ist ein rechter; es ist daher B E senkrecht auf A C und mithin eine Höhe des Dreiecks und per constr. = l. Ferner steht C D = h senkrecht auf A B und ist also auch eine Höhe des Dreiecks. Da auch A B = a ist, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Algebraische Lösung.

Der doppelte Inhalt des Dreiecks ist = h c = x l und = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{(x+y+c)(-x+y+c)(x-y+c)(x+y-c)}$, also hat man die beiden Gleichungen:

I. $hc = xl$ und

II. $2hc = \sqrt{(x+y+c)(-x+y+c)(x-y+c)(x+y-c)}$.

Aus I. erhellt $x = \frac{hc}{l}$, und durch Erhebung ins Quadrat und weitere Umformung verwandelt sich die Gleichung II. in

$$4h^2c^2 = [(y+c)^2 - x^2]\cdot[x^2 - (y-c)^2]$$

oder, wenn statt x der Werth $\frac{hc}{l}$ substituirt wird:

$$4h^2c^2 = \left[(y+c)^2 - \frac{h^2c^2}{l^2}\right]\cdot\left[\frac{h^2c^2}{l^2} - (y-c)^2\right],$$

d. i. $4h^2c^2 = -(y^2-c^2)^2 + [(y+c)^2 + (y-c)^2]\frac{h^2c^2}{l^2} - \frac{c^4h^4}{l^4}$,

oder $4h^2c^2 = -y^4 + 2y^2c^2 - c^4 + (y^2+c^2)\frac{2h^2c^2}{l^2} - \frac{c^4h^4}{l^4}$.

Diese Gleichung geordnet, gibt

$$y^4 - \frac{(l^2+h^2)\,2\,c^2 y^2}{l^2} = \frac{-c^4 h^4 - 4\,c^2 h^2 l^4 - c^4 l^4 + 2\,c^4 h^2 l^2}{l^4},$$

oder $$\left(y^2 - \frac{(l^2+h^2)\,c^2}{l^2}\right)^2 = \frac{4\,(c^4 h^2 l^2 - c^2 h^2 l^4)}{l^4} =$$

$$\frac{4\,c^2\,(h^2 c^2 - h^2 l^2)}{l^2} = \frac{4\,c^2 h^2\,(c^2 - l^2)}{l^2};$$

also $$y^2 = \frac{(l^2+h^2)\,c^2}{l} \pm \frac{2\,c\,h}{l}\sqrt{c^2 - l^2};$$

folglich $$y = \sqrt{\frac{(l^2+h^2)\,c^2}{l^2} \pm \frac{2\,c\,h}{l}\sqrt{c^2 - l^2}}.$$

Anmerkung. Um diese Formel zu construiren, hat man wieder jeden der Theile derselben besonders zu behandeln. Dadurch erhält man ohne Schwierigkeit die Seite B C = y.

Zusatz. Da x oder die Seite A C die vierte Proportionale zur Seite A B oder c und den beiden gegebenen Höhen ist, so läßt sich dieselbe auf eine sehr einfache Weise finden. Kennt man aber von dem Dreieck A B C die Grundlinie A B, die Höhe auf derselben und die Seite A C, so hat man, um den Punkt C zu finden, nur noch mit einer Zirkelöffnung = A C von A aus die Parallele G C zu schneiden. Alles Uebrige ergibt sich dann von selbst.

235. Aufgabe. Aus zwei Seiten A B = c und B C = b und der auf A B senkrechtstehenden Höhe C D = h ein Dreieck A B C zu construiren. (Fig. 147.)

Die geometrische Construction

ist die im vorigen Zusatz erwähnte. Man zeichnet nämlich eine Linie A B = c und errichtet auf ihr ein Loth C D = h. Alsdann legt man durch den Punkt C die mit A B parallellaufende Linie C G und schneidet dieselbe mit einer Zirkelöffnung = b von B aus, so ist, wenn noch A C und B C gezogen werden, A B C das verlangte Dreieck.

Algebraische Lösung.

Die unbekannte Seite A C sei = x, so finden wir für den Inhalt des Dreiecks zwei Ausdrücke und infolge dessen eine Gleichung, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\,c\,h = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+x)\,(b+c-x)\,(b-c+x)\,(-b+c+x)},$$

welche durch weitere Umformung gibt:

$$4\,c^2 h^2 = [(b + c)^2 - x^2] \cdot [x^2 - (b - c)^2],$$

oder $4\,c^2 h^2 = -x^4 + (b^2 + c^2)\,2\,x^2 - b^4 - c^4 + 2\,b^2 c^2$;

also $x^4 - 2\,(b^2 + c^2)\,x^2 = 2\,b^2 c^2 - 4\,c^2 h^2 - b^4 - c^4$,

und, wenn auf beiden Seiten $(b^2 + c^2)^2$ addirt wird,

$$[x^2 - (b^2 + c^2)]^2 = 4\,c^2\,(b^2 - h^2).$$

Daher ist $x^2 = b^2 + c^2 \pm 2\,c\,\sqrt{b^2 - h^2}$,

folglich $x = \sqrt{b^2 + c^2 \pm 2\,c\,\sqrt{b^2 - h^2}}$.

Anmerkung. Dieser Ausdruck ist im Grunde genommen kein anderer als die bereits in den Aufgaben 225 und 226 gefundenen, und wird daher das (+) Zeichen Geltung haben, wenn der der Seite x gegenüberliegende Winkel ein stumpfer ist. Gehört jedoch dieser Winkel zu den spitzen, so darf nur das (—) Zeichen Anwendung finden. Ueberdies lehrt die Anschauung, daß in Fig. 147 der Abschnitt $B\,D = \sqrt{b^2 - h^2}$ ist.

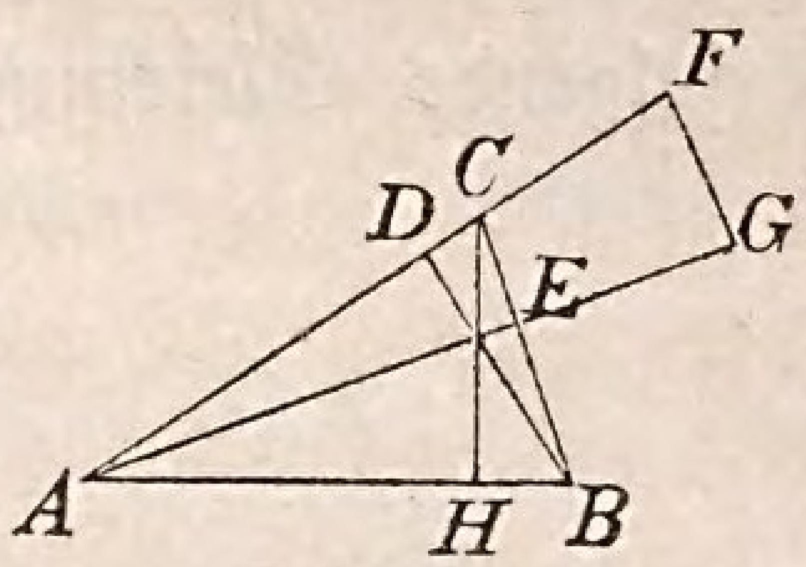


Fig. 148.

236. Aufgabe. Es ist gegeben im Dreieck A B C die Summe der beiden Seiten A C und B C = s, sowie die Höhen B D = h und A E = l, die auf diesen Seiten senkrecht stehen; man soll das Dreieck construiren.

Analysis. Angenommen, A B C sei das verlangte Dreieck, so sind die Dreiecke A E C und B C D, weil in ihnen zwei Winkel bezüglich dieselben sind, einander ähnlich. Daher ist

$$A\,C : B\,C = A\,E : B\,D,$$

also auch $A\,C : A\,C + B\,C = A\,E : A\,E + B\,D$,

d. h. $A\,C : s = l : l + h$.

Verlängert man demgemäß A C um B C, A E um C D und verbindet die Endpunkte, so ist:

$$A\,C : A\,F = A\,E : A\,G$$

oder $A\,C : s = l : l + h$;

folglich ist $C\,E \parallel F\,G$ und demnach Winkel $AEC = EGF = 1\,R$.

Da nun A F, A G und Winkel E G F bekannt sind, so ist auch Dreieck AFG und demzufolge schließlich Dreieck ABC bekannt.

Construction. Man construire aus l + h und s das rechtwinkelige Dreieck A F G, sodaß s Hypotenuse wird, errichte

im Punkte E, wo die beiden gegebenen Höhen A E und E G (= B D) zusammenstoßen, das Loth C E, mache B C = C F und ziehe A B, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist B C = C F, also A C + B C = s. Ferner ist A E = l und senkrecht auf B C. Zieht man nun B D senkrecht auf A C, so ist

$$AC : BC = AE : BD,$$

oder $AC : AC + BC = AE : AE + BD$;

d. h. $AC : s = l : l + BD$.

Da auch $AC : s = l : l + h$ gefunden worden, (weil C E || F G ist), so erhellt

$$BD = h.$$

Zusatz. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Seite A C mit x und B C mit y, so erhalten wir zwei Ausdrücke für den doppelten Inhalt des Dreiecks, woraus sich folgende Gleichung ergibt:

$$\text{I.}\quad l\,y = x\,h,$$

während man noch hat:

$$\text{II.}\quad x + y = s.$$

Aus I. erhält man $y = \frac{h\,x}{l}$, und dieser Werth, in II. gesetzt, gibt

$$\frac{(l + h)}{l}\,x = s;$$

folglich findet sich $x = \frac{l\,s}{l + h}$, und daher $y = \frac{h\,s}{l + h}$. Es ist also A C die vierte Proportionale zu den Linien l, s und l + h; sowie B C die vierte Proportionale zu h, s und der Summe der beiden gegebenen Höhen. Die Aufgabe lautet demnach jetzt: aus zwei gegebenen Seiten und den ebenfalls gegebenen Höhen auf denselben ein Dreieck zu construiren. Um diese Construction auszuführen, zeichne man eine Linie = A C, beschreibe über ihr einen Halbkreis und trage von A aus A E = l als Sehne ein. Dadurch wird Punkt E gefunden, durch den die Linie B C von C aus gelegt werden muß. Verbindet man noch B mit A, so entsteht das gesuchte Dreieck A B C, also daß auch das Loth B D auf der Seite A C die gegebene Höhe h ist.

237. Aufgabe. Es ist gegeben im Dreieck A B C die Seite A B = c, die Höhe C H = h und die Summe der beiden andern Seiten A C + B C = s; man soll jede der beiden andern Seiten finden.

Auflösung.

Bezeichnen wir die Differenz der beiden unbekannten Seiten mit d, so ist die eine Seite $x = \frac{1}{2}(s + d)$, und die andere $y = \frac{1}{2}(s - d)$, und der Inhalt des Dreiecks $A B C = \frac{1}{2} ch$ oder $= \frac{1}{4}\sqrt{(s + c)(s - c)(c + d)(c - d)}$.

Daher ist

$$2\, ch = \sqrt{(s^2 - c^2)(c^2 - d^2)},$$

$$\text{oder}\quad \frac{4\, c^2\, h^2}{s^2 - c^2} = c^2 - d^2;$$

$$\text{also}\quad d^2 = c^2\left(\frac{s^2 - c^2\, 4\, h^2}{s^2 - c^2}\right);$$

$$\text{folglich}\quad d = \frac{c \cdot \sqrt{s^2 - c^2 - 4\, h^2}}{\sqrt{s^2 - c^2}};$$

dann ist die eine Seite $= \frac{1}{2}(s + d)$ und die andere $= \frac{1}{2}(s - d)$.

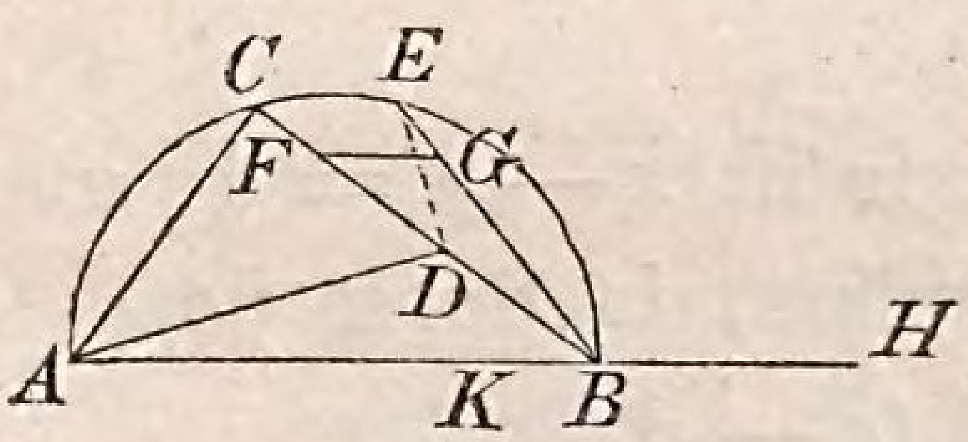


Fig. 149.

Anmerkung. Um diese Formel geometrisch zu construiren, zeichnet man zuerst eine Linie A B = s und beschreibt über A B einen Halbkreis; trägt, von A aus, A C = c als Sehne ein und verbindet C mit B. Alsdann schneidet man in der B C, von C aus, C D = 2 h ab. Infolge dessen ist $A D^2 = c^2 + 4\, h^2$ und $B C = \sqrt{s^2 - c^2}$. Beschreibt man nun aus A mit A D einen Bogen, welcher den Halbkreis in E trifft, so ist $B E = \sqrt{s^2 - c^2 - 4\, h^2}$. Zuletzt mache man B F = c und ziehe F G || C E, dann ist B G = d. Wird daher A B um das Stück B H = B G verlängert und die Linie A H in K halbirt, so erhält man $A K = \frac{1}{2}(s + d)$ und $B K = \frac{1}{2}(s - d)$, d. h. die gesuchten Seiten des Dreiecks.

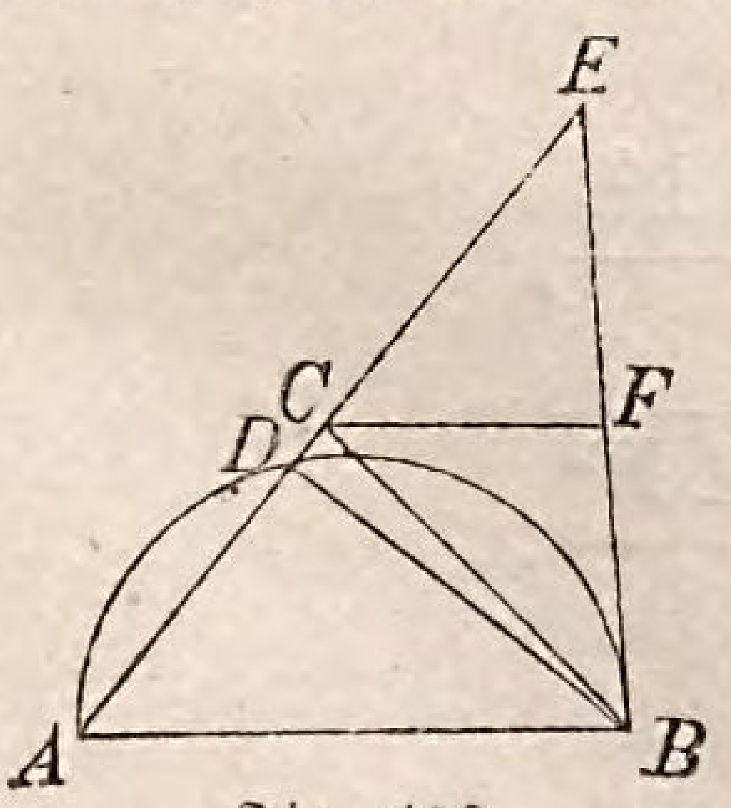


Fig. 150.

238. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn gegeben ist die Grundlinie A B = c, die Summe der beden andern Seiten A C + B C = s und die auf der Seite A C senkrechtstehende Höhe B D = h.

Auflösung.

Man beschreibt über A B $=$ c einen Halbkreis, trägt von B aus B D $=$ h als Sehne ein, verbindet D mit A und verlängert A D, bis A E $=$ s wird. Alsdann zieht man E B und errichtet in der Mitte derselben das Loth F C, wodurch sich C, der dritte Punkt des Dreiecks, findet. Zieht man also noch C B, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Dreiecke C E F und B C F sind congruent, und daher C E $=$ B C. Da A C $+$ C E $=$ s ist, so ist nun auch A C $+$ B C $=$ s, während die Grundlinie A B und die Höhe B D, der Construction gemäß, den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Folglich ist A B C das verlangte Dreieck.

239. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Grundlinie A B $=$ c, die Höhe auf derselben C D $=$ h und die Differenz der beiden andern Seiten A C $-$ B C $=$ d gegeben ist. (Fig. 147.)

Auflösung.

Setzen wir A C $=$ x und B C $=$ y, so ist $x - y = d$, und wird noch die Summe $x + y = s$ eingeführt, so findet sich

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d) \text{ und } y = \tfrac{1}{2}(s - d)$$

sowie der Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2}\,ch$

$$\text{oder } = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s + c)\,(s - c)\,(c + d)\,(- d)},$$

wodurch man wie in Aufgabe 237 die Gleichung

$$4\,c^2\,h^2 = (s^2 - c^2)\,(c^2 - d^2)$$

erhält, und, wenn auf beiden Seiten durch $c^2 - d^2$ dividirt wird,

$$s^2 - c^2 = \frac{4\,c^2\,h^2}{c^2 - d^2}.$$

$$\text{Es ist also } s^2 = c^2\,\frac{(c^2 - d^2 + 4\,h^2)}{c^2 - d^2},$$

$$\text{folglich } s = c \cdot \frac{\sqrt{c^2 - d^2 + 4\,h^2}}{\sqrt{c^2 - d^2}};$$

dann ist A C $= \frac{1}{2}(s + d)$ und B C $= \frac{1}{2}(s - d)$.

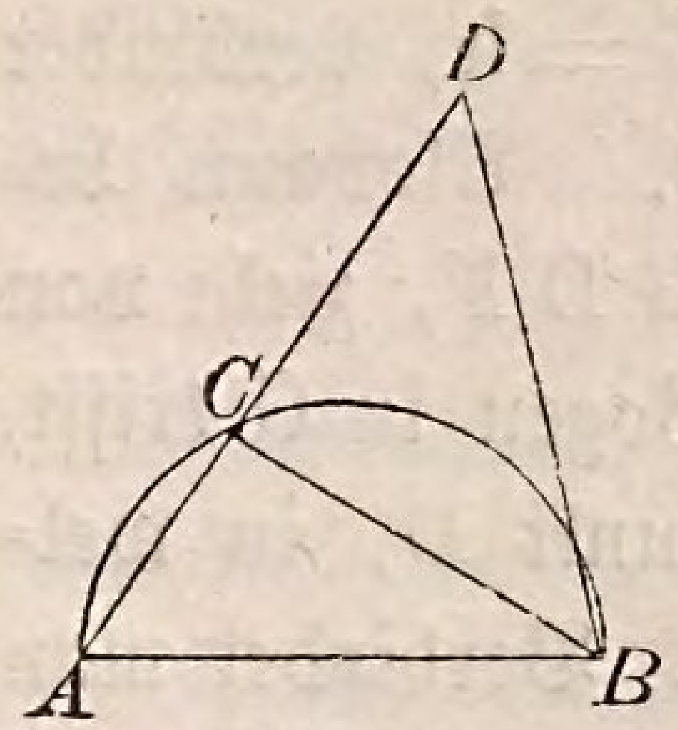


Fig. 151.

Anmerkung. Soll die Construction ausgeführt werden, so macht man zuerst A B = c, und beschreibt über A B einen Halbkreis; trägt von A aus A C = d als Sehne ein, und zieht B C, so ist $BC^2 = c^2 - d^2$, also auch $BC = \sqrt{c^2 - d^2}$. Wird nun A C über C hinaus verlängert, bis C D = 2 h wird, so ist $BD = \sqrt{c^2 - d^2 + 4h^2}$ und die Linie s demnach, als vierte Proportionale zu A B, B C und B D, leicht gefunden.

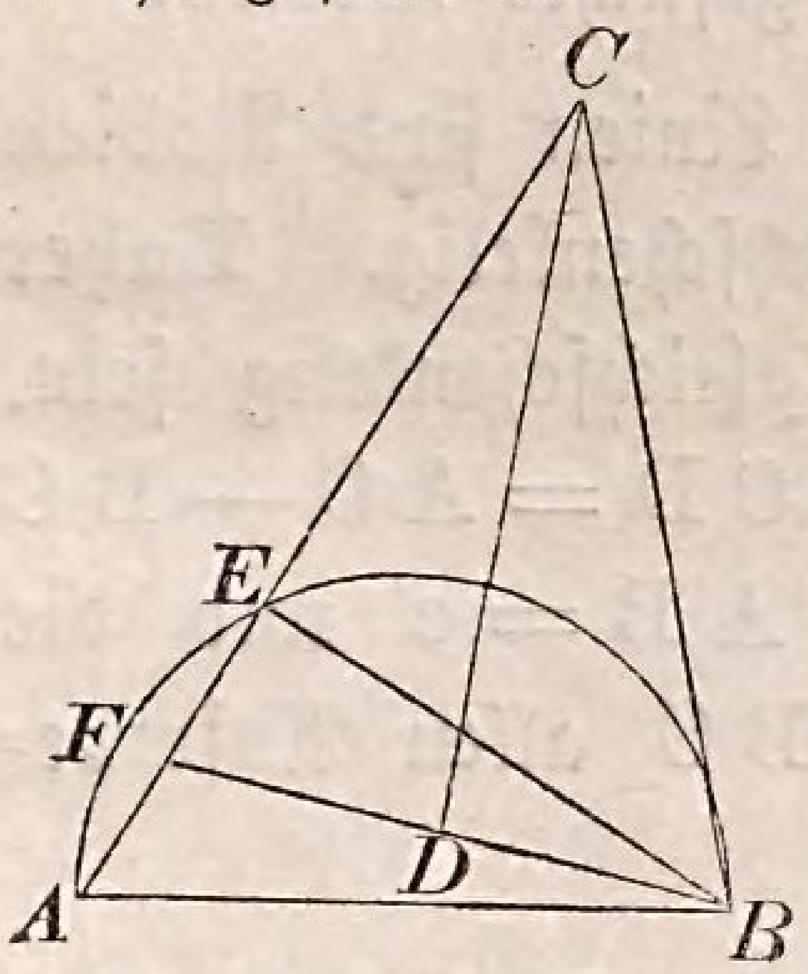


Fig. 152.

240. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Grundlinie A B = c, die Differenz der beiden andern Seiten A C — B C = d und die Höhe B E = h, die auf der größern der beiden unbekannten Seiten steht, gegeben ist.

Auflösung.

Man zeichnet eine Linie A B = c, beschreibt über ihr einen Halbkreis und trägt von B aus B E = h als Sehne ein. Alsdann verbindet man die Punkte A und E, schneidet von der Linie A E ein Stück A F = d ab und zieht F B. Hierauf errichtet man in der Mitte von F B ein Loth C D, welches die verlängerte A E in C schneidet. Wird nun C mit B verbunden, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Beweis. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke C D F und B C D erhellt BC = CF; daher ist AC — CF = AC — BC = A F = d. Da nun auch A B = c und B E = h (per constr.), so genügt Dreieck A B C allen Bedingungen der gestellten Aufgabe.

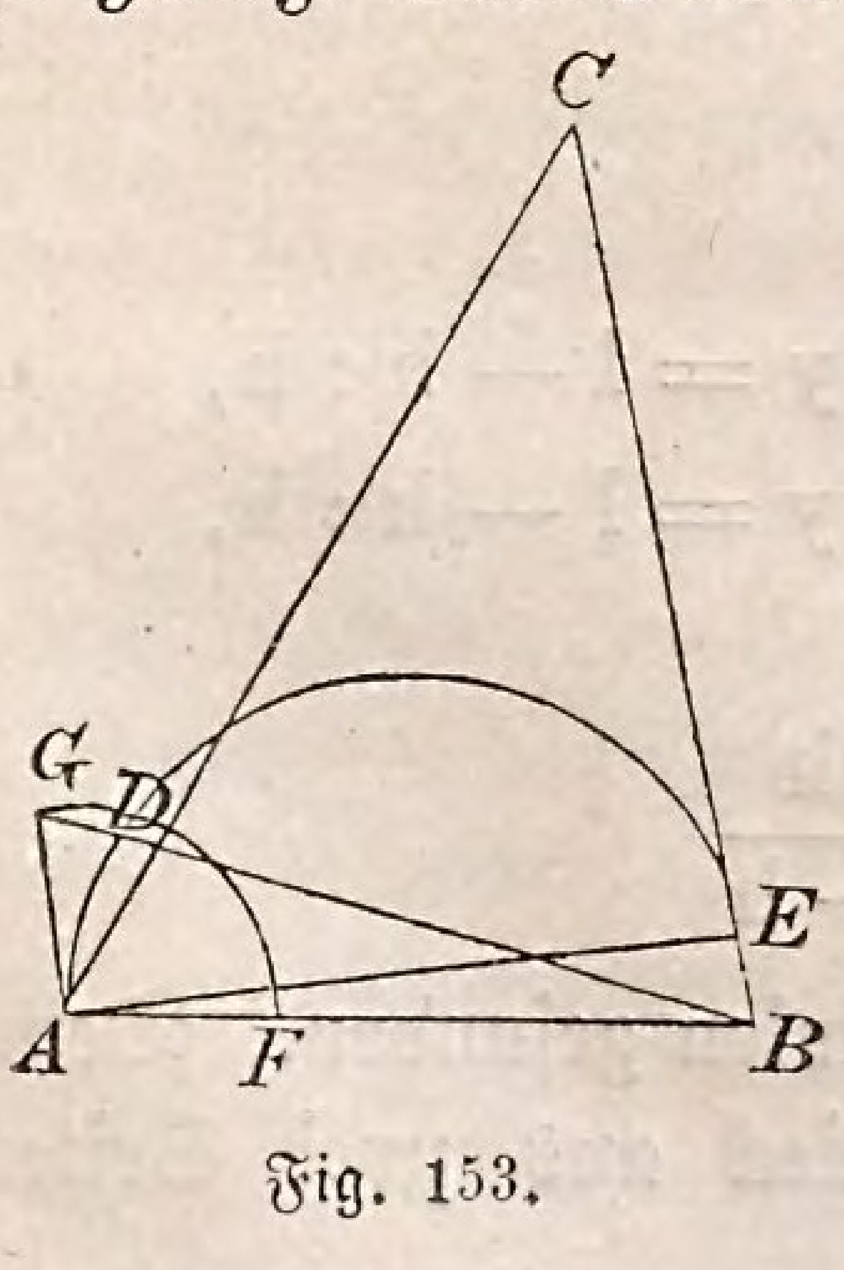


Fig. 153.

241. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Grundlinie A B = c, die Differenz der beiden andern Seiten A C — B C = d und die Höhe A E = h, welche auf die kleinere B B gefällt worden, gegeben ist.

Auflösung.

Man beschreibt über A B = c einen

Halbkreis und trägt in denselben von A aus A E = h, verbindet B mit E und verlängert B E über E hinaus. Alsdann beschreibt man mit A D = d um A den Bogen G D F, zieht von A aus mit B C eine Parallele A G, welche den Bogen in G trifft, und verbindet G mit B. Dadurch findet sich Punkt D, in welchem der Bogen durch die B G geschnitten wird. Verbindet man nun A mit D und verlängert A D, bis sie mit der verlängerten B E in C zusammentrifft, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Beweis. A G ist = A D, denn beide Linien sind Radien desselben Kreises, also ist Dreieck A G D gleichschenkelig. Daher muß auch das ihm ähnliche Dreieck B C D gleichschenkelig sein. Es ist also B C = C D und deshalb A C — C D = A C — B C = A D = d. Da nun noch per constr. A B = c und die Höhe A E = h ist, so entspricht Dreieck A B C allen Anforderungen der Aufgabe.

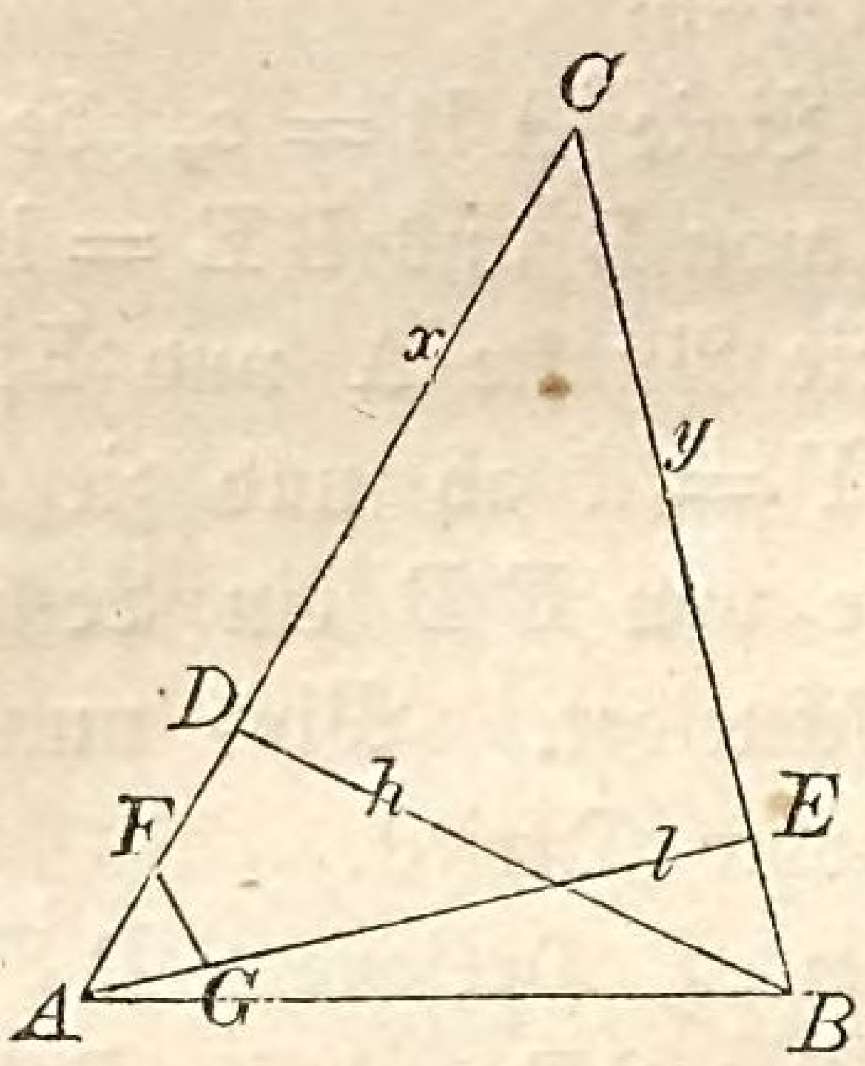


Fig. 154.

242. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Differenz zweier Seiten A C — B C = d und die beiden zu diesen Seiten gehörigen Höhen B D = h und A E = l gegeben sind.

Erste Auflösung.

Bezeichnen wir der Kürze wegen A C mit x und B C mit y, so ist x — y = d, aber auch

$$A C : B C = A E : BD$$

d. i. $x : y = l : h$,

woraus folgt:

$$x - y : x = l - h : l \text{ und } x - y : y = l - h : h,$$

$$\text{d. h. } d : x = l - h : l \qquad d : y = l - h : h,$$

und somit wäre

$$x = \frac{d\,l}{l - h} \text{ und } y = \frac{d\,h}{l - h}$$

als vierte Proportionale zu drei bekannten Linien gefunden. Demnach liegt jetzt die Aufgabe vor: ein Dreieck aus zwei Seiten

und den zugehörigen Höhen zu construiren, und diese Aufgabe ist bereits in Nr. 236 gelöst worden.

Zweite Auflösung.

Analysis. Angenommen, A B C sei das gesuchte Dreieck und B C = C F, also A F = d; und E G = h, folglich A G = l — h: so ist den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$A F : A C = A G : A E$$

$$\text{d. i. } d : A C = l - h : l,$$

und demgemäß F G parallel mit C B, sowie Winkel A G F = A E C = ein Rechter, daher ist das rechtwinkelige Dreieck A F G nun bekannt, und infolge dessen auch die Richtung der Seite A C und der Höhe A E; und da die Länge von A E = l gegeben ist, so findet sich Punkt E, durch welchen die Richtung B C rechtwinkelig an A E gelegt werden muß. Die Richtung B C aber trifft mit der Verlängerung von A F in C zusammen, und dies ist der zweite Punkt des gesuchten Dreiecks A B C. Der dritte Punkt desselben, nämlich B, ergibt sich nun, wenn auf der Richtung B C von C aus B C = C F abgeschnitten wird.

Construction. 1) Man zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck A F G, dessen Hypotenuse = d und dessen eine Kathete A G = l — h ist. 2) Man verlängere A G über G hinaus, bis A E = l wird, und lege durch E eine Linie B C parallel mit F G. 3) Nun verlängere man A F bis zum Zusammentreffen mit der Richtung B C, dadurch ergibt sich Punkt C. 4) Alsdann schneide man von C aus B C = F C ab und verbinde B mit A, dann ist A B C das gesuchte Dreieck.

243. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn eine Seite A B, ein anliegender Winkel A und die auf der gegebenen Seite senkrechte Höhe C D bekannt sind. (Fig. 147.)

Construction. Man zeichnet zunächst die Linie A B, trägt auf dieselbe in A den gegebenen Winkel und verlängert den Schenkel A C bis zum Zusammentreffen mit der G C, die unter dem Abstand C D mit A B parallel läuft. Wird der gefundene Durchschnittspunkt C mit B verbunden, so ist A B C das verlangte Dreieck.

244. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn eine Seite A B, ein daran liegender Winkel A und die Höhe A E, welche auf der dem Winkel A gegenüberliegenden Seite A C senkrecht steht, gegeben sind. (Fig. 146.)

Construction. Man trägt an A B in A den gegebenen Winkel, verlängert den Schenkel A C, beschreibt über A B einen Halbkreis und trägt von A aus A E als Sehne ein, verbindet B mit E und verlängert B E bis zum Zusammentreffen mit A C: so ist A B C das gesuchte Dreieck.

245. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn eine Seite A B, der gegenüberliegende Winkel C und die Höhe B D auf A C gegeben sind. (Fig. 146.)

Construction. Man beschreibt über A B einen Halbkreis und trägt B D als Sehne ein. Alsdann legt man eine beliebige Linie B C so an B D in B an, daß der Winkel C B D $= 90° - C$ wird, und verlängert den Schenkel B C, bis er mit der durch A und D gezogenen Linie in C zusammentrifft. Infolge dessen wird, weil die Winkel bei D Rechte und D B C $= 90° - C$, der Winkel D C B gleich dem gegebenen Winkel C, der der gegebenen Seite A B gegenüberliegt; also ist A B C das gesuchte Dreieck.

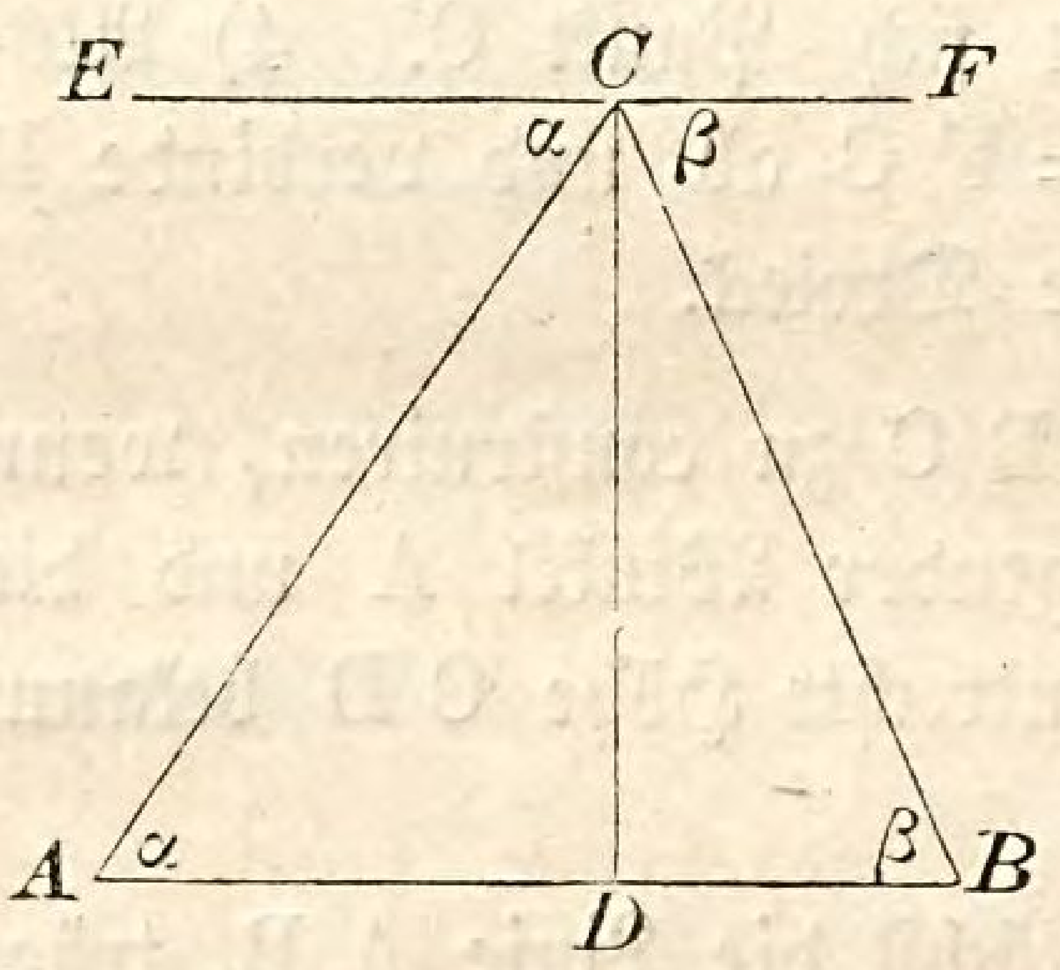


Fig. 155.

246. Aufgabe. Aus zwei Winkeln α und β und der Höhe C D, welche durch die Spitze des dritten Winkels geht, ein Dreieck A B C zu construiren.

Construction. Man errichtet auf einer beliebigen Linie A B das Loth C D, welches der gegebenen Höhe gleich ist, und legt durch C eine Linie E F parallel mit A B. Alsdann trägt man in C den Winkel α an E C und den Winkel β an C F, und verlängert die Schenkel C A und C B bis zum Durchschnitt mit der Richtung A B: so ist A B C das gesuchte Dreieck.

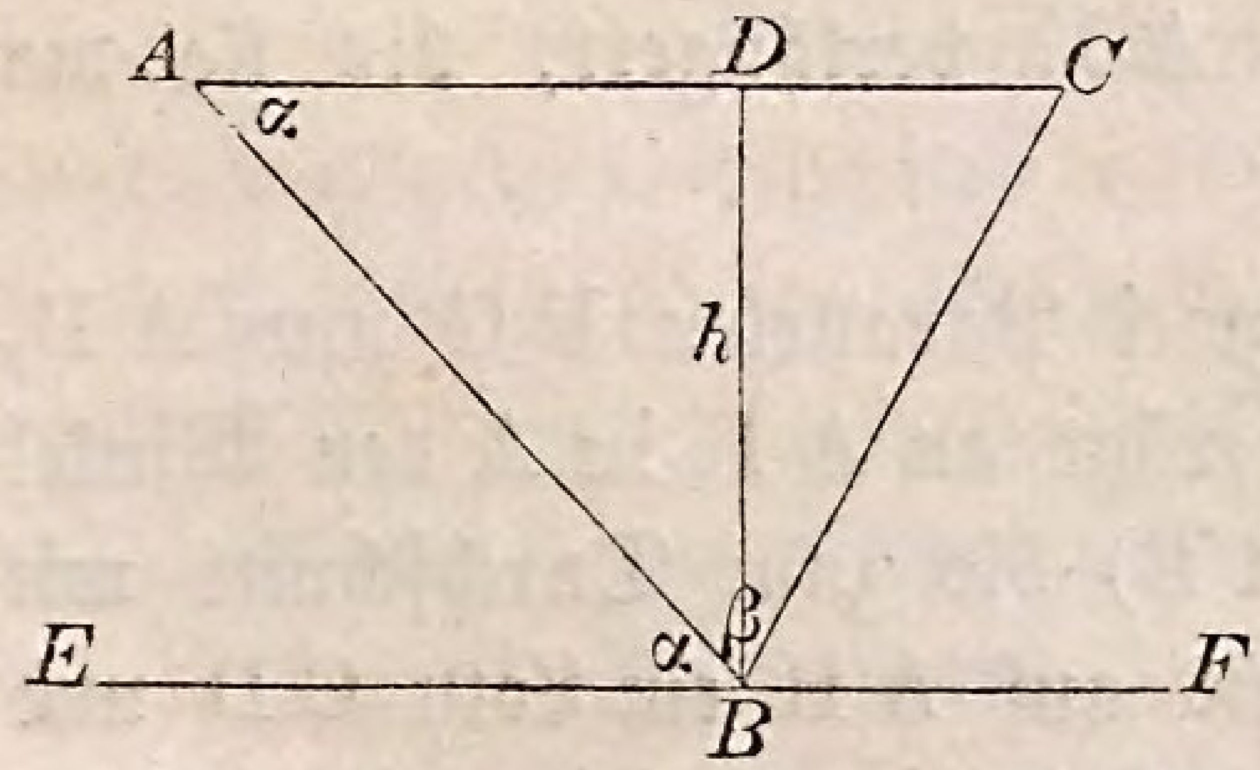


Fig. 156.

247. Aufgabe. Aus zwei Winkeln α und β und der Höhe B D = h, welche durch die Spitze des Winkels β geht, ein Dreieck A B C zu construiren.

Construction. Man zieht zwei Parallelen A C und E F, deren senkrechter Abstand = h ist; errichtet in einem beliebigen Punkte der E F das Loth B D; macht E B zu einem Schenkel des Winkels α und B F zu einem Schenkel des Winkels $C = 180° - (\alpha + \beta)$ und verlängert die Schenkel B A und B C, bis sie die Richtung A C schneiden. Dann ist B D = h, Winkel $C A B = \alpha$ und $A B C = \beta$, also Dreieck A B C das verlangte.

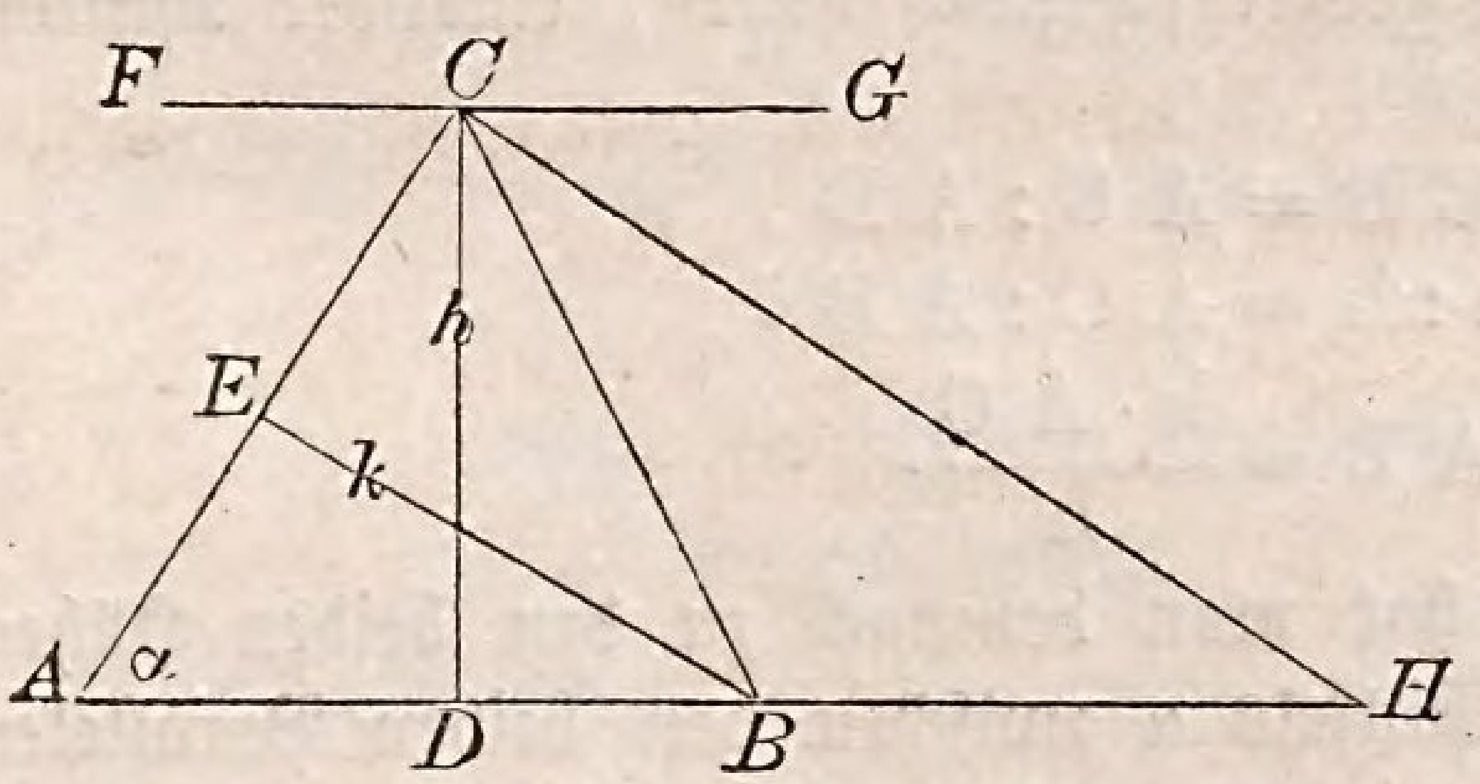


Fig. 157.

248. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn der Winkel $A = \alpha$ und die Höhen C D = h und B E = k, welche auf den Schenkeln dieses Winkels senkrecht stehen, gegeben sind.

Analysis. Angenommen, A B C sei das gesuchte Dreieck, also $A = \alpha$ und C D = h und B E = k, so ist, wenn C H parallel mit E B auf die verlängerte A B gezogen wird, das Dreieck A E B dem Dreieck A C H ähnlich, denn beide sind rechtwinkelig und haben den Winkel A gemein; und daher hat man

$$CH : k = AC : AE.$$

Da nicht nur k, sondern vermittelst des gegebenen Winkels α auch A, sowie auch die mit k parallele Linie C H bekannt sind, so ergibt sich A E als vierte Proportionale zu diesen drei Linien. Errichtet man nun in E auf der A C ein Loth E B, welches den Schenkel A B des Winkels α in B schneidet, so findet sich der Punkt B, der zweite Punkt des Dreiecks; der dritte aber, C, ergibt sich, wenn man unter dem Abstand h eine Linie

F G parallel mit A B zieht und A E verlängert, bis sie die F G in C schneidet.

Construction. Man zieht zwei Parallelen F G und A H, deren senkrechter Abstand = h ist; trägt an A H in A den Winkel α und verlängert den Schenkel (A E) bis zum Durchschnitt mit F G. Hierauf fällt man von C aus auf A H ein Loth C D und sucht die vierte Proportionale zu A C und den beiden Parallelen k und C H, sodaß $AE = \frac{k \cdot AC}{CH}$ wird. Von A aus wird nun A E auf der A C abgeschnitten und in E ein Loth E B errichtet, welches die Richtung A H in B schneidet. Verbindet man endlich B mit C, so ergibt sich das gesuchte Dreieck A B C.

Anmerkung. Derselbe Zweck kann auch ohne die Hülfslinie C H erreicht werden. Es sind nämlich die beiden rechtwinkeligen Dreiecke ABE und C A D, die den Winkel A gemeinschaftlich haben, einander ähnlich, und deshalb ist

$$CD : EB = AC : AB$$
$$\text{d. h. } h : k = AC : AB$$
$$\text{folglich } AB = \frac{k \cdot AC}{h}.$$

Um die Seite A B zu finden, hat man demnach zu den beiden Höhen und der durch Zeichnung des Winkels α zwischen den beiden Parallelen F G und A H gefundenen A C die vierte Proportionale zu suchen. Verbindet man dann Punkt B mit C und fällt man von B aus auf A C ein Loth B E, so ist dieses = k, und daher A B C das gesuchte Dreieck.

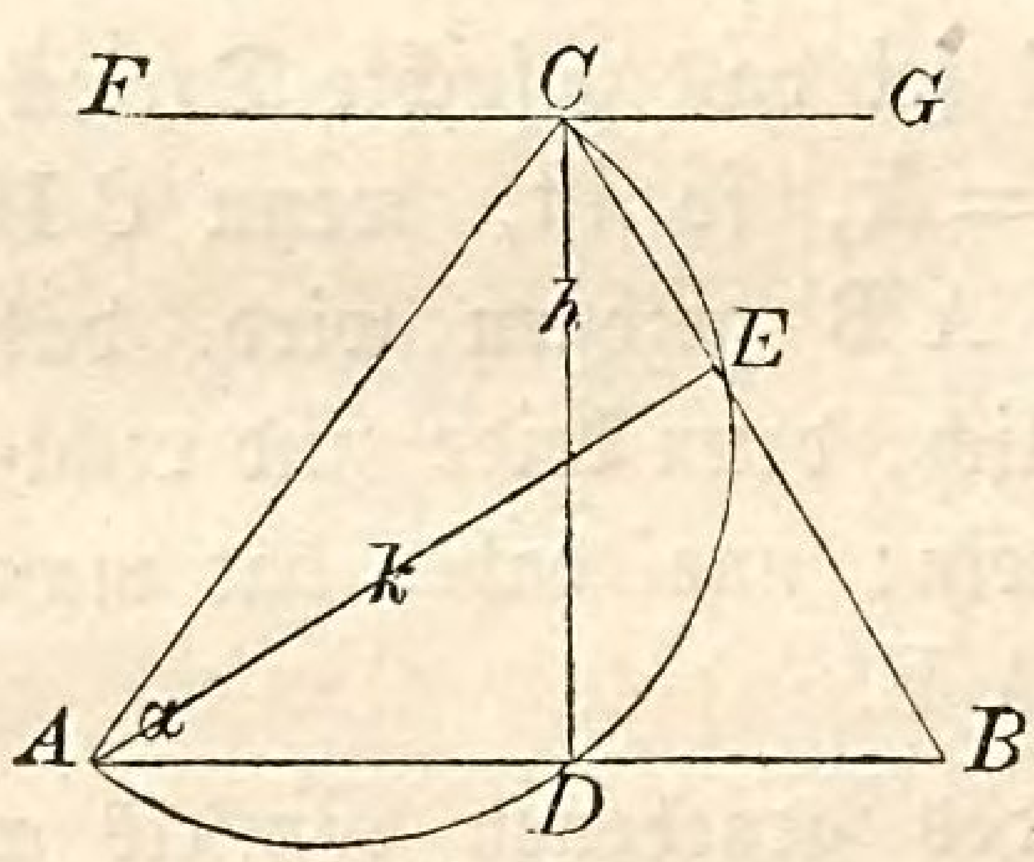


Fig. 158.

249. Aufgabe. Aus einem Winkel A = α und zwei Höhen C D = h und A E = k, von denen letztere durch die Spitze des gegebenen Winkels geht, ein Dreieck ABC zu construiren.

Analysis. Angenommen, A B C sei das gesuchte Dreieck, so ist, wenn über dem Schenkel A C des Winkels α ein Halbkreis beschrieben und von A aus A E = k als Sehne eingetragen wird, die Länge und Richtung von C E bekannt, also auch die Richtung B C, von welcher der andere Schenkel des Winkels α in B geschnitten wird. Der Punkt C, der dritte des gesuchten Dreiecks

A B C, ist der Durchschnittspunkt der A C mit F G, der unter dem senkrechten Abstande C D = h mit A B parallel läuft.

Construction. Man zeichnet die beiden Parallelen A B und F G, deren senkrechter Abstand = h ist, trägt in A an A B den Winkel α, und verlängert den einen Schenkel bis C, wo er die Linie F G schneidet. Dadurch findet sich die Dreiecksseite A C. Hierauf beschreibt man über A C einen Halbkreis und trägt von A aus A E = k als Sehne ein. Wird C mit E verbunden, so gibt C E die Richtung der zweiten Dreiecksseite an. Nun verlängert man C E, bis sie die Richtung A B schneidet. Dann ist A B C das gesuchte Dreieck.

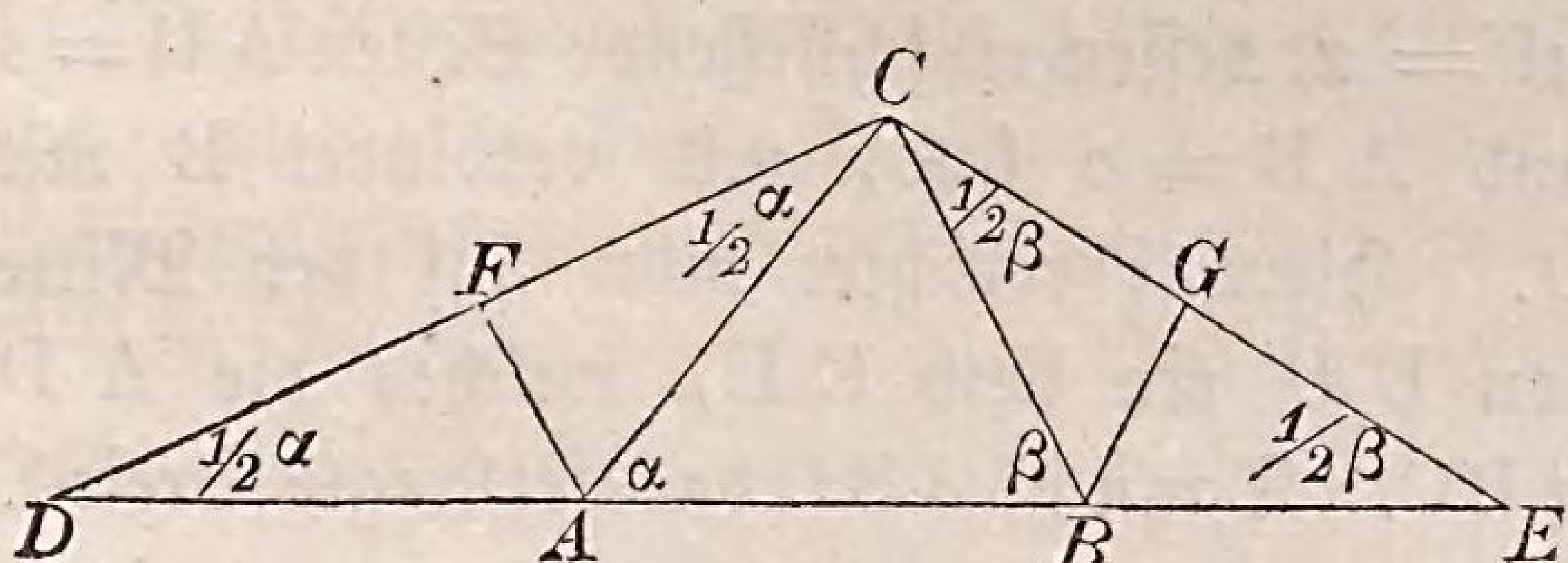


Fig. 159.

250. Aufgabe. Aus dem Umfange u und zwei Winkeln α und β ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die beiden gegebenen Winkel an der Grundlinie A B liegen sollen.

Analysis. Angenommen, A B C wäre das gesuchte Dreieck, so ist, wenn man A B auf beiden Seiten verlängert, bis A D = A C und B E = B C wird, D E = u und Winkel D = $\frac{1}{2}$ A = $\frac{1}{2}\alpha$, sowie E = $\frac{1}{2}$ B = $\frac{1}{2}\beta$. Also ist Dreieck C D E bekannt, und errichtet man auf der Mitte von C D und von C E die Lothe A F und B G bis zum Zusammentreffen mit D E, so ergeben sich die Punkte A und B des verlangten Dreiecks A B C.

Construction. Man zeichne eine Linie D E = u, trage an dieselbe in D einen Winkel = $\frac{1}{2}\alpha$ und in E einen Winkel = $\frac{1}{2}\beta$ und verlängere die Schenkel dieser Winkel, bis sie sich in C schneiden. Alsdann verbinde man C mit D und E, errichte auf der Mitte von C D ein Loth A F und auf der Mitte von C E ein Loth B G. Beide Lothe schneiden die D E, und zwar in A und B. Werden diese Punkte mit C verbunden, so ergibt sich das gesuchte Dreieck A B C.

Beweis. Der Umfang des Dreiecks ist per constr. = D E = u. Winkel D = Winkel D C A = $\frac{1}{2}\alpha$, denn beide sind

Winkel an der Grundlinie C D im gleichschenkeligen Dreieck A C D. Der Winkel A im Dreieck A B C ist daher als Außenwinkel $= D + DCA = \alpha$. Ferner ist in dem gleichschenkeligen Dreieck B C E Winkel $E = ECB = \frac{1}{2}\beta$, also Winkel A B C als Außenwinkel $= E + ECB = \beta$.

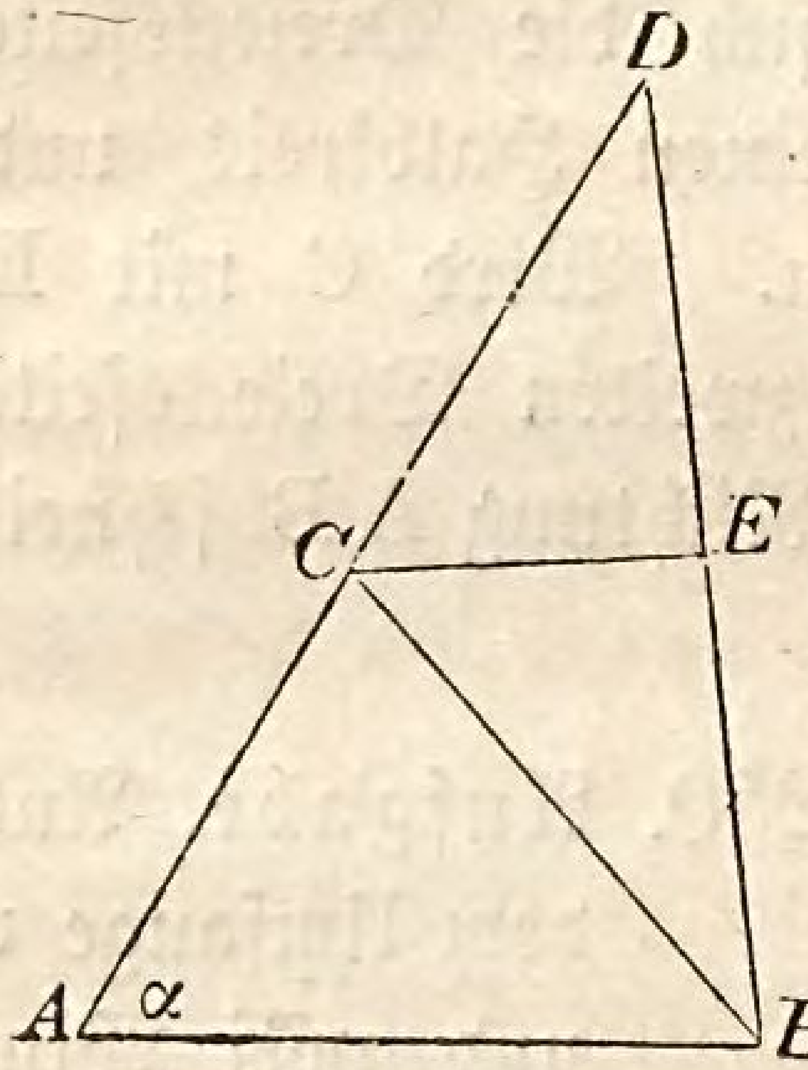


Fig. 160.

251. Aufgabe. Aus der Summe zweier Seiten, $AC + BC = s$, der dritten Seite, $AB = c$, und einem daranliegenden Winkel, $A = \alpha$, ein Dreieck A B C zu construiren.

Construction. Man zeichnet einen Winkel $= \alpha$, dessen einschließende Seiten $AD = s$ und $AB = c$ sind, und verbindet B mit D. Hierauf errichtet man auf der Mitte von B D ein Loth C E, welches die A D in C schneidet, und zieht B C. Dann ist A B C das verlangte Dreieck.

Beweis. Aus der Congruenz der Dreiecke B C E und C D E folgt $CD = CB$; daher ist $AB + BC = AB + BD = AD = s$, während noch per constr. $AB = c$ und Winkel $A - \alpha$ ist. Folglich entspricht Dreieck A B C allen Forderungen der Aufgabe.

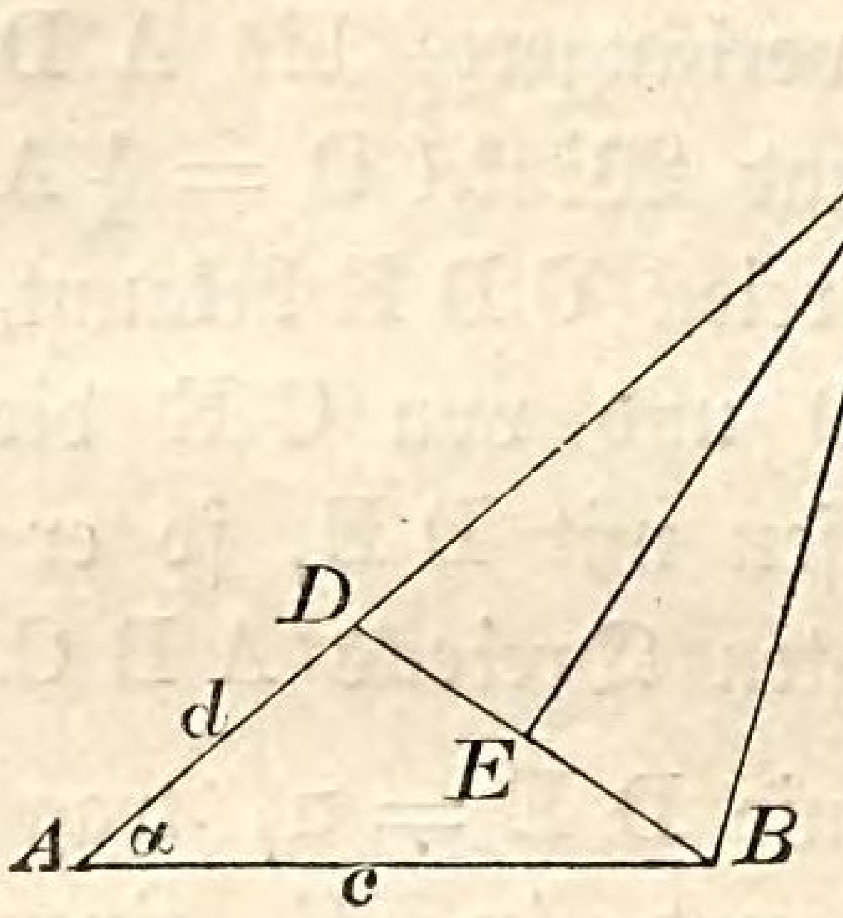


Fig. 161.

252. Aufgabe. Aus der Differenz zweier Seiten, $AC - BC = d$, der dritten Seite, $AB = c$, und einem daran liegenden Winkel, $A = \alpha$, ein Dreieck A B C zu construiren.

Analysis. Es sei A B C das gesuchte Dreieck, so hat man $AC - BC = AC - CD = AD = d$. Wird nun B D gezogen, so kennt man, weil $AB = c$, $AD = d$ und der eingeschlossene Winkel $= \alpha$ ist, alle Stücke des Dreiecks A B D, und kann daher dasselbe sogleich construiren. Mit Hülfe dieses Dreiecks findet sich, wenn man A D über D hinaus verlängert, bis das auf der Mitte von B D errichtete Loth C E in C geschnitten wird, auch das gleichschenkelige Dreieck B C D, und dadurch das gesuchte Dreieck A B C selbst.

Construction. Man construire Dreieck A B D so, daß die Linien c und d Schenkel des gegebenen Winkels α werden, nämlich $A B = c$ und $A D = d$; errichte auf der Mitte von B D ein Loth C E, bis es mit der verlängerten A D in C zusammentrifft, und verbinde C mit B. Dann ist A B C das verlangte Dreieck.

253. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Summe zweier Seiten, $A C + B C = s$, die Summe der gegenüberliegenden Winkel $A + B = \sigma$, und die dritte Seite $A B = c$ gegeben ist. (Fig. 160.)

Auflösung. Der dritte Winkel des Dreiecks, nämlich C, welcher der gegebenen Seite A B gegenüberliegt, ist $= 180° - \sigma$ und daher als Nebenwinkel von σ leicht zu finden. Außerdem ist C als Außenwinkel des gleichschenkeligen Dreiecks $B C D = 2 D$, Winkel D also $= \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}(180° - \sigma) = 90° - \frac{1}{2}\sigma$. Unter diesem Winkel setze man eine beliebige Linie B D mit A D oder s zusammen, schneide mit einer Zirkelöffnung $= c$, von A aus, die Richtung B D in B und ziehe A B. Hierauf trage man in B von B D einen Winkel $C B D = \frac{1}{2} C = 90° - \frac{1}{2}\sigma$ und verlängere den Schenkel bis C, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Zusatz. Dieselbe Aufgabe hätte auch so ausgedrückt werden können: Aus einer Seite $A B = c$, und dem gegenüberstehenden Winkel C, sowie der Summe der beiden andern Seiten, $A C + B C = s$, ein Dreieck A B C zu construiren.

254. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu zeichnen, wenn eine Seite, $A B = c$, der gegenüberstehende Winkel C und die Differenz der beiden andern Seiten, $AC - BC = d$, gegeben ist (oder, was dasselbe ist, wenn die Differenz zweier Seiten, $A C - B C = d$, die Summe ihrer gegenüberliegenden Winkel $A + B = s$ und die dritte Seite $A B = c$ sein soll). (Fig. 161.)

Analysis. Angenommen, ABC wäre das verlangte Dreieck, und daher $A C - B C = A C - C D = A D = d$, so ist das Dreieck B C D gleichschenkelig und der gegebene Winkel C durch das Loth C E halbirt. Ferner ist Winkel A D B als Außenwinkel des Dreiecks $C D E = \frac{1}{2} C + C E D = 90° + \frac{1}{2} C$, folg-

lich auch Dreieck A B D bekannt, welches außer diesem Winkel noch die Seiten c und d hat, von denen erstere demselben gegenüberliegt. Mit dem Dreieck A B D aber ist (nach Aufgabe 252) auch Dreieck B C D und infolge dessen das gesuchte Dreieck A B C selbst leicht gefunden.

Construction. Man construire aus c, d und einem Winkel $= 90^\circ + \frac{1}{2}$ C, welcher der Seite A B = c gegenüberliegt, ein Dreieck A B D; errichte auf der Mitte von B D ein Loth C E, bis es die verlängerte A D in C schneidet, und verbinde C mit B, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

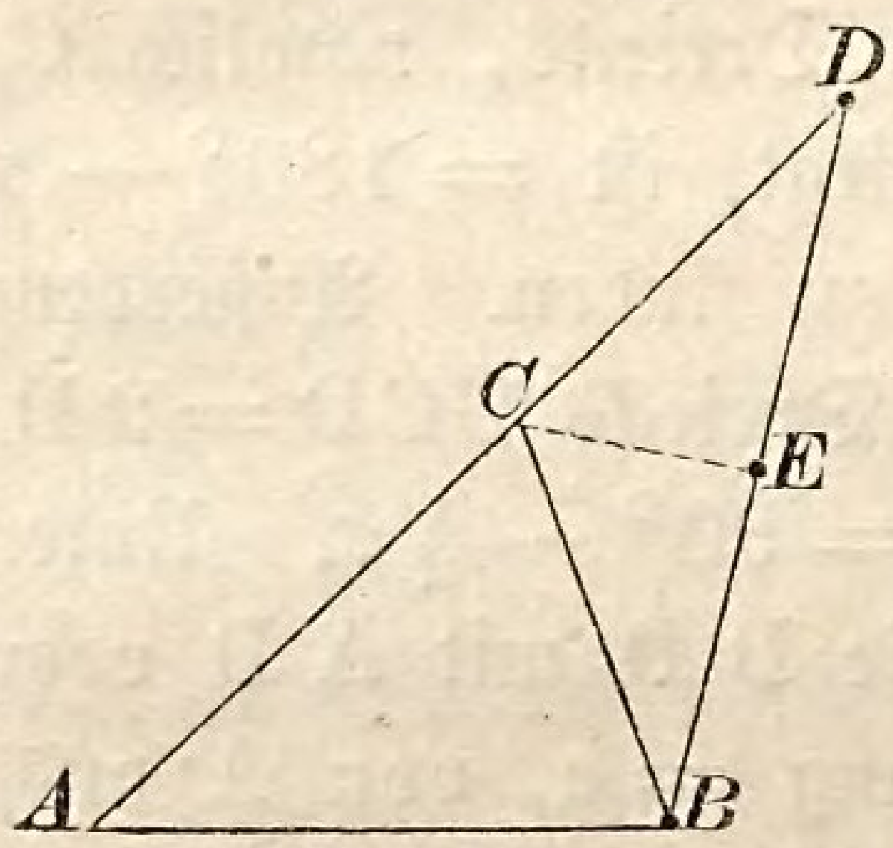


Fig. 162.

255. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn zwei Winkel A und B, sowie die Summe der gegenüberliegenden Seiten A C und B C = s gegeben sind.

Analysis. Angenommen, A B C sei das verlangte Dreieck. Wird A C um B C verlängert und B D gezogen, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck B C D. Nun ist Winkel A C B = CBD + D = 2 D. Ferner ist Winkel ACB $= 180^\circ - (A + B)$, folglich $D = \frac{180^\circ - (A + B)}{2}$, daher Dreieck A B D bekannt, weil A D = s, Winkel $D = \frac{180^\circ - (A + B)}{2}$ und C = C ist. Durch Winkel C B D = D aber wird auch die Richtung B C und Punkt C bestimmt.

Construction. Man setze an A D = s den Winkel A D E $= \frac{180^\circ - (A + B)}{2}$ an und verlängere den Schenkel D E bis zum Durchschnitt mit einer unter dem Winkel C an Punkt A angesetzten Linie. Alsdann trage man 1) den Winkel A D B an Punkt B der Linie B D und verlängere den Schenkel B C bis zum Durchschnitt mit A D, oder auch 2) man halbire B D und errichte auf E ein Loth bis A D und ziehe B C, oder 3) man setze an D der Linie A D den Winkel $\frac{180^\circ - (A + B)}{2}$ an

und ziehe aus B mit D F eine Parallele bis zum Durchschnitt mit A D: so ist A B C das verlangte Dreieck.

256. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn zwei Winkel A und B und die Differenz der ihnen gegenüberliegenden Seiten A C — B C = d gegeben sind. (Fig. 161.)

Analysis. Angenommen, A B C sei das verlangte Dreieck. Schneidet man von der Seite A C ein Stück C D = B C ab, so ist A D = d und Dreieck A C D gleichschenkelig, nämlich B C = C D. Nun ist aber Winkel $C = 180° - (A + B)$ bekannt, folglich auch Winkel $C D B = \frac{180° - (180° - A - B)}{2}$ $= \frac{1}{2}(A + B)$ und A D B als Nebenwinkel von C D B $= 180 - \frac{1}{2}(A + B)$. Folglich ist Dreieck A B D und dadurch auch Dreieck A B C bekannt.

Construction. Man zeichne eine Linie A D = d, trage an dieselbe in A den Winkel A und in D den Winkel A D B $= 180° - \frac{1}{2}(A + B)$ und verlängere ihre Schenkel, bis sie sich in B schneiden. Hierauf halbire man B D, errichte in E ein Loth, verlängere A D bis zum Durchschnitt mit diesem Lothe und verbinde C mit B, so ist A B C das verlangte Dreieck.

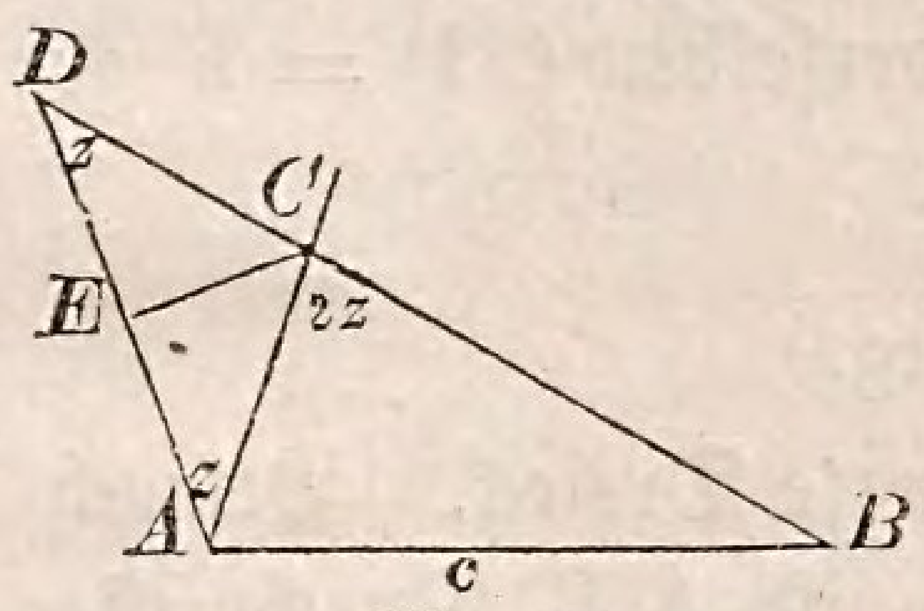


Fig. 163.

257. Aufgabe. Zur Construction des Dreiecks A B C sind gegeben: die Summe zweier Seiten AC + BC = s, die dritte Seite A B = c und die Differenz der ihr anliegenden Winkel $A - B = \delta$.

Analysis. A B C sei das verlangte Dreieck. Wird B C um A C verlängert und A D gezogen, so ist Winkel D = z, und, da △ A C D gleichschenkelig ist, Winkel A C B = 2 z. Nun ist aber

$$\text{Winkel } A + B + 2z = 2R.$$
$$\text{und } A - B \quad = \delta,$$

und, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$\text{auch } 2A + 2z = 2R. + \delta;$$
$$\text{folglich } A + z = 1R. + \tfrac{1}{2}\delta,$$
$$\text{oder Winkel } BAD = 1R. + \tfrac{1}{2}\delta.$$

Daher kann nun das Dreieck A B D construirt werden, und da Punkt C im Durchschnitt von B D und dem auf der Mitte von A D errichteten Lothe liegt, so ist auch Dreieck A B C bekannt.

Construction. Man setze c unter einem Winkel $= 1 R. + \frac{1}{2}\delta$ mit einer beliebigen Linie zusammen und beschreibe aus B mit s einen Kreisbogen, verbinde den Durchschnittspunkt D mit B, halbire A D und errichte in E ein Loth bis zur B D und ziehe zuletzt A C, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist Winkel $A + z = 1 R. + \frac{1}{2}\delta$,

oder $2 A + 2 z = 2 R. + \delta$.

Ferner ist Winkel $A C D = A + B$,

also $A C D - A = B$;

und da auch $A C D + 2 z = 2 R.$,

so ergibt sich $2A + 2z = ACD + 2z + \delta = A + B + 2z + \delta$;

d. h. $A + 2 z = B + 2 z + \delta$,

oder $A = B + \delta$,

folglich $A - B = \delta$.

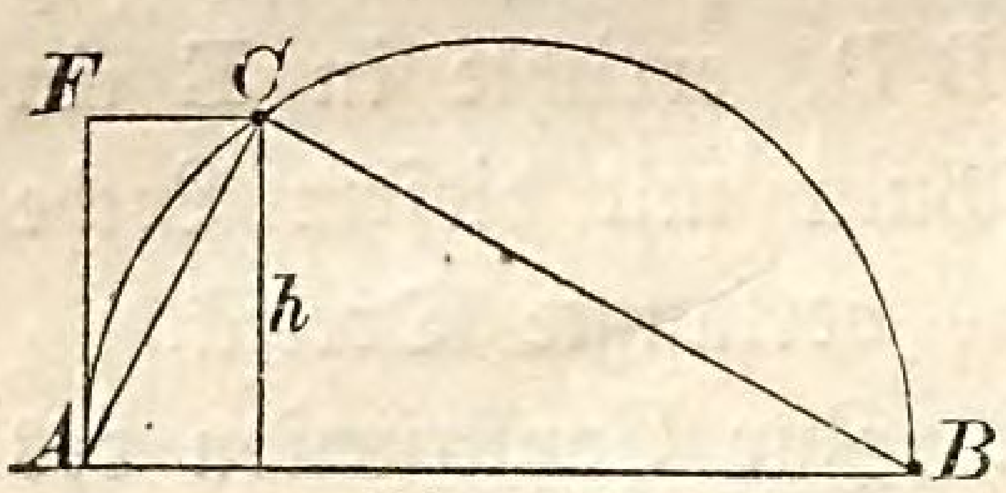


Fig. 164.

258. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreieck ABC zu construiren, wenn die Hypotenuse $A B = c$ und die Höhe auf derselben $C D = h$ gegeben sind.

Geometrische Lösung.

Analysis. Es sei A B C das verlangte Dreieck. Betrachten wir dasselbe als Dreieck im Kreise, so ist A B Durchmesser eines Kreises, dessen Peripherie der geometrische Ort des Punktes C ist. Wird in A das Loth $A F = h$ errichtet, so liegt Punkt C im Durchschnitt einer aus F mit A B gezogenen Parallele und der Peripherie.

Construction. Man beschreibe über $A B = c$ einen Halbkreis, errichte in A ein Loth $A F = h$ und ziehe aus F mit A B eine Parallele, bis sie die Peripherie in C schneidet, und verbinde zuletzt A mit B, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Determination. Die Auflösung der Aufgabe ist nur dann möglich, wenn $h =$ oder $< \frac{1}{2} c$ ist. Wäre $h > \frac{1}{2} c$, so würde

sie nicht als Höhe in den Kreis gebracht werden können. Daß aber h höchstens $= \frac{1}{2}$ c sein darf, das deutet auch der weiter unten befindliche algebraische Ausdruck für die beiden Katheten an.

Algebraische Lösung.

Wird die eine Kathete mit x, die andere mit y bezeichnet, so ergibt sich der doppelte Inhalt des Dreiecks =

$$\text{I. } x\,y = c\,h,$$

während noch die Gleichung

$$\text{II. } x^2 + y^2 = c^2$$

stattfindet.

Die doppelte I., zur II. addirt, sowie von der II. subtrahirt, gibt

$$(x + y)^2 = c^2 + 2\,c\,h \text{ und } (x - y)^2 = c^2 - 2\,c\,h;$$

$$\text{also } x + y = \sqrt{c\,(c + 2\,h)} \text{ und } x - y = \sqrt{c\,(c - 2\,h}),$$

woraus

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{c\,(c + 2\,h)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c\,(c - 2\,h)}$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}\sqrt{c\,(c + 2\,h)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c\,(c - 2\,h)}$$

Anmerkung. Da der Ausdruck $\sqrt{c\,(c - 2\,h)}$ oder $\sqrt{\frac{1}{2}\,c\,(\frac{1}{2}\,c - h)}$ als Linienmaß reell und positiv sein muß, so muß $h < \frac{1}{2}$ c oder h kann höchstens $= \frac{1}{2}$ c sein. Im letztern Falle gibt der eben angeführte Wurzelausdruck Null, sodaß $x = y = \frac{1}{2}\sqrt{c\,(c + c)} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,c^2} = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}$, also das Dreieck A B C gleichschenkelig wird.

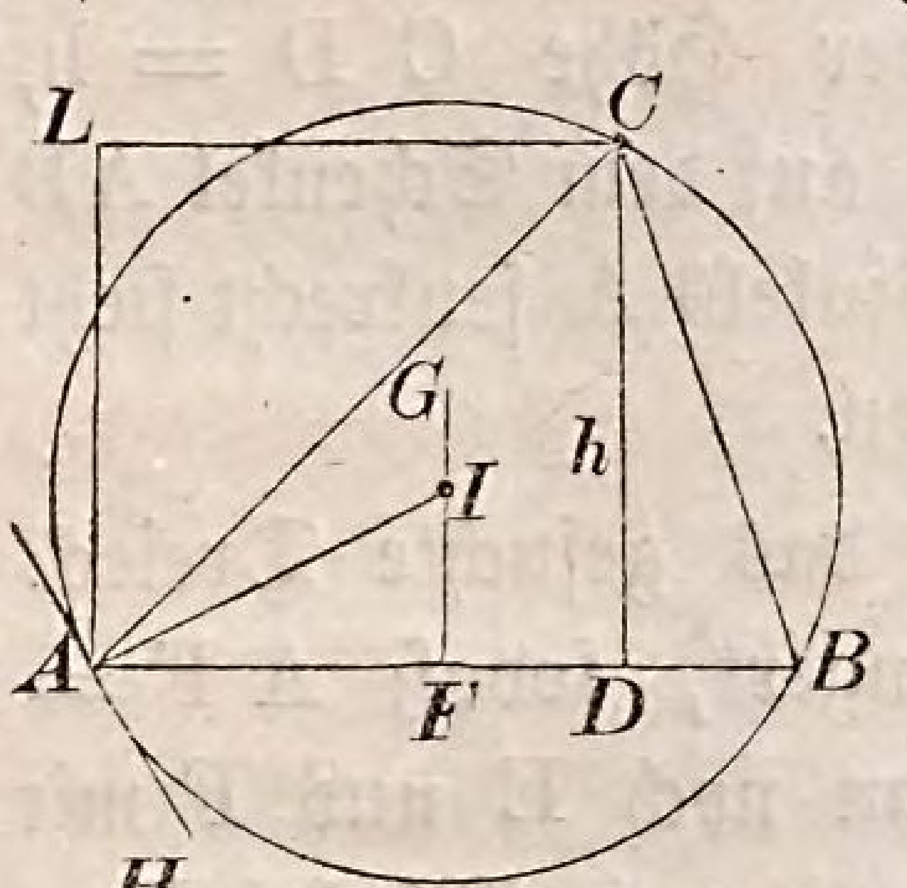


Fig. 165.

259. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Grundlinie A B = c, die Höhe auf derselben = h und der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel C gegeben ist, und zwar unter der Bedingung, daß dieser Winkel kein Rechter sein darf.

Analysis. Es sei A B C das gesuchte Dreieck mit dem gegebenen Winkel C, der Grundlinie A B = c und der Höhe C D = h. Betrachtet man A B C als Dreieck im Kreise, so ist

1) A B Sehne eines Kreises, in dessen Peripherie Punkt C liegt.
2) Der Mittelpunkt dieses Kreises aber liegt in einer Senkrechten, auf der Mitte von A B errichtet.

3) Macht man Winkel B A H = C und betrachtet man A H als Tangente, so muß ferner der Mittelpunkt in einem Lothe liegen, das im Punkte A der Linie A H errichtet worden.

4) Sind F G und A I die erwähnten beiden Lothe, so ist ihr Durchschnitt I der Mittelpunkt des Kreises, in dessen Peripherie der Punkt C liegt.

Construction. Man errichte in der Mitte von A B = c ein Loth F G, trage in Punkt A der Linie A B den Winkel B A H = C an, errichte in A ein Loth A I auf A H, so ist I der Mittelpunkt des verlangten Kreises. Nun beschreibe man aus I mit A I einen Kreis, errichte auf A B in A ein Loth A L = h, ziehe aus L mit A B eine Parallele, bis dieselbe die Peripherie in C schneidet, und verbinde C mit A und B, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist per constr. A B = a, und da C L || A B und C D || A L ist, so ergibt sich C D = A L = h. Weil ferner Winkel H A I = 1 Rechter ist, so muß A H eine Tangente und daher Winkel C = B A H sein.

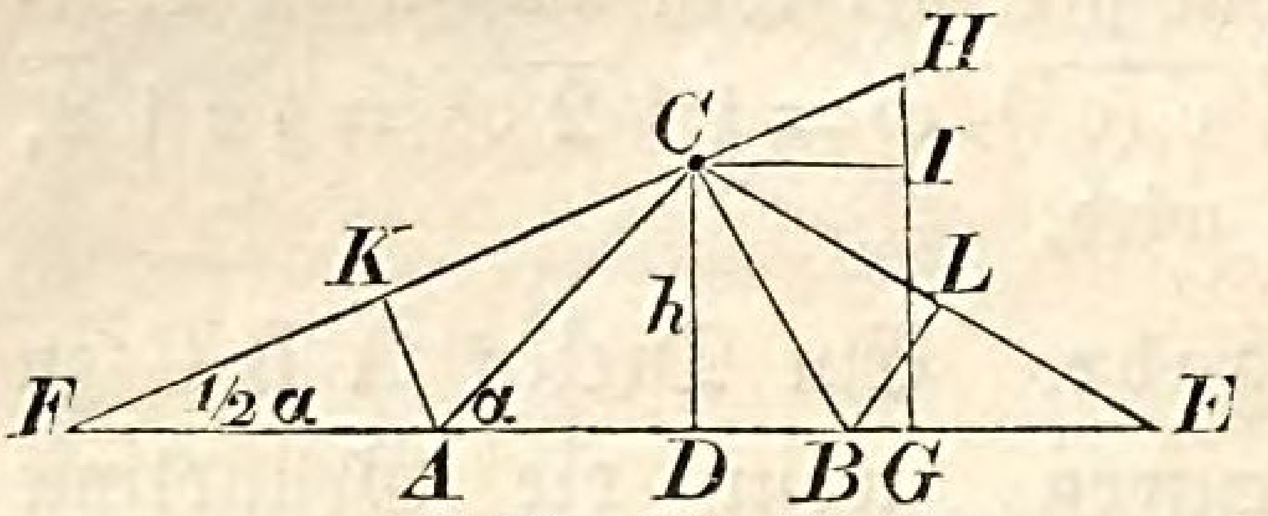


Fig. 166.

260. Aufgabe. Aus dem Umfange u, einem Winkel A = α und der Höhe C D = h, welche auf dem Schenkel AB des Winkels A senkrecht steht ein Dreieck A B C zu construiren.

Analysis. Angenommen, A B C sei das gesuchte Dreieck. Wenn man A B auf beiden Seiten verlängert, sodaß A F = A C und B E = B C wird, und wenn man noch E und F mit C verbindet, so ist, weil E F = u, C D = h und Winkel F = $\frac{1}{2}\alpha$ ist, Dreieck C E F bekannt, und infolge dessen auch die Richtung C F und Punkt C, in welchem sich die Linie C F und die Höhe C D schneiden. Nun ergibt sich auch C E als Verbindungslinie der Punkte C und E. Da ferner die Dreiecke A C F und B C E gleichschenkelig sind, so liegen ihre Spitzen A und B im Durchschnitt der E F mit den auf der Mitte der Grundlinien C E und C F errichteten Lothen.

Construction. Man setze E F $=$ u unter dem Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ mit einer beliebigen Linie F H zusammen, errichte auf EF, z. B. in G, ein Loth G I $=$ h, ziehe aus I eine Parallele mit E F, bis sie F H in C schneidet, und verbinde Punkt C mit E und F; halbire dann C F und E C in K und L, errichte daselbst Lothe, bis sie E F schneiden, und verbinde die Durchschnittspunkte A und B mit C: so ist A B C das verlangte Dreieck.

261. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn der Umfang $=$ u, ein Winkel C $= \alpha$ und die Höhe C D, welche durch die Spitze des Winkels C geht, $=$ h gegeben ist.

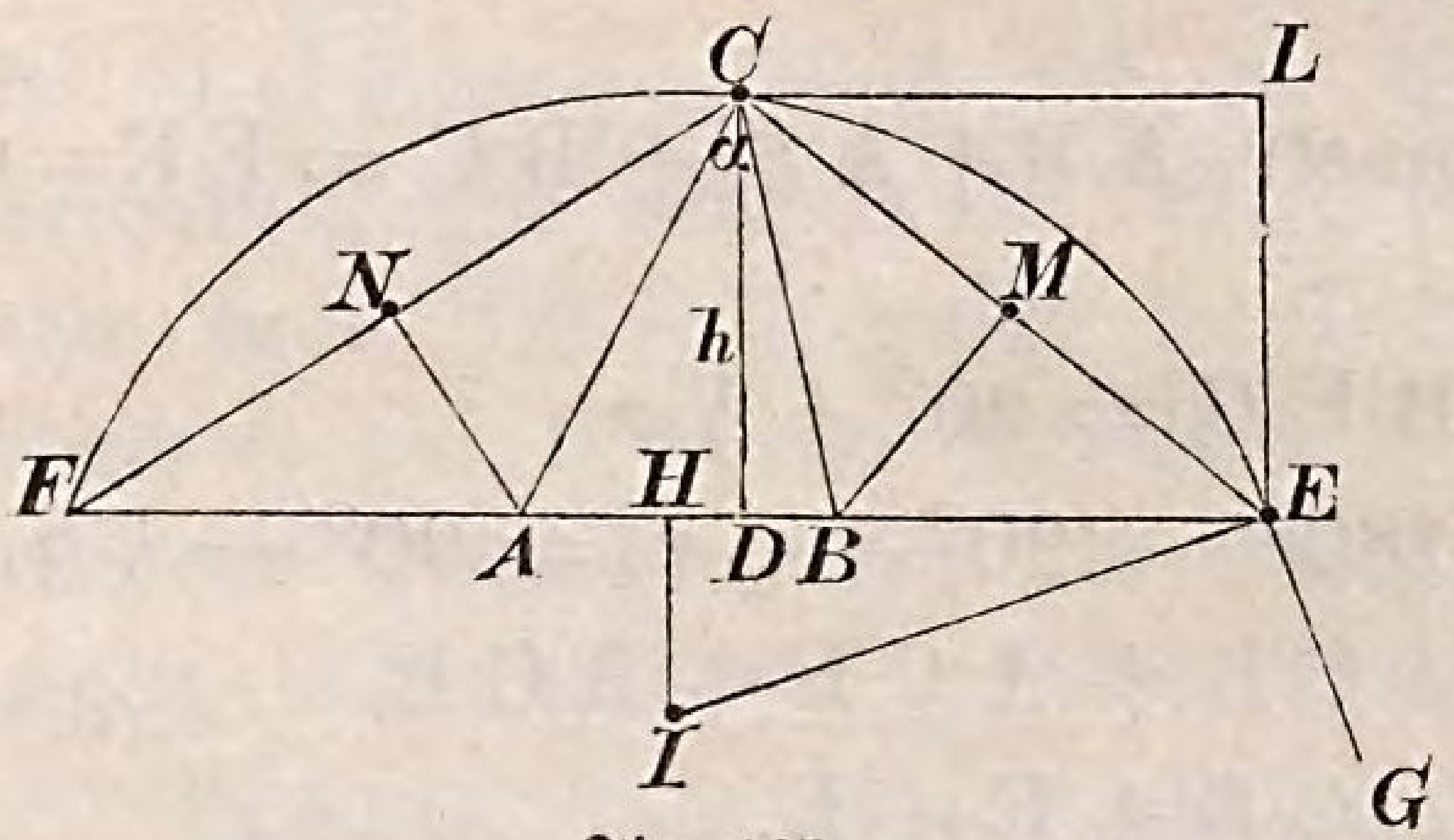


Fig. 167.

Analysis. Es sei A B C das gesuchte Dreieck. Macht man die Verlängerungen von A B nämlich B E $=$ B C und A F $=$ A C, so ist im Dreieck C E F Seite E F $=$ u und C D $=$ h bekannt.

Nun ist Winkel $E\,C\,F = A\,C\,F + B\,C\,E + \alpha = F + E + \alpha$

und $2\,(E + F) = A + B = 180^\circ - \alpha$,

daher $E + E = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

folglich Winkel $E\,C\,F = \alpha + 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Es kann also jetzt Dreieck C E F construirt werden, denn man kennt die Grundlinie, die Höhe auf derselben und den Winkel an der Spitze. Um diese Construction auszuführen, betrachten wir C E F als ein im Kreise beschriebenes Dreieck. Tragen wir den Winkel $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ an E an, so ist sein Schenkel E G Tangente des Kreises, in dessen Peripherie Winkel E C F liegt und dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der beiden Lothe ist, von denen das eine in der Mitte der Sehne E F und das andere im Berührungspunkte der Tangente errichtet worden. Ferner sind die Dreiecke A C F und B C E gleichschenkelig, folglich liegen deren Spitzen A und B im Durchschnitt der auf der Mitte der Grundlinien E C und C F errichteten Lothe mit EF.

Construction. Man setze an E der Linie E F $=$ u den Winkel F E G $= 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ an, halbire E F, errichte in H auf

E F und in E auf E G Lothe bis zum Durchschnitt I, und beschreibe mit E I einen Kreis; errichte in E ein Loth E L = h, ziehe aus L mit E F eine Parallele, bis sie die Peripherie des Kreises trifft und verbinde den Durchschnittspunkt C mit E und F; errichte endlich in M und N, den Halbirungspunkten von C E und C F, Lothe, bis sie E F schneiden, und verbinde die Durchschnittspunkte A und B mit C. Dann ist A B C das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist per constr. $AB + AC + BC = EF = u$ und $CD = h$; aber auch:

Winkel $FCE = BEG = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Ferner hat man $F + E = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

auch Winkel $FCE = ACB + ACF + BCE$,

oder $FCE = ACB + F + E$.

Daher ist $ACB = FCE - (F + E)$

d. h. $ACB = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha$.

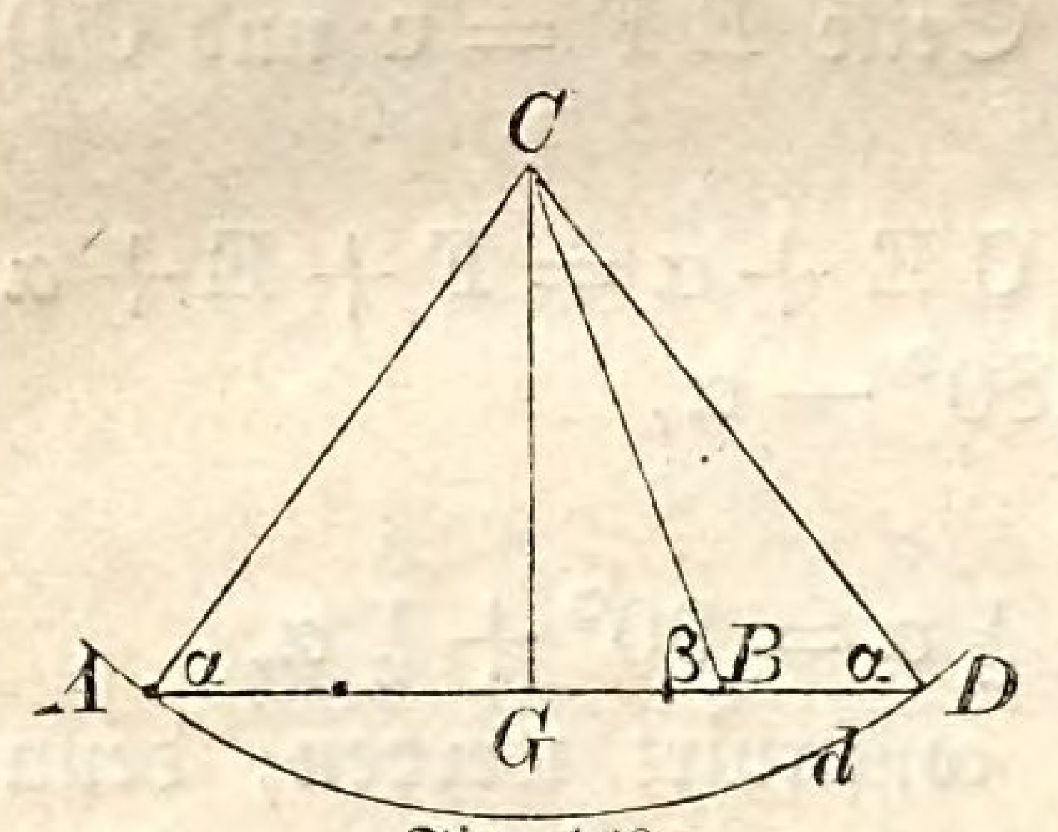


Fig. 168.

262. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Winkel an der Grundlinie $A = \alpha$ und $B = \beta$ und die Differenz der Segmente, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, $AG - BG = d$ gegeben sind.

Auflösung. Man zeichne eine Linie $BD = d$, lege in dem einen Endpunkt derselben D den kleinern Winkel $\alpha = BDC$ und in dem andern Endpunkt B an die Verlängerung derselben den größern Winkel $\beta = GBC$ an, beschreibe ferner um den Punkt C, in welchem sich die Schenkel dieser Winkel schneiden, mit C D einen Kreis, welcher die verlängerte B D in A trifft, und verbinde zuletzt A mit C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist Winkel $CAD = ADC = \alpha$, denn A C ist = C D gemacht worden, ferner Winkel $ABC = \beta$ auf Grund der Construction. Wird nun die Höhe C G gezogen, so ist $AG = DG$, folglich $AG - BG = DG - BG = BD = d$.

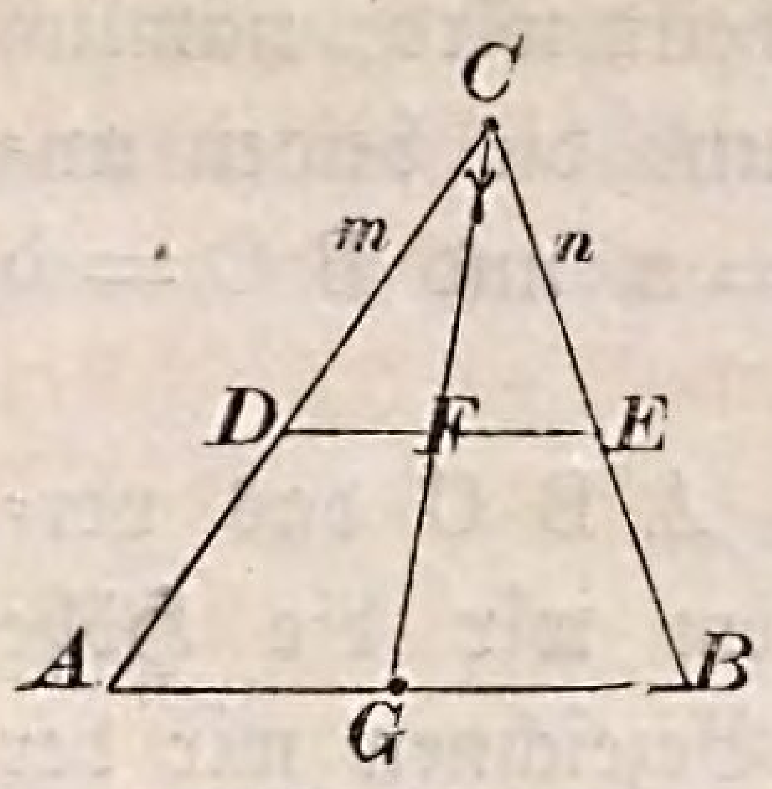


Fig. 169.

263. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn der Winkel C an der Spitze $= \gamma$, die Halbirungslinie desselben $= l$ und das Verhältniß der einschließenden Seiten $A\,C : B\,C = m : n$ gegeben ist.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel $D\,C\,E = \gamma$, sodaß sich die Schenkel $C\,D : C\,E = m : n$ verhalten, und ziehe D E. Wird nun der Winkel D C E durch eine Linie $D\,G = l$, welche die D E in F schneidet, halbirt und durch G mit D E eine Parallele A B bis zum Zusammentreffen mit den Verlängerungen der Schenkel des Winkels D C E gezogen, so entsteht das gesuchte Dreieck A B C.

Beweis. Es ist per constr. Winkel $A\,C\,B = \gamma$ und die Halbirungslinie $C\,G = l$, und da $A\,B \parallel D\,E$ ist, so verhält sich

$$A\,C : B\,C = C\,D : C\,E = m : n.$$

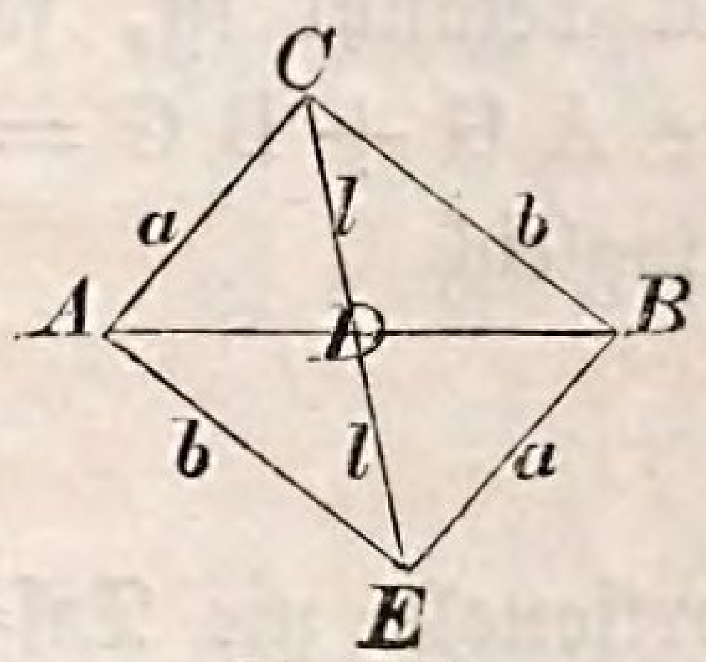


Fig. 170.

264. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn zwei Seiten $A\,C = a$ und $B\,C = b$ und die Linie C D, welche die Spitze C mit der Mitte der Grundlinie verbindet, $= l$ gegeben sind.

Auflösung. Es sei A B C das gesuchte Dreieck. Wird dasselbe zu dem Parallelogramme A C B E vervollständigt, so entstehen die Dreiecke A C E und B C E, in denen alle drei Seiten bekannt sind. Daher wird das Dreieck A B C gefunden, wenn wir zuerst ein Dreieck A C E construiren, in welchem Seite $A\,C = a$, $A\,E = b$ und $C\,E = 2\,l$ ist, alsdann den Punkt A mit der Mitte der Linie C E, nämlich mit D, verbinden, die Linie A D über D hinaus um sich selbst verlängern und B mit C verbinden.

Beweis. Nach der Construction ist die Mittellinie $C\,D = l$ und Seite $A\,C = a$. Ferner ist das Dreieck $A\,D\,E \cong B\,D\,C$ und deshalb $B\,C = A\,E = b$.

265. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Differenz der Segmente, in welche die Grundlinie

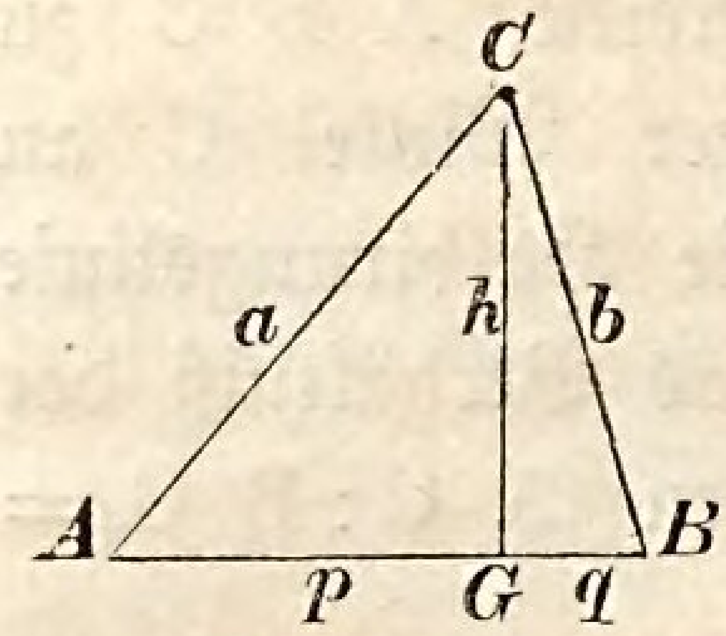


Fig. 171.

durch die Höhe getheilt wird, nämlich $AG - BG = d$, und die beiden andern Seiten $AC = a$ und $BC = b$ gegeben sind.

Auflösung. Es ist ABC das verlangte Dreieck, in welchem wir die Höhe $CG = h$ setzen wollen. Bezeichnen wir der Kürze wegen die Segmente AG und BG bezüglich mit p und q, so ist in den rechtwinkeligen Dreiecken ACG und BCG

$$a^2 = h^2 + p^2$$

$$\text{und } b^2 = h^2 + q^2.$$

Die zweite Gleichung, von der ersten subtrahirt, gibt

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2,$$

$$\text{oder } (a + b)(a - b) = (p + q)(p - q);$$

d. h. in jedem Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe und Differenz der Seiten gleich dem Rechteck aus der Summe und Differenz der Segmente der Grundlinie.

Da diesmal $AG - BG$ oder $p - q = d$ bekannt ist, so haben wir nur noch die Summe der Segmente $AG + BG = AB = p + q$ zu suchen, und diese findet sich sogleich

$$= \frac{(a + b) \cdot d}{a - b},$$

d. h. die Grundlinie AB ist die vierte Proportionale zur Differenz ihrer Segmente und zur Summe und Differenz der beiden gegebenen Seiten.

Erster Zusatz. Wären die Segmente der Grundlinie p und q gegeben, sowie die Differenz der Seiten $a - b = v$, so müßte man die Summe $a + b$ als Unbekannte suchen. Es ist aber

$$a + b = \frac{(a - b)(p + q)}{p - q};$$

und da $a - b = v$ ist, so erhält man

$$a = \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{2} v \frac{(p + q)}{p - q} = \tfrac{1}{2} v \left(1 + \frac{p + q}{p - q}\right) = \frac{p\,v}{p - q}$$

$$\text{und } b = \tfrac{1}{2} v \left(-1 + \frac{p + q}{p - q}\right) = \frac{q\,v}{p - q};$$

d. h. die Seite $AC = a$ ist die vierte Proportionale zur Differenz der Seiten, dem Segmente $AG = p$ und der Differenz

der beiden Segmente, in welche die Grundlinie durch ihre Höhe getheilt wird, während sich die Seite B C = b als vierte Proportionale zu den drei Linien p — q, q und v darstellt.

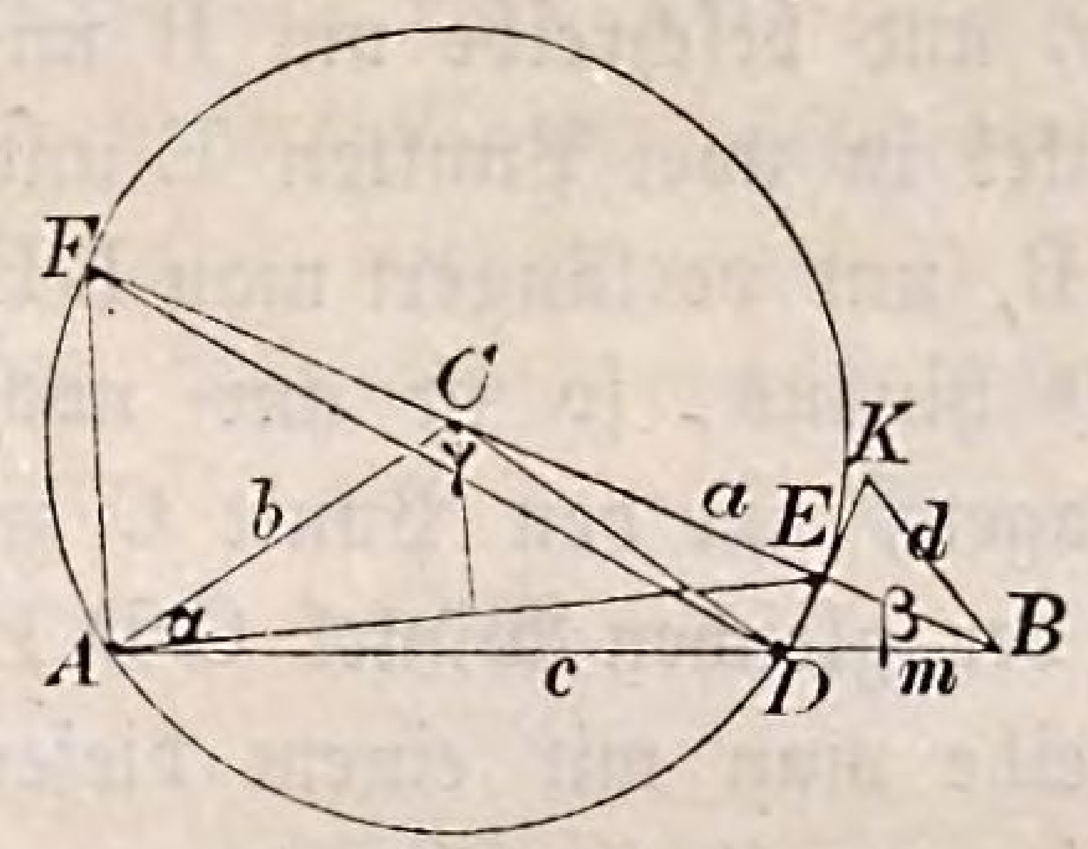


Fig. 172.

Zweiter Zusatz. Wenn man mit der kleinern Seite A C des Dreiecks A B C um die Spitze C einen Kreis beschreibt, der die Grundlinie A B in D, die Seite B C in E und ihre Verlängerung in F schneidet, ferner die Verbindungslinien A E, A F, C D, D E und D F zieht, und der Kürze wegen B C = a, A C = b und A B = c setzt, und die ihnen gegenüberliegenden Winkel bezüglich mit α, β und γ bezeichnet, so erhalten wir die Summen und Differenz der Seiten a und b veranschaulicht, nämlich:

$$B F = B C + A C = a + b$$

$$\text{und } B E = A C - A C = a - b.$$

Außerdem ist

1) Winkel $A F B = \frac{1}{2} A C B = \frac{1}{2} \gamma$,
2) Winkel $A C F = \alpha + \beta$,
3) Winkel $A D F = A E F = \frac{1}{2} A C F = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$,
4) Winkel $B C D = \alpha - \beta$,
5) Winkel $E A B = \frac{1}{2} B C D = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$,
6) Winkel $D F B = \frac{1}{2} B C D = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$,
7) Winkel $F A E = F D E = 90°$;

und da in dem Kreisvierecke A D E F die Winkel A D E = A F E = 180° sind, während auch A D E + E D B als Nebenwinkel zusammen zwei Rechte betragen, so ist endlich

8) Winkel $E D B = A F E = \frac{1}{2} \gamma$.

Betrachtungen dieser Art zeigen den Weg an, der eingeschlagen werden muß, wenn Dreiecke construirt werden sollen, in denen Summen und Differenzen von Seiten und Winkeln gegeben sind.

266. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn der Winkel an der Spitze C = γ, die Differenz der einschließenden Seiten B C — A C = d und der Unter-

schied der Segmente, in welche die Grundlinie AB durch die Höhe getheilt wird, $= m$ gegeben sind. (Fig. 172.)

Auflösung. Man zeichne einen Winkel $EDB = \frac{1}{2}\gamma$, mache den einen Schenkel $BD = m$, und beschreibe um B mit d einen Kreis, der den andern Schenkel in zwei Punkten E und K schneidet. Verbindet man E mit B, und verlängert man BE über E hinaus, sowie BD über D hinaus, so ist nur noch Winkel CED in D an DE anzutragen, um den Punkt C zu erhalten, in welchem sich die Schenkel der gleichen Winkel CDE und CED schneiden. Zuletzt beschreibe man mit einem dieser Schenkel, CD oder CE, einen Kreis um C, welcher die verlängerte BD in A schneidet, und ziehe AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck. Wäre statt E der Durchschnittspunkt K benutzt worden, so hätte sich zwar ein anderes, aber dem Dreieck ABC congruentes Dreieck ergeben.

Beweis. Zunächst ist klar, daß $BD = m$ und $BC - AC = BE = d$ sein muß; und da Winkel $BDE = \frac{1}{2}\gamma$ gemacht worden, so ist sein Nebenwinkel $ADE = 180° - \frac{1}{2}\gamma$. Wird nun BC über C hinaus verlängert, bis die Verlängerung den um C mit AC beschriebenen Kreis in F durchschneidet, und noch AF gezogen, so entsteht im Kreise das Viereck ADEF, in welchem die Winkel $ADE + AFE$ zusammen 180° betragen müssen. Da Winkel $ADE = 180° - \frac{1}{2}\gamma$ ist, so ist Winkel $AFE = \frac{1}{2}\gamma$ und sein Centriwinkel $ACE = \gamma$.

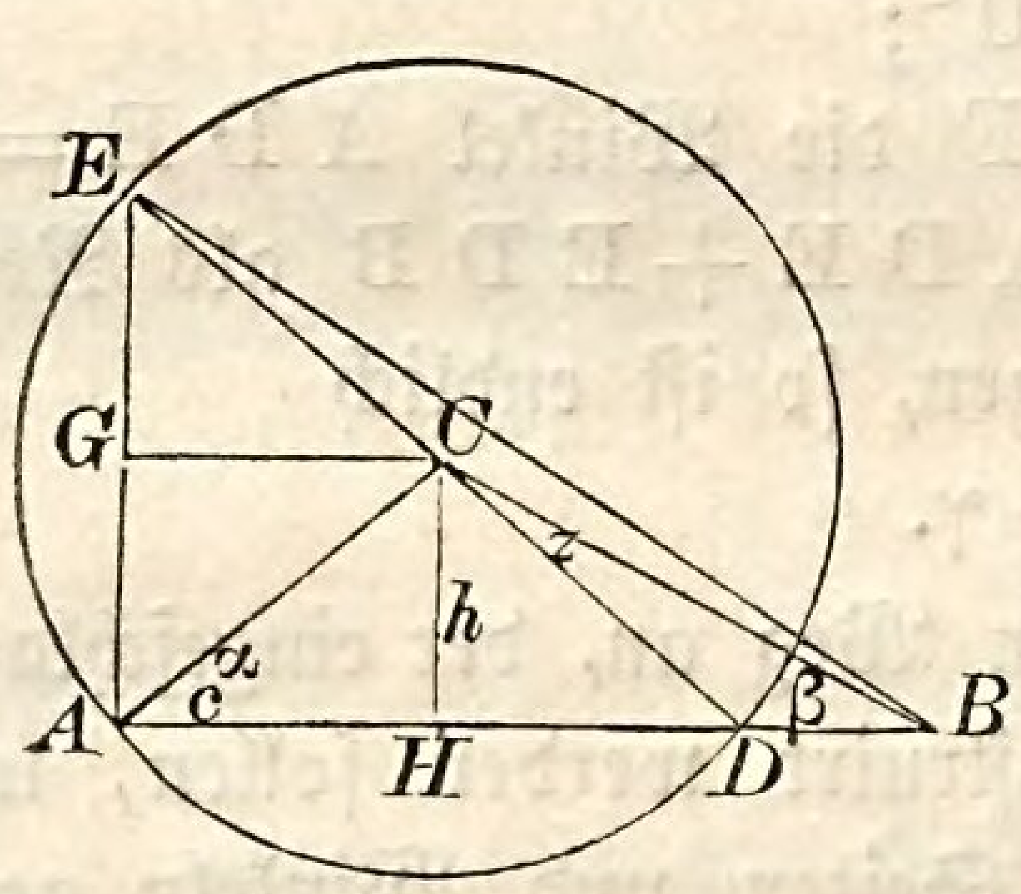


Fig. 173.

267. Aufgabe. Ein Dreieck ABC zu construiren, wenn die Grundlinie $AB = c$, die Höhe $CH = h$ und die Differenz der Winkel an der Grundlinie $\alpha - \beta = z$ gegeben ist.

Auflösung. Es sei ABC das gesuchte Dreieck. Wird mit der kleinern Seite AC um C ein Kreis beschrieben, welcher AB in D schneidet, ferner der Durchmesser DE und die Verbindungslinie AE gezogen, so ist, weil $EG = GA = CH$, $AE = 2\,CH = 2\,h$, Winkel $BAE = 90°$ und $ECB = 180° -$

B C D = 180° — z. Hiernach hätte man zunächst das rechtwinkelige Dreieck A B E zu construiren und Punkt C zu finden. Man zeichne also A B = c, errichte in dem Endpunkte A derselben ein Loth A E = 2 h, ziehe B E und beschreibe über B E einen Kreisbogen, welcher den Winkel 180° — z = B C D faßt. Alsdann halbire man A E in G und ziehe durch G mit AB eine Parallele, welche den Kreisbogen in C schneidet. Wird nun C mit A und B verbunden, so ergibt sich das gesuchte Dreieck A B C.

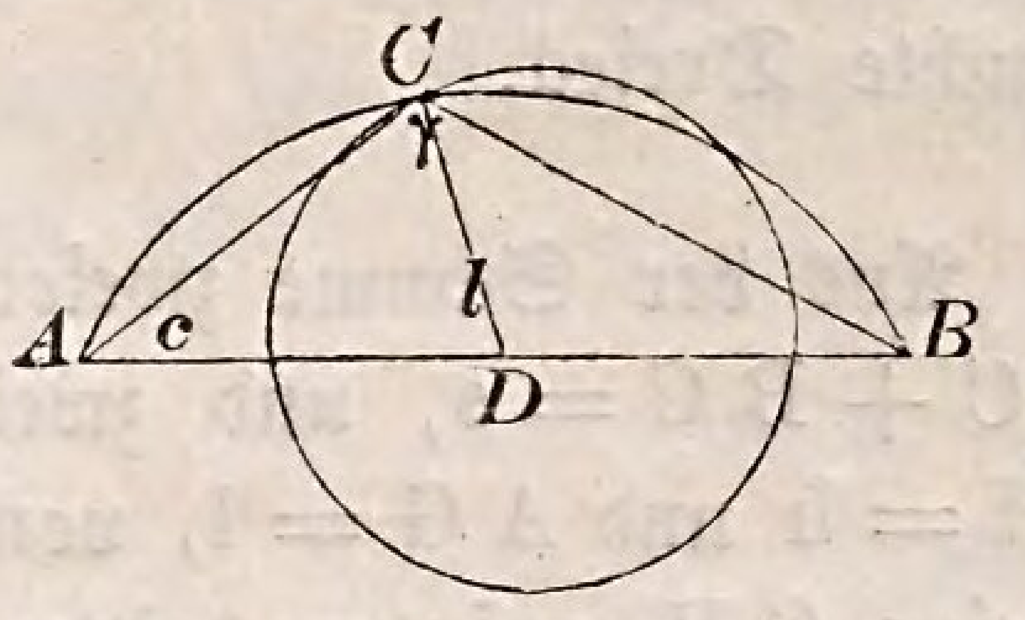


Fig. 174.

268. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Grundlinie A B = c, die Halbirungslinie auf der Grundlinie nach der Spitze (die sogenannte Mittellinie) = l und der Winkel an der Spitze = γ gegeben ist.

Auflösung. Man beschreibe über A B = c einen Kreisbogen, welcher den Winkel γ faßt, und um den Halbirungspunkt D der Grundlinie mit l einen Kreis, welcher den soeben beschriebenen Kreisbogen in zwei Punkten durchschneidet; dann erhält man durch Verbindung des einen dieser Durchschnittspunkte C mit A und B das gesuchte Dreieck A B C.

269. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn die Höhe C H = h, die Differenz der Segmente der Grundlinie B H — A H = d, und die Differenz der Winkel an derselben α — β = z gegeben ist. (Fig. 173.)

Auflösung. Die Analysis, die wesentlich die der letzten vorhergehenden Aufgaben ist, zeigt, daß man zunächst Dreieck B C D zu construiren habe, zu welchem die Grundlinie B D = d, die Höhe C H = h und der Winkel an der Spitze B C D = α — β gegeben ist. (Vgl. Aufgabe 48.) Hierauf verlängere man B D über D hinaus und schneide diese Verlängerung mit einer Zirkelöffnung = C D von C aus, so ist A B C das verlangte Dreieck.

270. Aufgabe. Dreieck A B C zu construiren, wenn die Differenz zweier Seiten B C — A C = d die Differenz

ihrer gegenüberliegenden Winkel $\alpha - \beta = \delta$ und die dritte Seite $A\,B = c$ gegeben ist. (Fig. 172.)

Auflösung. Nach Nr. 265, Zusatz 2, hat man $B\,E = d$, Winkel $E\,A\,B = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\delta$, während noch $A\,B = c$ gegeben ist. Man construire daher aus den Linien c und d und dem Winkel $E\,A\,B = \frac{1}{2}\delta$ ein Dreieck E A B, sodaß der Winkel E A B der Seite d gegenüberliegt, verlängere hierauf B E über E hinaus, errichte auf der Mitte von A E ein Loth, bis es von der verlängerten B E in C geschnitten wird, und verbinde zuletzt C mit A: so ist A B C das gesuchte Dreieck.

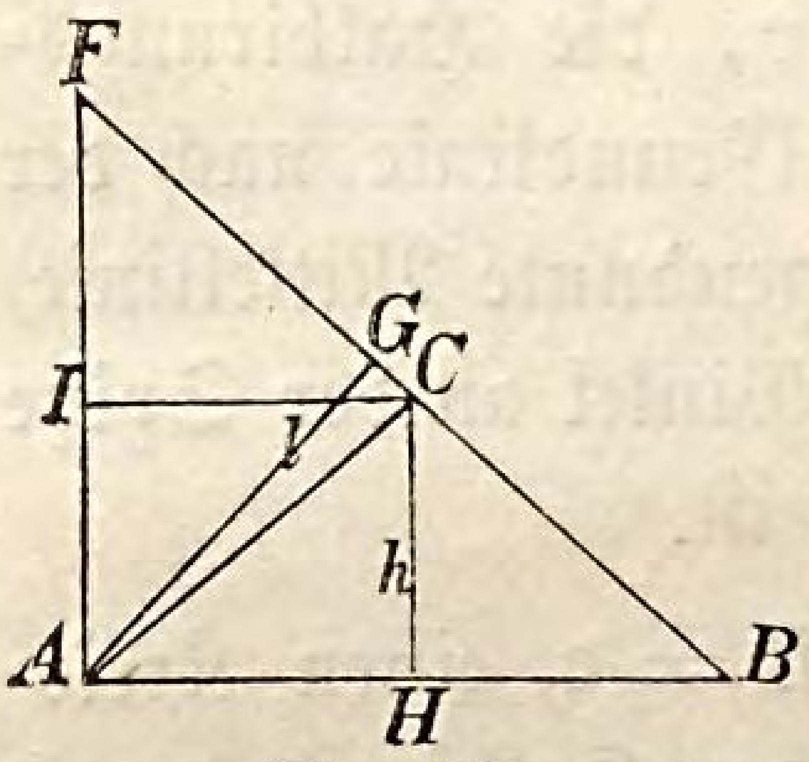


Fig. 175.

271. Aufgabe. Aus der Summe zweier Seiten, $A\,C + B\,C = s$, und zwei Höhen, $C\,H = h$ und $A\,G = l$, von denen die eine C H auf der dritten Seite A B senkrecht steht, ein Dreieck A B C zu construiren.

Construction. Man construire ein rechtwinkeliges Dreieck A B F, das $B\,F = s$ zur Hypotenuse und $A\,F = 2\,h$ zur Kathete hat, und halbire A F in I; ziehe alsdann aus I mit A B eine Parallele bis zur B F und verbinde den Durchschnittspunkt C mit A und B: so ist A B C das verlangte Dreieck mit den gegebenen Höhen $C\,H = h$ und $A\,G = l$.

Beweis. Weil $I\,C \parallel A\,B$ und $A\,F \parallel H\,C$ ist, so hat man $C\,H = A\,I = \frac{1}{2}A\,F = h$, und weil I C senkrecht auf der Mitte von A F steht, so muß $A\,C = C\,F$ sein. Daher ist $A\,C + B\,C = C\,F + B\,C = B\,F = s$. Nun ist blos noch nachzuweisen, daß $A\,G = l$, also die gegebene Höhe auf B C sei. Dies aber ist der Fall, sobald A G rechtwinkelig auf B F errichtet worden.

Zusatz. In dem rechtwinkeligen Dreieck ABF ist $AF^2 + AB^2 = B\,F^2$ oder $4\,h^2 = s^2 - c^2$, folglich $2\,h\,\sqrt{(s+c)\,(s-c)}$; d. h. die doppelte Höhe C H ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Linien $s + c$ und $s - c$. Auch ist A B oder c $= \sqrt{s^2 - 4\,h^2} = \sqrt{(s + 2\,h)\,(s - 2\,h)}$.

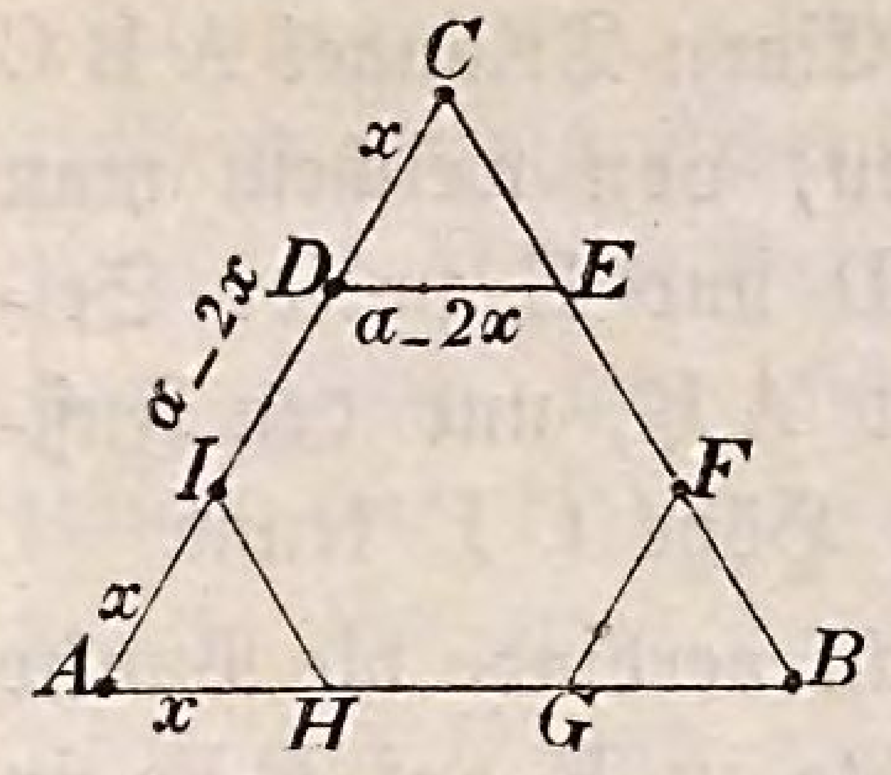


Fig. 176.

272. Aufgabe. Einen gegebenen gleichseitigen Triangel A B C so abzustumpfen, daß ein reguläres Sechseck D E F G H I entsteht.

Auflösung. Denken wir uns das verlangte Sechseck bereits construirt, so sind offenbar die abzuschneidenden Dreiecke unter sich congruent und dem gegebenen Triangel A B C ähnlich. Bezeichnen wir C D oder A I = x, so ist die Seite des gesuchten Sechsecks I D = D E = a — 2 x, wenn die Seite des regulären Triangels = a ist. Daher hat man

$$x : a - 2x = a : a;$$

d. h. es ist $x = a - 2x$,

oder $3x = a$,

folglich $x = \frac{1}{3} a$.

Man hat also aus jeder Spitze des regulären Triangels A B C ein Stück = $\frac{1}{3}$ der Seite desselben abzuschneiden, und verbindet man die Theilungspunkte D und E, F und G, H und I, so entsteht das reguläre Sechseck D E F G H I.

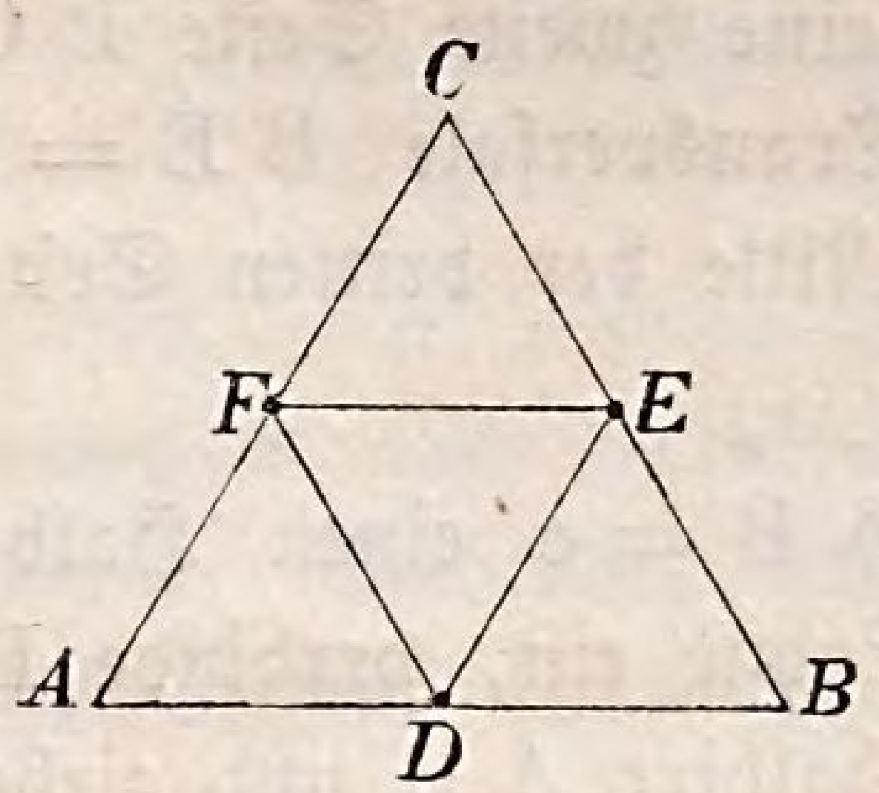


Fig. 177.

273. Aufgabe. Einen Triangel ABC zu construiren, von welchem die Mitten der drei Seiten gegeben sind.

Auflösung. Es sei A B C das gesuchte Dreieck, also D, E und F die Mitte der Seiten, so muß offenbar E F ∥ A B, F D ∥ E B und D E ∥ A C sein. Da also BDFE ein Parallelogramm ist, so ist $\triangle BDE \cong \triangle DEF$, folglich B D = F E und B E = D F. Auf dieselbe Weise erhält man A D = F E und A F = D E. Daher verbinde man die gegebenen Punkte D, E und F, welche die Mitten der drei Seiten bezeichnen, und ziehe durch D mit E F eine Parallele A B, sodaß A B = 2 × E F wird. Verbindet man endlich A mit F, und B mit E, und verlängert man noch A F und B E, bis sie sich in C schneiden, so ist A B C der verlangte Triangel.

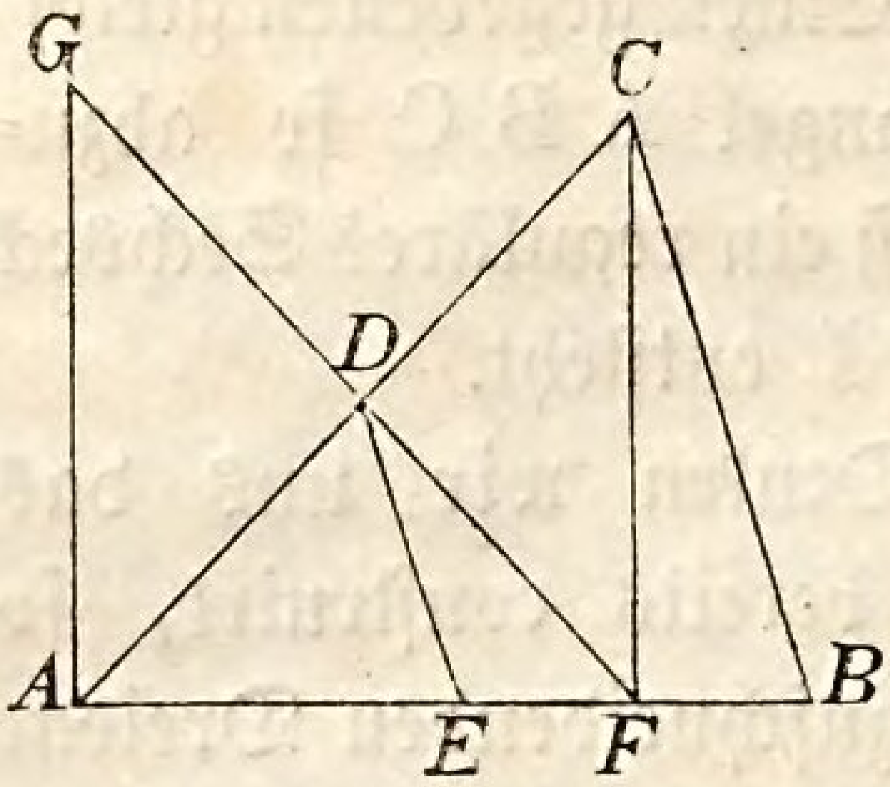


Fig. 178.

274. Aufgabe. Einen Triangel A B C zu construiren, von welchem man die Mitten D und E zweier Seiten A C und A B, und den Fußpunkt F der Höhe C F kennt.

Auflösung. Man verbinde die Punkte D, E und F, errichte in F auf F E ein beliebiges Loth C F und verlängere E F auf beiden Seiten. Hierauf verlängere man F D und mache D G = D F, fälle von G aus ein Loth G A auf A B, und verbinde A mit D. Endlich verlängere man A D, bis das Loth C F in C geschnitten wird, so ist △ A D G ≅ C D F, folglich A D = C D. Da A E die Hälfte der Seite A B ist, so hat man, um auch den Punkt B zu finden, nur A E um sich selbst zu verlängern. Wird daher noch B mit C verbunden, so ist A B C das gesuchte Dreieck.

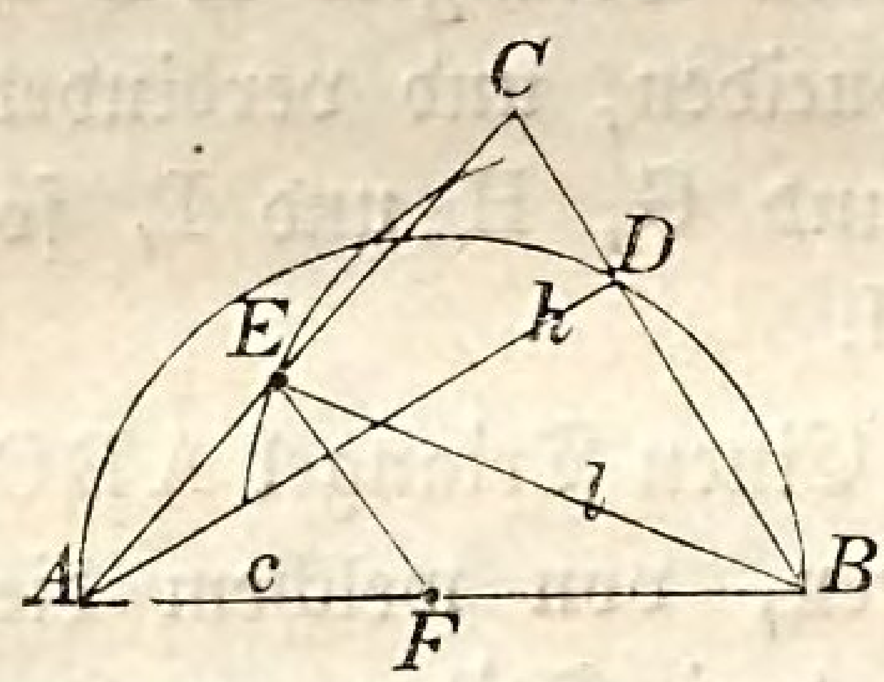


Fig. 179.

275. Aufgabe. Einen Triangel ABC zu construiren aus einer seiner Seiten, A B = c, der Höhe A D = h auf eine zweite Seite B C und der Transversale B E = l nach der Mitte der dritten Seite A C.

Auflösung. Man beschreibe über A B = c einen Halbkreis, trage von A aus A D = h als Sehne ein, verbinde B mit D, verlängere B D über D hinaus, halbire A B und ziehe aus F mit B D eine Parallele, bis dieselbe von dem mit BE = l aus B beschriebenen Kreisbogen in E geschnitten wird. Zuletzt verbinde man A mit E, und verlängere A E bis zum Durchschnitt mit der verlängerten B D, so ist A B C der gesuchte Triangel.

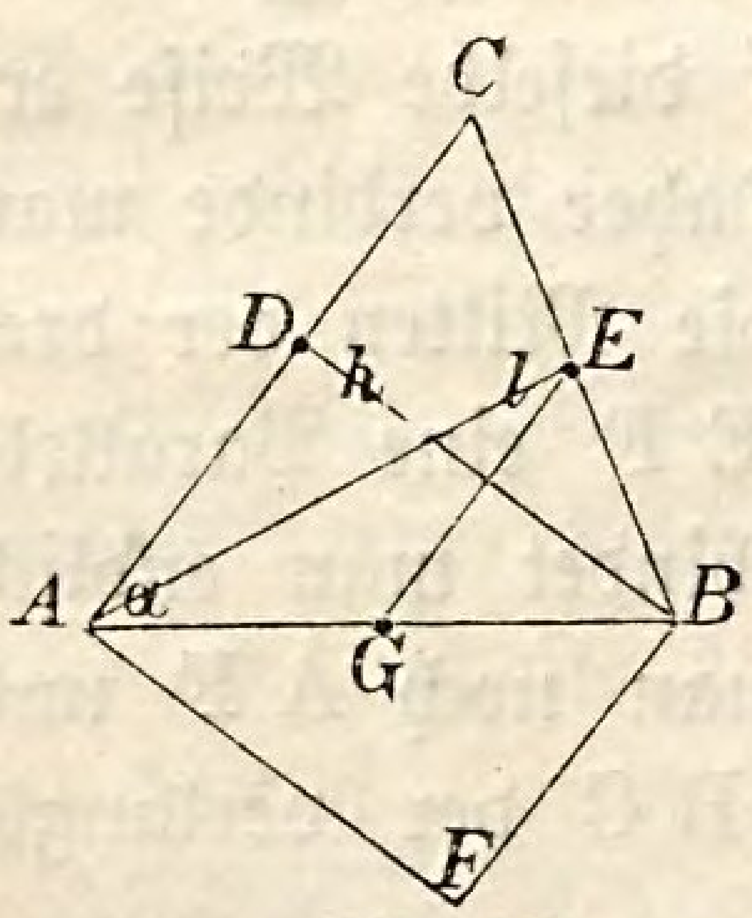


Fig. 180.

276. Aufgabe. Ein Dreieck A B C zu construiren, wenn ein Winkel A = α, die Transversale A E = l aus demselben, und die Höhe B D = h aus einem andern Winkel B gegeben ist.

Auflösung. Man zeichne einen Winkel B A D $= \alpha$, errichte in A des Schenkels A D ein Loth A F $=$ h und ziehe durch F mit A D eine Parallele F B, welche den Schenkel A B schneidet, sodaß nun eine Seite A B des gesuchten Dreiecks gefunden ist. Hierauf ziehe man von B aus mit F A eine Parallele bis zum andern Schenkel A D, halbire A B in G und ziehe von G aus mit A D eine Parallele, und schneide dieselbe von A aus mit einer Zirkelöffnung A E $=$ l. Wird der Durchschnittspunkt E mit B verbunden und B E über E hinaus verlängert bis zum Zusammentreffen mit der verlängerten A D, so entsteht endlich das gesuchte Dreieck A B C.

Neunter Abschnitt.

Von den Vierecken.

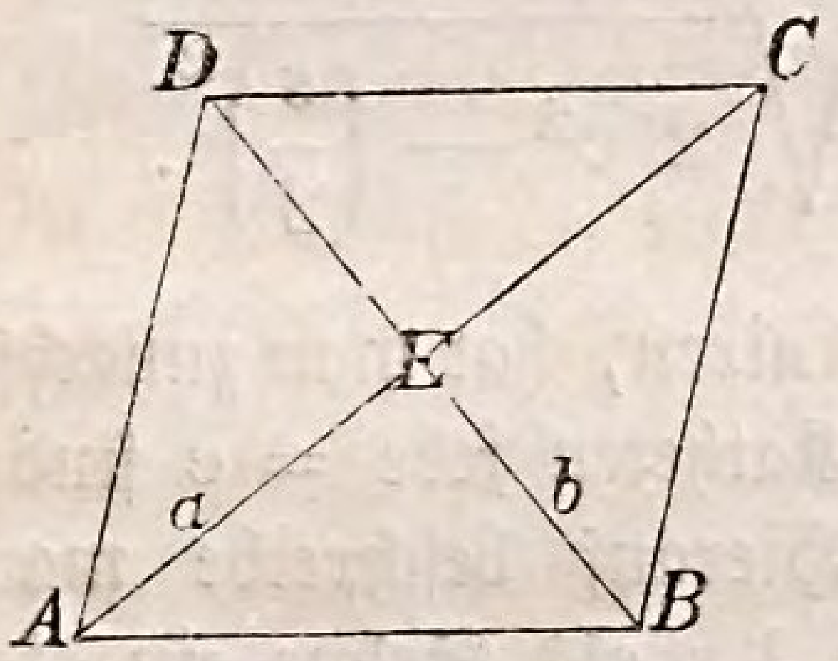


Fig. 181.

277. Aufgabe. Einen Rhombus ABCD zu construiren, wenn die Diagonalen AC $=$ a und BD $=$ b gegeben sind.

Geometrische Lösung. Da sich die Diagonalen gegenseitig halbiren, und die Winkel, unter denen dies geschieht, Rechte sind, so hat man zunächst eine der Diagonalen, z. B. A C $=$ a, zu zeichnen, dieselbe in E zu halbiren und durch E eine Senkrechte zu legen, sodaß D E $=$ B E $= \frac{1}{2}$ b wird. Verbindet man nun A und B, B und C, C und D, sowie D mit A, so ist A B C D der gesuchte Rhombus.

Algebraische Lösung. Setzen wir die Seite des Rhombus $= x$, so ist in jedem der vier rechtwinkeligen Dreiecke, in welche der Rhombus durch die beiden Diagonalen getheilt wird,

$$x^2 = (\tfrac{1}{2}\,a)^2 + (\tfrac{1}{2}\,b)^2,$$

d. i. $4\,x^2 = a^2 + b^2$,

oder $2\,x = \sqrt{a^2 + b^2}$;

folglich $x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

278. Aufgabe. Einen Rhombus A B C D zu construiren, von welchem die Seite $=$ c und die Summe der beiden Diagonalen $=$ s gegeben ist.

Auflösung. Werden die Diagonalen mit x und y bezeichnet, so ist

$$\text{I. } x + y = s \text{ und II. } 4\,c^2 = x^2 + y^2.$$

Da $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2\,x\,y$ ist, so erhält man aus II.:

$$4\,c^2 = s^2 - 2\,x\,y,$$

$$\text{oder } 2\,x\,y = s^2 - 4\,c^2,$$

$$\text{und III. } 4\,x\,y = 2\,(s^2 - 4\,c^2).$$

Wird diese Gleichung von der quadrirten I. subtrahirt, so findet sich

$$(x - y)^2 = 8\,c^2 - s^2,$$

$$\text{folglich } x - y = \sqrt{8\,c^2 - s^2};$$

und diese Gleichung in Verbindung mit der ersten gibt

$$x = \tfrac{1}{2}\,s + \tfrac{1}{2}\sqrt{8\,c^2 - s^2} = \tfrac{1}{2}\,s + \sqrt{2\,c^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}\,s - \tfrac{1}{2}\sqrt{8\,c^2 - s^2} = \tfrac{1}{2}\,s - \sqrt{2\,c^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}.$$

Anmerkung. Um $\sqrt{2\,c^2 - \frac{1}{4}\,s^2}$ zu construiren, hat man zunächst ein rechtwinkeliges Dreieck zu zeichnen, dessen Katheten jede $= c$ sind; die Hypotenuse ist dann die Seite von $2\,c^2$. Hierauf beschreibe man über dieser Hypotenuse einen Halbkreis und trage $\frac{1}{2}\,s$ als Sehne ein, so ist die andere Sehne $= \sqrt{2\,c^2 - \frac{1}{4}\,s^2}$.

279. Aufgabe. Einen Rhombus zu construiren, von welchem eine Seite $= c$ und die Differenz der Diagonalen $= d$ gegeben ist.

Auflösung. Ist die eine Diagonale $= x$ und die andere $= y$, so haben wir diesmal

$$\text{I. } x - y = d \text{ und II. } 4\,c^2 = x^2 + y^2.$$

Die Gleichung I. quadrirt, gibt

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = d^2,$$

und ziehen wir dies von der II. ab, so findet sich

$$2\,x\,y = 4\,c^2 - d^2.$$

Diese Gleichung, zur II. addirt, gibt

$$(x + y)^2 = 8\,c^2 - d^2 = 4\,(2\,c^2 - \tfrac{1}{4}\,d^2) = (2\,c^2 - (\tfrac{1}{2}\,d)^2$$

$$x + y = 2\sqrt{2\,c^2 - (\tfrac{1}{2}\,d)^2}.$$

Da jetzt Summe und Differenz der Diagonalen bekannt sind, so erhält man sogleich

$$x = \frac{1}{2} d + \sqrt{2 c^2 - (\frac{1}{2} d)^2}$$

$$\text{und } y = - \frac{1}{2} d + \sqrt{2 c^2 - (\frac{1}{2} d)^2}.$$

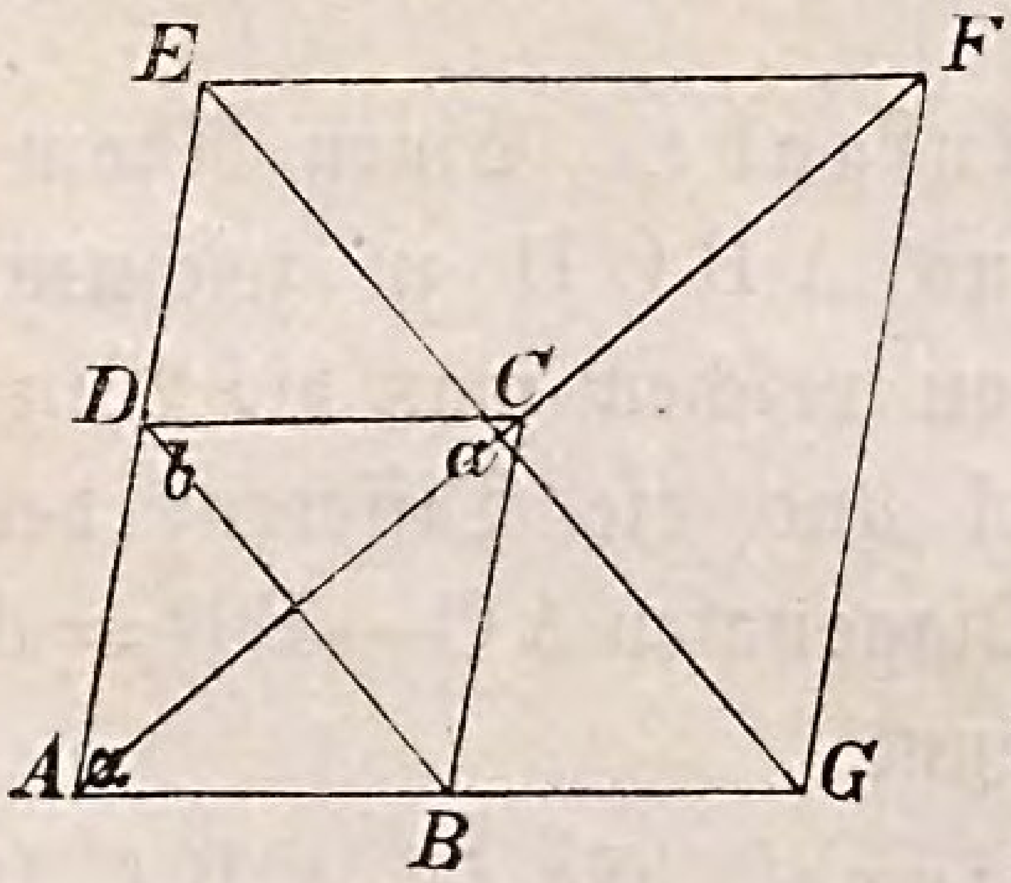


Fig. 182.

280. Aufgabe. Einen Rhombus zu zeichnen, von welchem man die Winkel und die Summe der Diagonalen kennt.

Auflösung. Wenn der Winkel $A = \alpha$ und die Summe der Diagonalen $AC + BD = s$ gegeben ist, so construire man zunächst über $A F = s$ auf beiden Seiten ein gleichschenkeliges Dreieck, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder $= \frac{1}{2} \alpha$ sind. Dadurch entsteht die völlig bekannte Raute A E F G, die mit dem gesuchten Rhombus A B C D den Winkel α gemein hat. Daher ist auch die Diagonale E G bekannt. Denken wir uns nun den gesuchten Rhombus A B C D construirt und die Diagonalen in demselben gezogen, so sind offenbar die Dreiecke A C B und A F G einander ähnlich, sowie auch die Dreiecke A B D und A E G. Daher ist, wenn die Seite des Rhombus $A B C D = x$, die Diagonalen $A C = a$, $B D = b$ und $E G = p$ gesetzt werden,

$$a : s = x : F G$$

$$\text{und } b : p = x : A G.$$

Da aber $F G = A G$ ist, denn beide sind Seiten desselben Rhombus, so ergibt sich aus beiden Proportionen:

$$a : s = b : p,$$

$$\text{oder } a : b = s : p,$$

$$\text{und hieraus erhellt } a + b : a = s + p : s,$$

$$\text{d. h. } s : a = s + p : s,$$

$$\text{also } A C \text{ oder } a = \frac{s^2}{s + p};$$

d. i. A C ist die dritte Proportionale zu den Linien A F und A F + E G.

Ebenso findet sich

$$\mathrm{B\,D} \text{ oder } b = \frac{p\,s}{s + p};$$

d. h. B D ist die vierte Proportionale zu den Linien A F, E G und A F + E G.

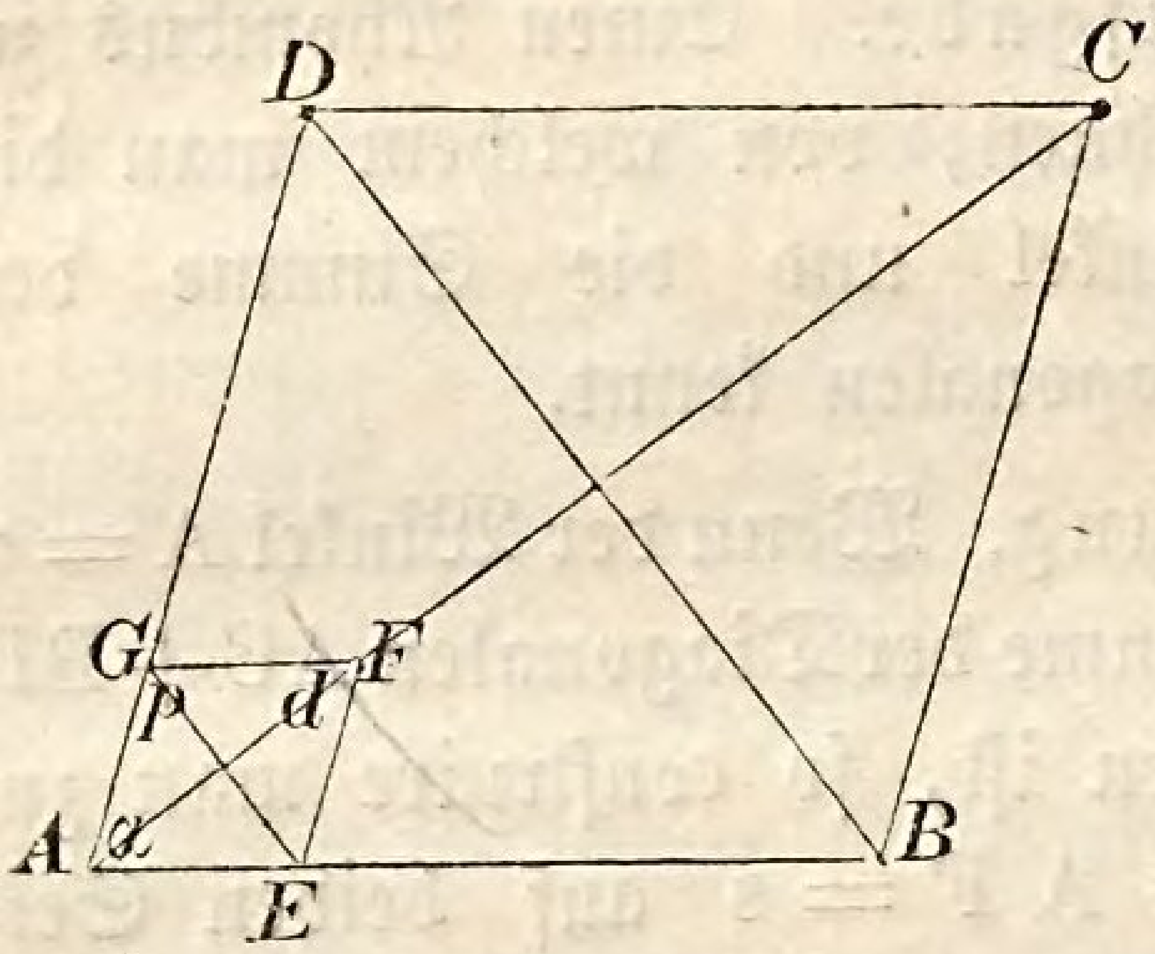


Fig. 183.

281. Aufgabe. Einen Rhombus A B C D zu zeichnen, von welchem man die Winkel und die Differenz der Diagonalen A C — B D = d kennt.

Auflösung. Es sei A B C D der gesuchte Rhombus und A F = d, sowie der Winkel B A D = α gegeben. Macht man A F zur Diagonale eines Rhombus A E F G, der mit der gesuchten Raute den Winkel α gemein hat, so ergeben sich wieder zwei Paar ähnliche Dreiecke, nämlich A F G und A C D, sowie A G E und A B D, und dadurch erhält man

$$\mathrm{A\,G : A\,F = A\,D : A\,C} \text{ oder } \mathrm{A\,G : A\,D = A\,F : A\,C}$$

$$\text{und } \mathrm{A\,G : G\,E = A\,D : B\,D} \text{ oder } \mathrm{A\,G : A\,D = E\,G : B\,D},$$

aus welchen beiden Proportionen folgt:

$$\mathrm{A\,F : A\,C = E\,G : B\,D} \text{ oder } \mathrm{A\,F : E\,G = A\,C : B\,D},$$

$$\text{aber auch } \mathrm{A\,F - E\,G : A\,F = A\,C - B\,D : A\,C}$$

$$\text{und } \mathrm{A\,F - E\,G : E\,G = A\,C - B\,D : B\,D}.$$

Da der Rhombus A E F G durch den gegebenen Winkel α und die gegebene Diagonale A F = d völlig bestimmt ist, so kennt man auch die andere Diagonale G E. Wird dieselbe = p und A C = x und B E = y gesetzt, so verwandeln sich die beiden letzten Proportionen in

$$d - p : d = d : x$$

$$\text{und } d - p : p = d : y,$$

und hieraus ergibt sich

$$\mathrm{A\,C} \text{ oder } x = \frac{d^2}{d - p} \text{ und } \mathrm{B\,D} \text{ oder } y = \frac{p\,d}{d - p}.$$

Zusatz. Da nach Nr. 277 die Seite des Rhombus gleich der Hälfte der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner Diagonalen ist, so findet man, wenn die Summe der Diagonalen = s gegeben worden, für die Seite des gesuchten Rhombus:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^4+p^2 s^2}{(p+s)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{(p+s)^2}(s^2+p^2)} = \frac{\frac{1}{2}s}{p+s}\sqrt{s^2+p^2}.$$

Kennt man aber die Differenz der Diagonalen = d, so ist die Seite des Rhombus:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^4+d^2 p^2}{(d-p)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^2}{(d-p)^2}(d^2+p^2)} = \frac{\frac{1}{2}d}{d-p}\sqrt{d^2+p^2},$$

während in beiden Fällen unter p die durch Construction des nicht gesuchten Rhombus gewonnene, übrigens völlig bestimmte Hülfslinie, welche die andere Diagonale desselben ist, verstanden wird.

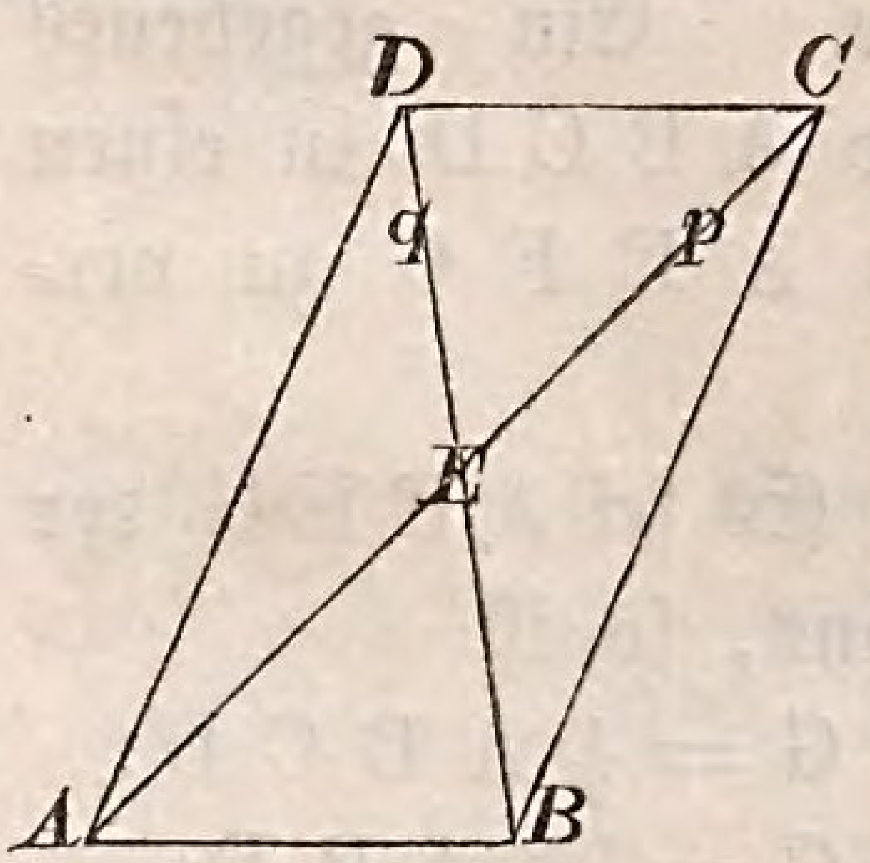


Fig. 184.

282. Aufgabe. Ein Rhomboid ABCD aus einer Seite AB und den beiden Diagonalen AC = p und BD = q zu zeichnen.

Auflösung. Da sich die Diagonalen halbiren, so hat man zunächst aus AB, $\frac{1}{2}$ p und $\frac{1}{2}$ q ein Dreieck ABE zu construiren. Verlängert man hierauf AE und BE über E hinaus, bis EC = AE und DE = BE wird, so entsteht durch Verbindung der Punkte A, D, C und B unter sich das verlangte Rhomboid ABCD.

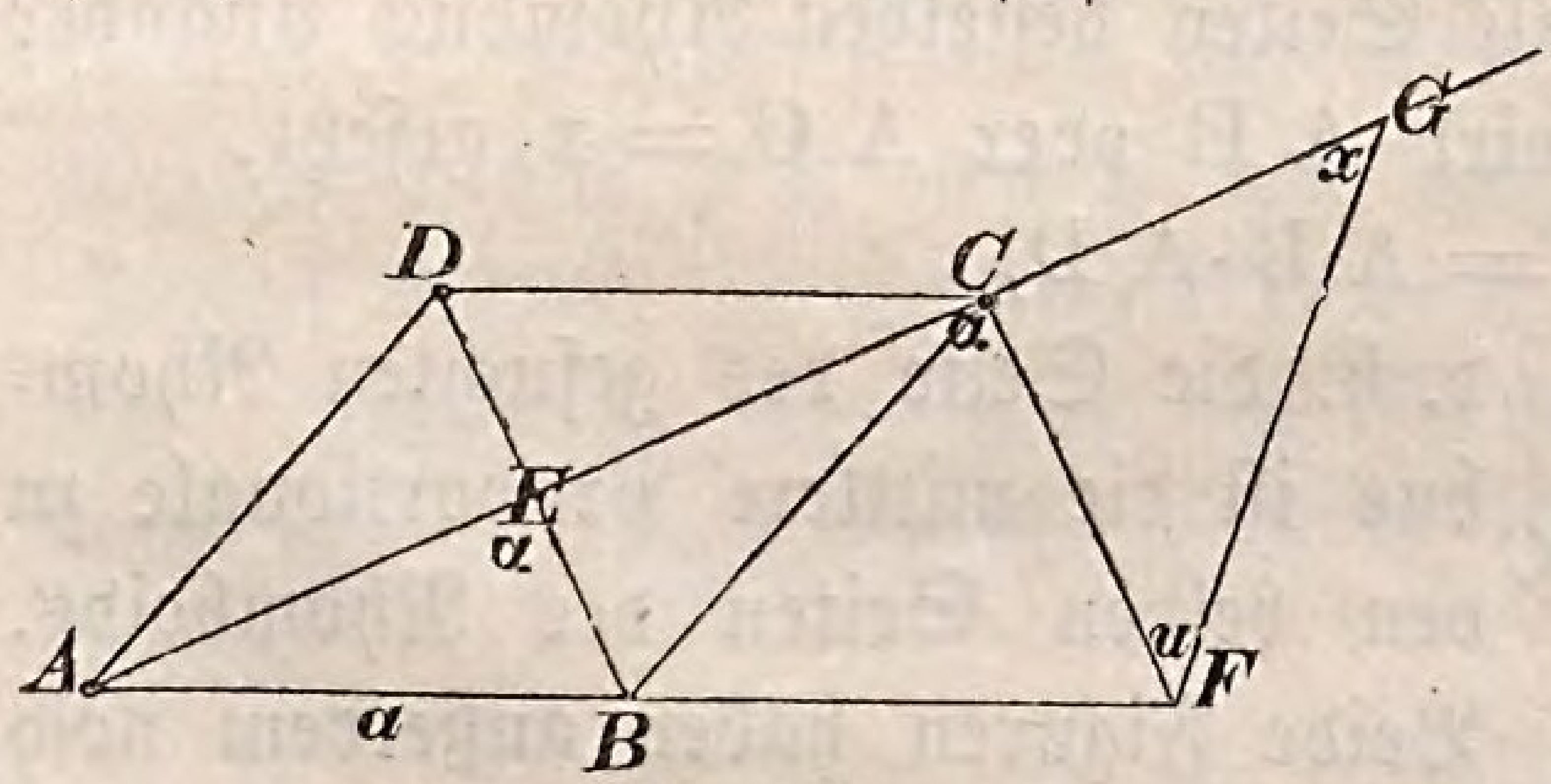


Fig. 185.

283. Aufgabe. Ein Rhomboid ABCD aus einer Seite AB = a, der Summe der Diagonalen AC + BD = s und dem Winkel der Diagonalen, AEB = α, zu construiren.

Auflösung. Angenommen, ABCD sei das verlangte Rhomboid, und AG = AC + BD = s. Wird AB bis F

verlängert, sodaß B F = A B, also A F = 2 a ist, und verbindet man C mit F, so ist C F mit B D parallel und ihr gleich, und daraus folgt: Winkel A C F = α, sowie C F = C G. Es ist daher, wenn noch F G gezogen wird, $\triangle$ C F G gleichschenkelig und Winkel x = u = $\frac{1}{2}\alpha$. Man kennt also vom Dreieck A F G zwei Seiten A F = 2 a und A G = s, sowie einen Winkel A G F = $\frac{1}{2}\alpha$, und muß dieses Dreieck zunächst construirt werden. Hierauf trage man in Punkt F der F G einen Winkel = $\frac{1}{2}\alpha$ an und verlängere den Schenkel bis zur A G, verbinde den Durchschnittspunkt C mit dem Punkte B in der Mitte von A F, und ziehe A D || B C, sowie C D || A B, so findet sich der vierte Punkt D als Durchschnittspunkt der aus A und C gezogenen Linien A D und C D. Das Parallelogramm A B C D ist das verlangte Rhomboid, was aus der zu Anfange gegebenen Analysis leicht bewiesen werden kann.

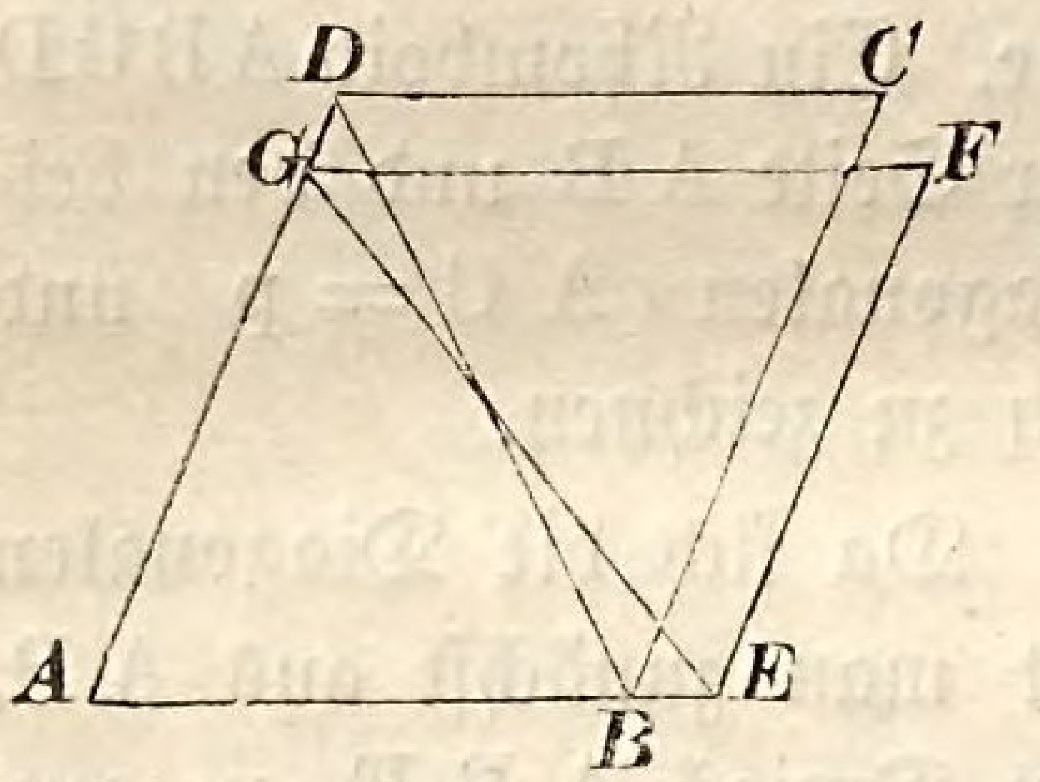


Fig. 186.

284. Aufgabe. Ein gegebenes Rhomboid A B C D in einen Rhombus A E F G zu verwandeln.

Auflösung. Es sei A E F G der verlangte Rhombus, so ist

$$\tfrac{1}{2}\,A\,E\,F\,G = \tfrac{1}{2}\,A\,B\,C\,D;$$

d. h. $\triangle$ A E G = $\triangle$ A B D;

und, weil beide den Winkel A gemein haben, so muß das Product der einschließenden Seiten gleich sein. Es ist daher

$$A\,E \cdot A\,G = A\,B \cdot A\,D.$$

A E und A G aber sind als Seiten desselben Rhombus einander gleich, folglich hat man, wird A E oder A G = x gesetzt,

$$x^2 = A\,B \cdot A\,D,$$

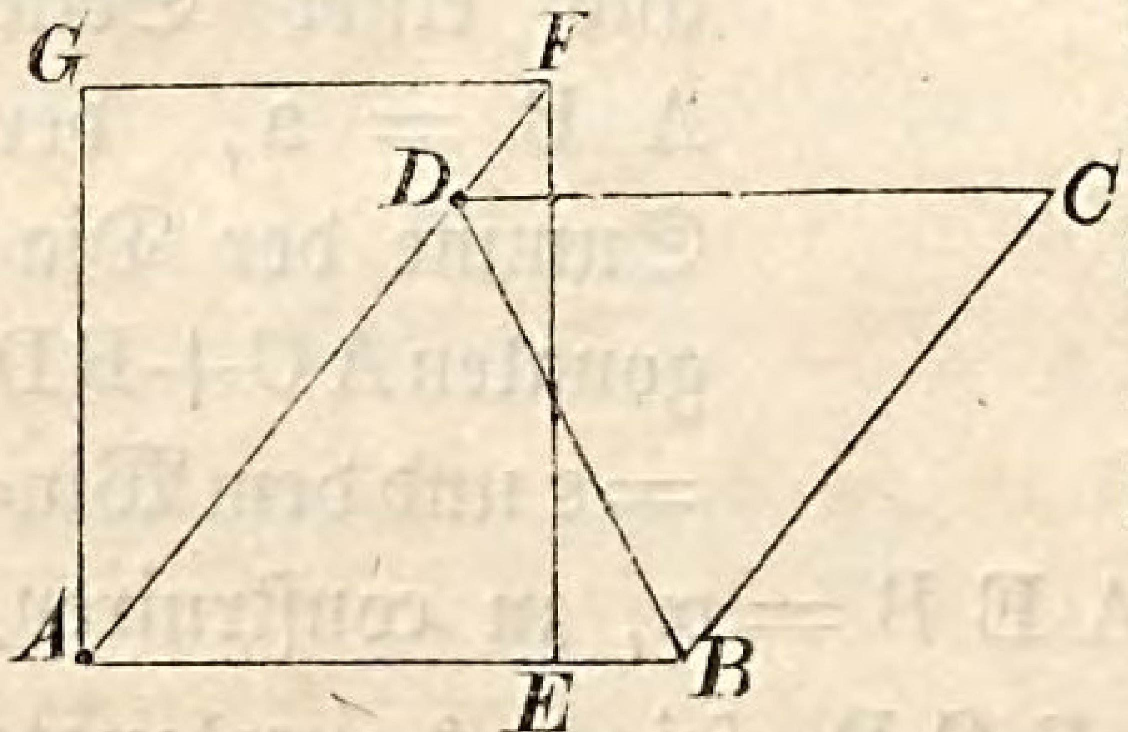


Fig. 187.

d. h. die Seite des gesuchten Rhombus ist die mittlere Proportionale zu den beiden Seiten des Rhomboids. Beide Figuren haben außerdem noch bezüglich dieselben Winkel.

285. Aufgabe. Einen Rhombus A B C D zu construiren, der einem gegebenen Rechteck A E F G gleich ist.

Auflösung. Ist A B C D der gesuchte Rhombus, und A B oder A D = x, so haben wir nach der vorigen Aufgabe mit Hülfe der gleichen Dreiecke A E F und A B D, die denselben Winkel bei A besitzen,

$$x^2 = AE \cdot AF,$$

$$\text{oder } x = \sqrt{AE \cdot AF}.$$

d. h. x ist die mittlere Proportionale zwischen der einen Seite A E und der Diagonale A F in dem gegebenen Rechteck A E F G.

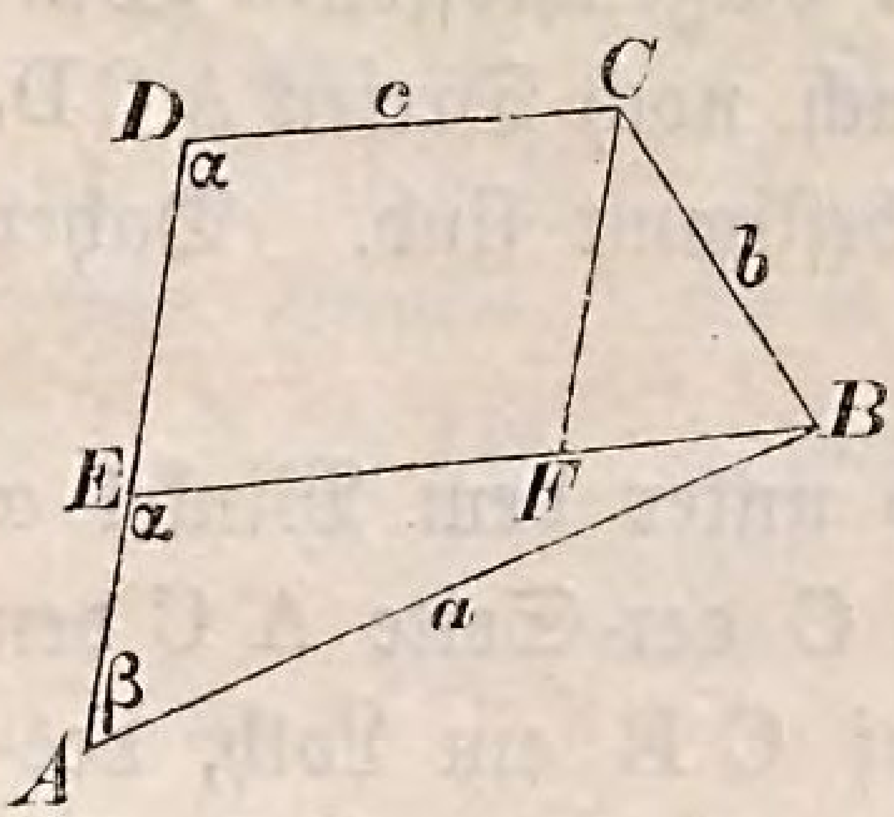


Fig. 188.

286. Aufgabe. Ein Viereck ABCD zu construiren, wenn drei Seiten A B = a, B C = b, C D = c, und zwei Winkel α und β, die an der vierten Seite liegen, gegeben sind.

Analysis. Es sei A B C D das verlangte Viereck, so ist, wenn B E || D C gezogen wird, Dreieck ABE bekannt, denn man hat A B = a, Winkel A = β und Winkel E = α. Wird ferner C F || A D gezogen, so ist auch Dreieck B C F bekannt, denn es ist B C = b, B F = B E — c und Winkel B F C = 2 R. — CFE = 2 R. — α. Durch die Punkte A, B, C und E und die aus C mit C F nach der verlängerten Linie A E gezogene Parallele ist das ganze Viereck bestimmt.

Construction. Man construire Dreieck A B E, sodaß A B = a, Winkel A = β und Winkel A E B = α wird, trage E F = c auf B E von E aus ein, und errichte auf B F das Dreieck B C F, in welchem B C = b, Winkel B F C = 2R. — α ist. Alsdann ziehe man von C aus mit B E eine Parallele nach der verlängerten Seite A E, so ist A B C D das gesuchte Viereck.

Beweis. Nach der Construction ist A B = a, B C = b, Winkel A = β, und, da C F mit D E und C D mit E F parallel läuft, so erhellt C D = E F = c und Winkel D = A E B = α.

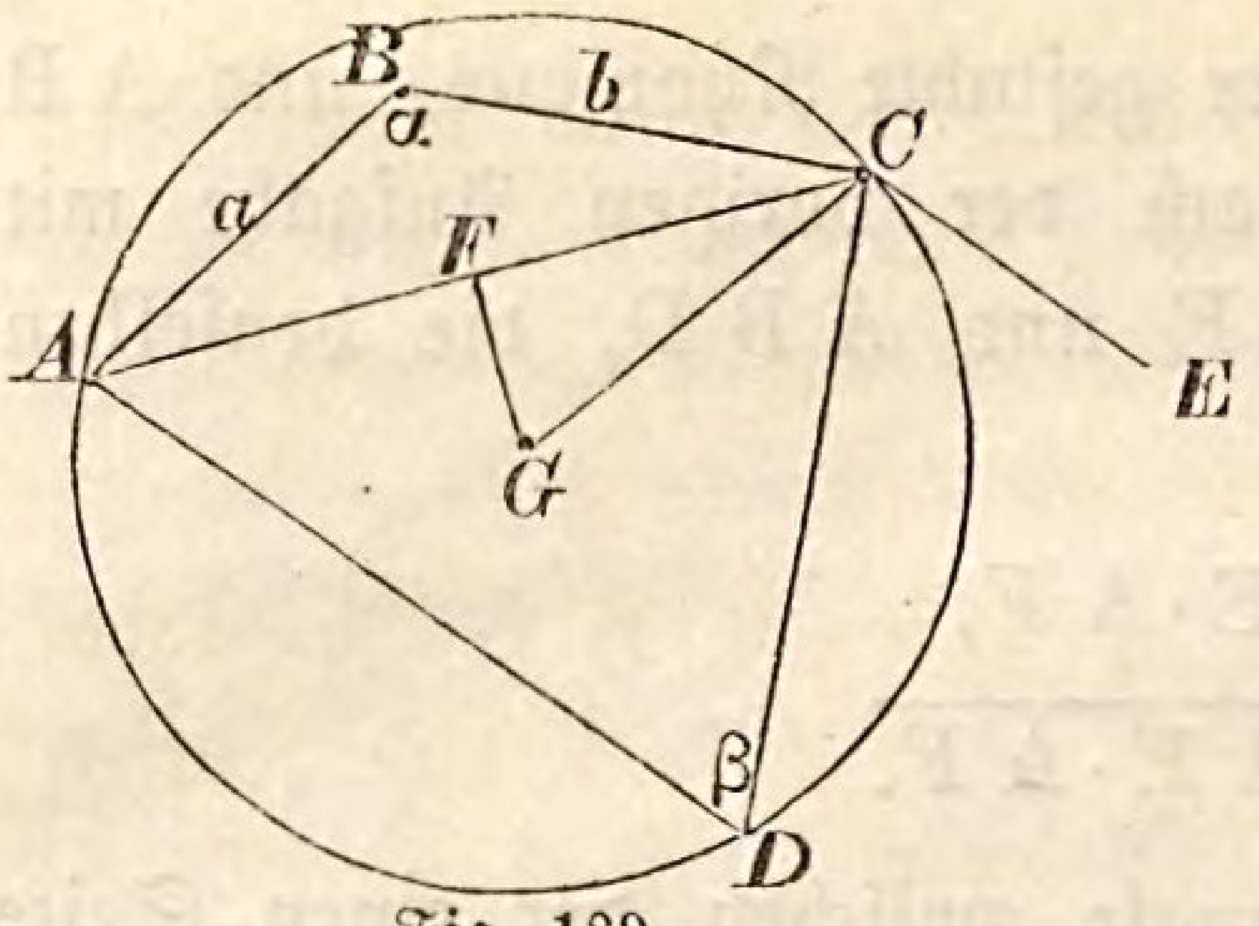


Fig. 189.

287. Aufgabe. Ein Viereck A B C D zu construiren, von welchem drei Seiten A B = a, B C = b, C D = c und zwei einander gegenüberliegende Winkel A B C = α, A D C = β gegeben sind.

Analysis. Angenommen, ABCD sei das verlangte Viereck. Wird A C gezogen, so ist Dreieck A B C bekannt, denn man kennt die Seiten A B und B C, sowie den eingeschlossenen Winkel, daher auch A C, und infolge dessen auch noch Dreieck ACD, von welchem zwei Seiten und ein Winkel bestimmt sind. Daher läßt sich nun das Viereck selbst zeichnen.

Construction. Man setze a und b unter dem Winkel α zusammen und ziehe A C, trage an Punkt C der Seite A C den Winkel A C E = β an; errichte in C auf C E ein Loth, desgleichen in F der Mitte von A C; verlängere beide Lothe bis zum Durchschnitt G, beschreibe mit C G einen Kreis, trage c von C aus als Sehne in denselben ein und verbinde den Endpunkt D derselben mit A, so ist A B C D das verlangte Viereck.

Beweis. Es ist per constr. A B = a, B C = b, Winkel A B C = α. Da ferner C E auf C G in C senkrecht steht, so ist C E Tangente des Kreises, folglich Winkel A C E = A D C = β. Nun ist auch C D = c und deshalb A B C D das verlangte Viereck.

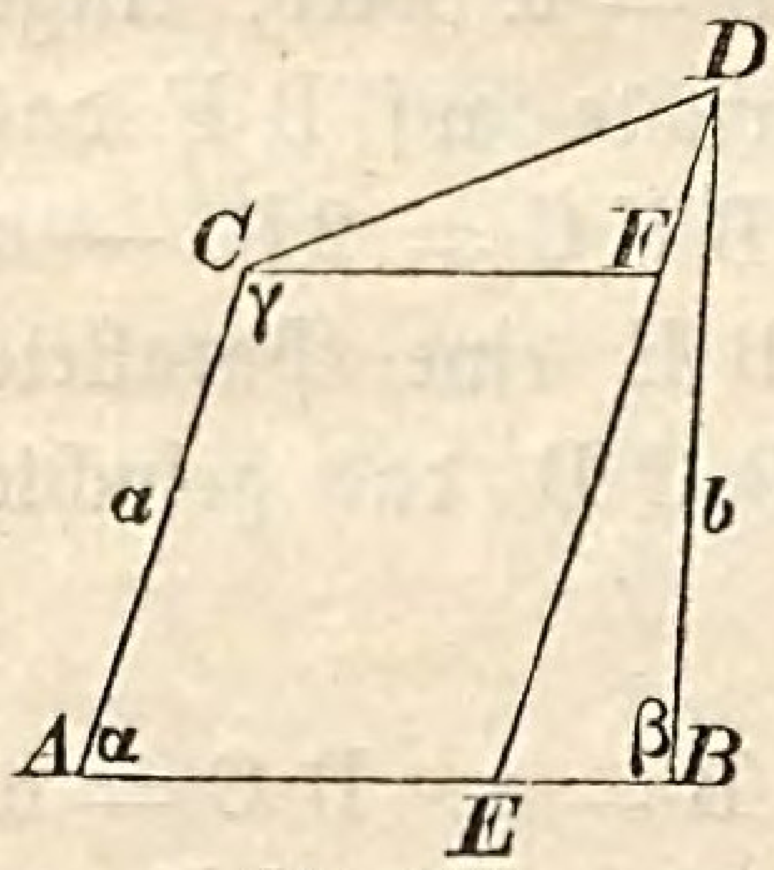


Fig. 190.

288. Aufgabe. Ein Viereck A B C D zu construiren, von welchem drei Winkel A = α, B = β, C = γ und zwei einander gegenüberliegende Seiten A C = a, B D = b gegeben sind.

Analysis. Angenommen, A B C D sei das gesuchte Viereck, so ist, wenn DE || AC gezogen wird, Dreieck B E D bekannt, denn man hat B D = b, Winkel B = β und B E D = α. Macht man E F = a und verbindet man F mit C, so ist Viereck ACFE

ein Parallelogramm, folglich die Richtung der Linie C F bekannt. Da ferner D E und A C parallel laufen, so ist Winkel C D E $= 2$ R. $- \gamma$, und deshalb die Richtung der Linie C D bekannt, sowie Punkt C als Durchschnitt von C F und C D. Dann ergibt sich auch Punkt A.

Construction. Man zeichne ein Dreieck B E D, sodaß B D $=$ b, Winkel B $= \beta$ und Winkel B E D $= \alpha$ wird; mache E F $=$ a; ziehe C F $\parallel$ B E; trage an D E in D einen Winkel C D E $= 2$ R. $- \gamma$ und verlängere den Schenkel D C bis zum Durchschnitt mit C F. Endlich construire man noch das Parallelogramm E F C A, so ist A B C D das verlangte Viereck.

Beweis. Es ist per constr. E F $=$ A C $=$ a, B D $=$ b und Winkel B $= \beta$. Weil A C mit D E parallel läuft, so ist ferner Winkel A $=$ B E D $= \alpha$ und Winkel A C D $= 180° -$ C D E $= 180° - (180° - \gamma) = \gamma$.

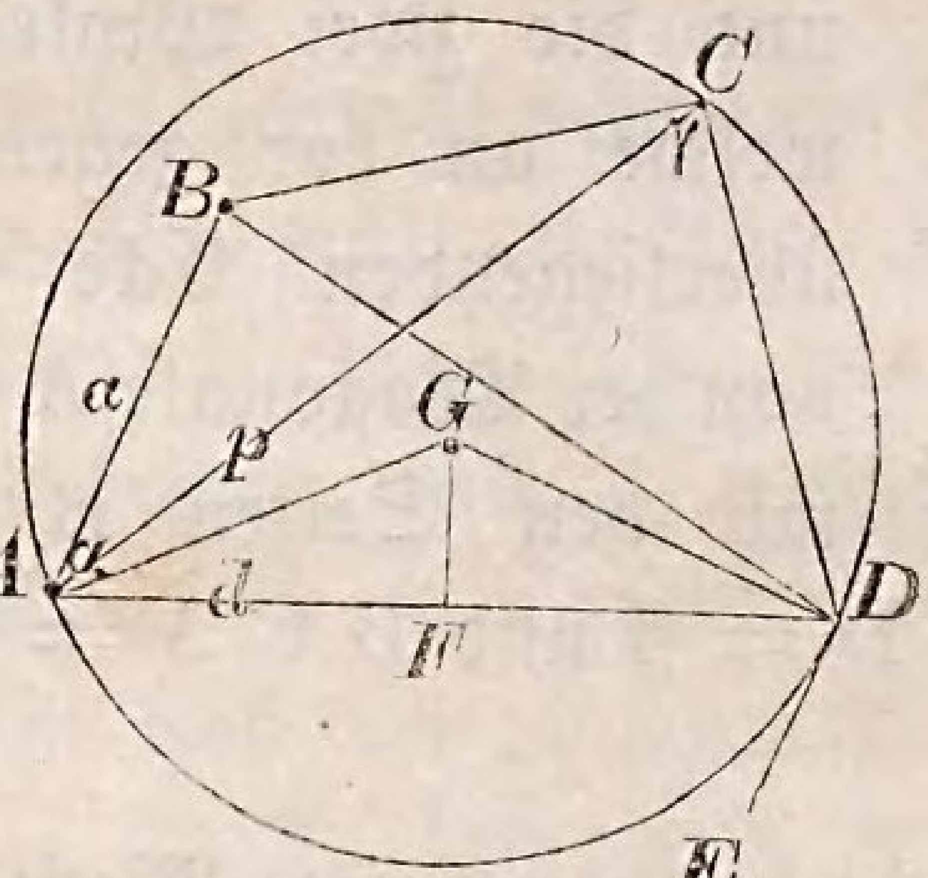


Fig. 191.

289. Aufgabe. Ein Viereck ABCD zu construiren, von welchem zwei zusammenstoßende Seiten A B $=$ a und A D $=$ d, der eingeschlossene Winkel D A B $= \alpha$, der gegenüberliegende Winkel D C B $= \gamma$ und die Diagonale, welche die Spitzen dieser Winkel verbindet, A C $=$ p gegeben sind.

Analysis. Es sei A B C D das gesuchte Viereck, so ist, wenn B D gezogen wird, Dreieck A B D bekannt, denn man kennt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und demzufolge auch B D. Betrachten wir nun im Dreieck B C D den Winkel B C D $= \gamma$ als Peripheriewinkel, so muß der Winkel A D E, den die Tangente des mit dem Radius A G zu umschreibenden Kreises mit A D bildet, auch $= \gamma$ sein. Wird die Peripherie dieses Kreises von A aus mit A C $=$ p geschnitten, so findet sich Punkt C, und durch Verbindung desselben mit A und D ergibt sich endlich das verlangte Viereck A B C D.

Construction. Man zeichne zuerst ein Dreieck A B D, sodaß AB $=$ a, AD $=$ d und der eingeschlossene Winkel B A D $= \alpha$ wird, trage alsdann an A D in A einen Winkel A D E $= \gamma$,

errichte im Punkte D der D E und im Halbirungspunkt F der A D Lothe, bis sich dieselben in G schneiden, und beschreibe um G mit A G einen Kreis. Hierauf schneide man von A aus mit einer Zirkelöffnung A C = p die Peripherie desselben und verbinde den Durchschnittspunkt C mit B und D, so ist ABCD das gesuchte Viereck.

Der Beweis ist in dem Vorhergehenden enthalten.

Anmerkung. Diese Aufgabe stimmt im Grunde genommen mit der in §. 287 überein.

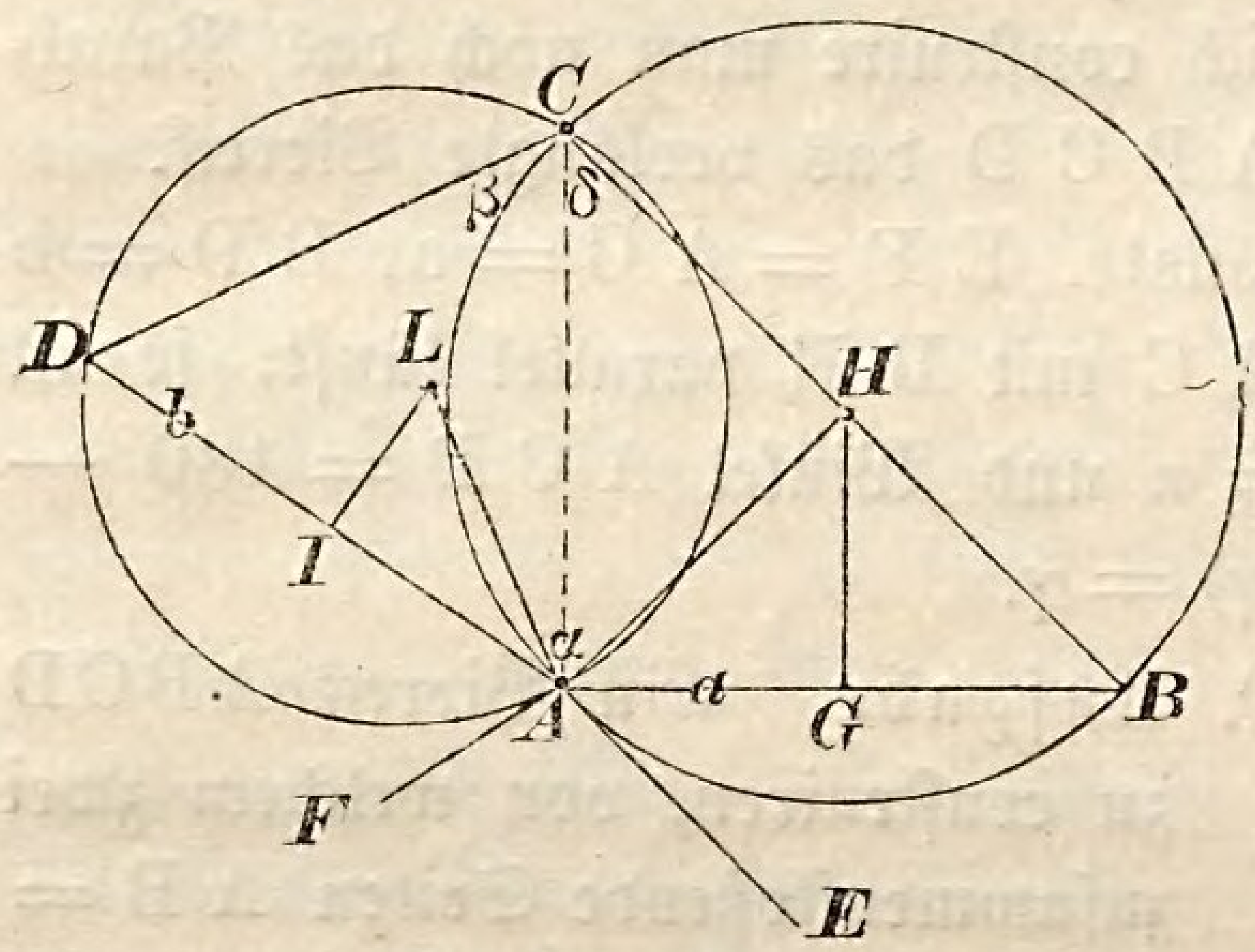


Fig. 192.

290. Aufgabe. Ein Viereck A B C D zu construiren, wenn zwei Seiten A B = a und A D = b, der eingeschlossene Winkel B A D = α und die zwei Winkel, welche an der gegenüberliegenden Ecke C von der Diagonale A C mit den Seiten B C und C D gebildet werden, A C D = β und B C A = δ gegeben sind.

Analysis. Angenommen, ABCD sei das verlangte Viereck, so lassen sich die Dreiecke A B C und A C D, welche bekannt sind, als Dreiecke im Kreise betrachten. Punkt C ergibt sich alsdann als Durchschnitt zweier Kreise, von denen die Seiten A B und A D Sehnen und die Schenkel A E und A F der in Punkt A angetragenen Winkel, B A E = δ und D A F = β, Tangenten sind. Oder aber man trägt die beiden Winkel β und δ an einander, wodurch man einen Winkel des Vierecks, B C D = β + δ erhält, der dem Winkel α gegenüberliegt, und verfährt dann in ähnlicher Weise.

Construction. Man setze zunächst A B = a, A D = b unter dem Winkel B A D = α zusammen und mache Winkel B A E = δ und D A F = β. Alsdann halbire man A B und A D und errichte in den Halbirungspunkten G und I Lothe, ebenso errichte man die Lothe A H und A L auf A E und A F.

Zuletzt beschreibe man aus den Durchschnittspunkten H und L mit G H und G I Kreise und verbinde den Durchschnitt C beider Kreise mit B und D, so ist A B C D das verlangte Viereck.

Beweis. Es ist per constr. A B = a, A D = b und Winkel B A D = α. Wird A C gezogen, so ist Winkel A C B = B A E = δ und A C D = D A F = β.

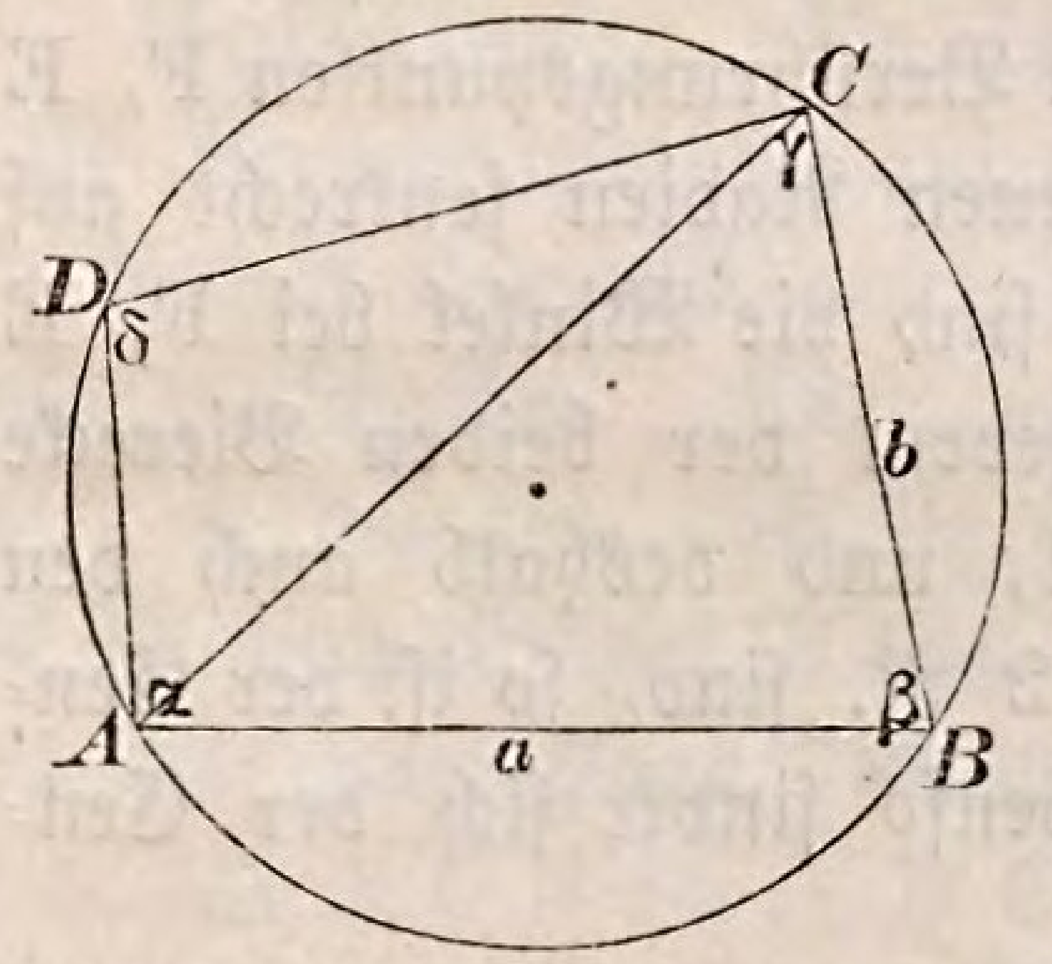


Fig. 193.

291. Aufgabe. Ein Viereck ABCD, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zu construiren, wenn zwei zusammenstoßende Seiten A B = a und B C = b und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben sind.

Analysis. Es sei A B C D das gesuchte Viereck im Kreise, so sind je zwei gegenüberstehende Winkel zusammen = 180°. Kennt man daher zwei an einer Seite liegende Winkel, so sind offenbar sämmtliche Winkel des Vierecks bekannt. Bezeichnen wir nun dieselben, von A ausgehend, mit α, β, γ und δ, und ziehen wir A C, so ist Dreieck A B C bekannt, denn wir kennen zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Wird A B C als ein Dreieck im Kreise betrachtet, so ergibt sich Punkt D als Durchschnitt der Peripherie und der Richtung des Schenkels A D (vom Winkel α).

Construction. Man trage an A B = a in A den Winkel α, und in B den Winkel β und mache den Schenkel B C = b, beschreibe um Dreieck A B C einen Kreis, dessen Peripherie den zweiten Schenkel des Winkels α in D schneidet, und verbinde D mit C, so ist A B C D das gesuchte Viereck. Oder man kann auch, da alle Winkel bekannt sind, an B C in C den Winkel γ antragen und den Schenkel C D so weit verlängern, bis er den Schenkel A D des Winkels α in D schneidet.

Der Beweis ist wieder in dem Vorhergehenden enthalten.

292. Aufgabe. Ein Viereck A B C D um einen Kreis zu zeichnen, dessen Radius = r bekannt ist, wenn außerdem noch zwei an einer Seite liegende Winkel

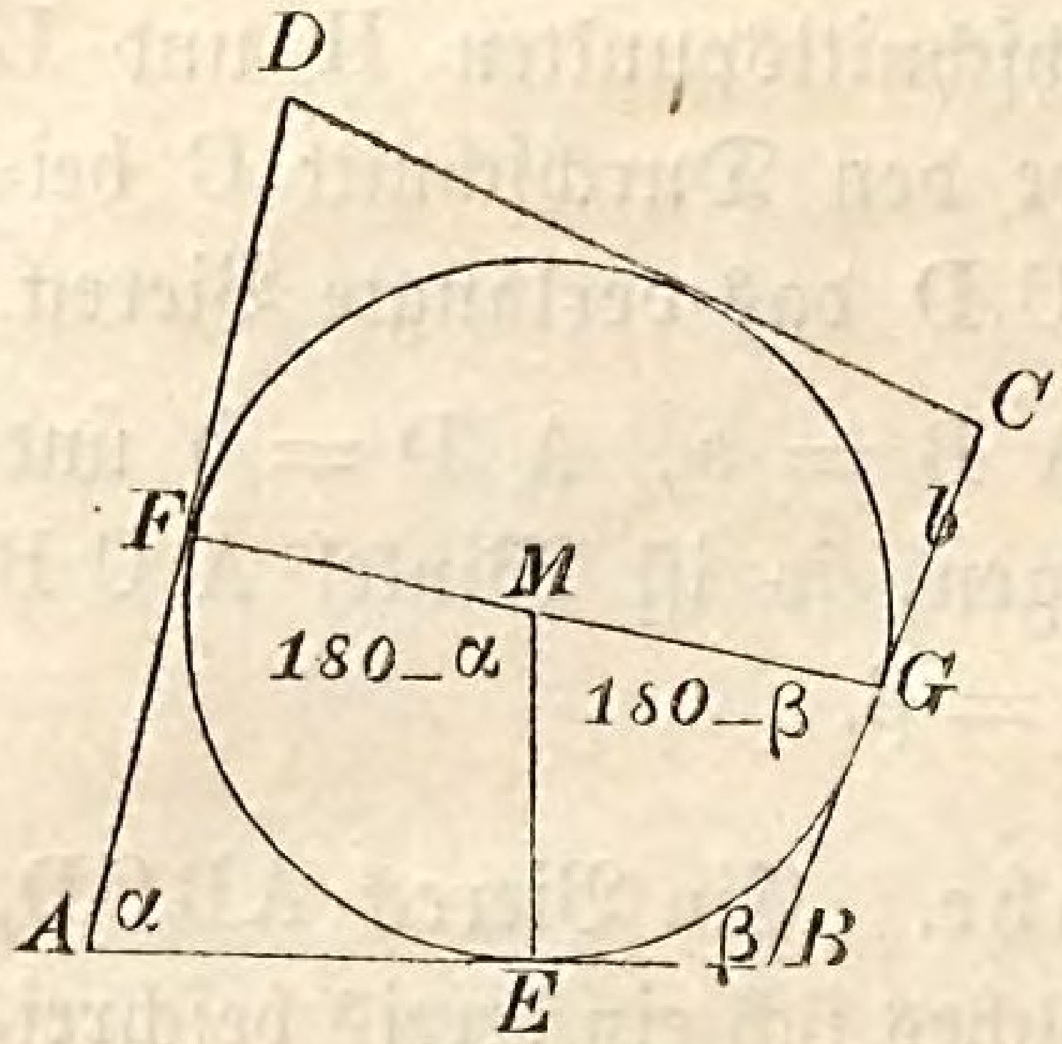


Fig. 194.

$A = \alpha$ und $B = \beta$ und eine dem Winkel β anliegende Seite B C = b gegeben sind.

Analysis. Es sei A B C D das verlangte Viereck. Da die Seiten desselben Tangenten des gegebenen Kreises sind, so stehen die vom Mittelpunkte M aus nach den Berührungspunkten F, E und G gezogenen Radien senkrecht auf ihnen, daher sind die Winkel bei F, E und G Rechte. Man kennt also in jedem der beiden Vierecke E A F M und E B G M drei Winkel, und deshalb auch den vierten. Da nämlich $\alpha + F\,M\,E = 2\,R.$ sind, so ist der Centriwinkel $F\,M\,E = 180^\circ - \alpha$, und ebenso findet sich der Centriwinkel $E\,M\,G = 180^\circ - \beta$.

Construction. Man zeichne in dem gegebenen Kreise die Centriwinkel $E\,M\,F = 180^\circ - \alpha$ und $E\,M\,G = 180^\circ - \beta$, lege durch E, F und G Tangenten, mache die durch G gehende Tangente B C = b und ziehe zuletzt aus C eine Tangente, welche die durch F gehende Tangente in D schneidet, so ist A B C D das verlangte Viereck.

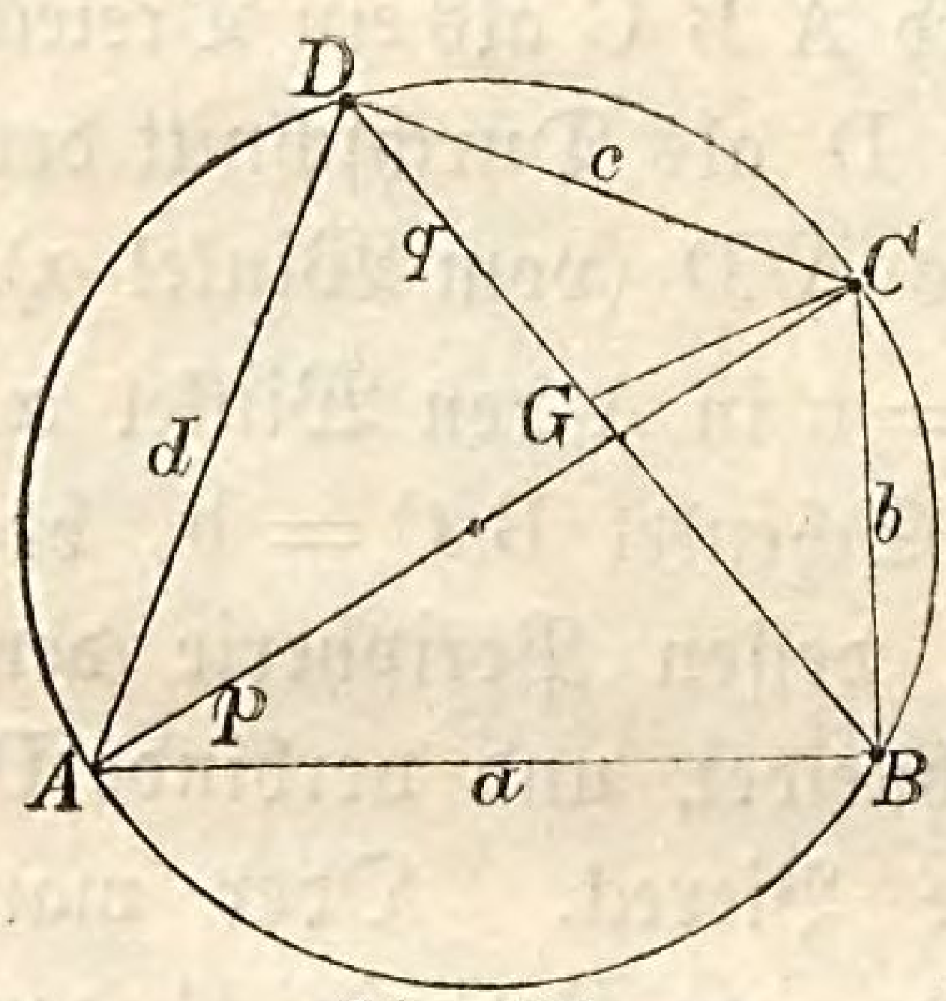


Fig. 195.

293. Aufgabe. Das Verhältniß der Diagonalen eines Vierecks ABCD im Kreise zu finden, wenn die vier Seiten A B = a, B C = b, C D = c und A D = d gegeben sind.

Auflösung. Die Diagonale A C sei = p und B D = q, so ist (nach Aufgabe 229, Zusatz)

$$\triangle\,A\,C\,D = \frac{c\,d\,p}{4\,r},\ \text{sowie}\ \triangle\,A\,B\,D = \frac{a\,d\,q}{4\,r}$$

$$\text{und}\ \triangle\,A\,B\,C = \frac{a\,b\,p}{4\,r}\quad \text{und}\quad \triangle\,B\,C\,D = \frac{b\,c\,q}{4\,r}.$$

Zählen wir die untereinander stehenden Dreiecke zusammen, so ergibt sich auf beiden Seiten das Viereck selbst. Daher ist

$$(a\,b + c\,d)\,p = (a\,d + b\,c)\,q,$$

$$\text{oder } p : q = a\,d + b\,c : a\,b + c\,d,$$

$$\text{auch } \frac{p}{q} = \frac{a\,d + b\,c}{a\,b + c\,d} \text{ oder } \frac{q}{p} = \frac{a\,b + c\,d}{a\,d + b\,c}.$$

294. Aufgabe. Zwischen dem Producte der Diagonalen p und q und den vier Seiten a, b, c und d eines Vierecks im Kreise, ABCD, eine Gleichung herzuleiten.

Auflösung. Da bereits die Winkel C D B und C A B (als Peripheriewinkel auf demselben Bogen) einander gleich sind, so können wir uns durch eine Hülfslinie sehr leicht ähnliche Dreiecke verschaffen. Wird nämlich aus C bis zur B D eine Linie C G so gezogen, daß die Winkel D C G und A C B gleich sind, so ist auch Winkel B C G = Winkel A C D, und dadurch erhalten wir zwei Paar ähnliche Dreiecke. Es ist nämlich

$$\triangle\, A\,C\,B \sim \triangle\, D\,C\,G \text{ und } \triangle\, A\,C\,D \sim \triangle\, B\,C\,G,$$

und jedes dieser beiden Paare ähnlicher Dreiecke gibt drei gleiche Quotienten, von denen aber diejenigen, in welchen die Hülfslinie C G vorkommt, nicht zu berücksichtigen sind, da wir, um den Zweck der Aufgabe bequem zu erreichen, höchstens Abschnitte der Diagonalen beachten dürfen. Demgemäß erhalten wir

$$p : a = c : D\,G \text{ oder } a\,c = p \cdot D\,G$$

$$\text{und } p : b = d : B\,G \text{ oder } b\,d = p \cdot B\,G.$$

Beide Gleichungen summirt geben

$$p \cdot (B\,G + D\,G) = a\,c + b\,d,$$

$$\text{oder } p \cdot q = a\,c + b\,d;$$

d. h. in jedem Viereck, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, ist das Product der beiden Diagonalen p und q stets gleich der Summe der Producte $a \cdot c$ und $b \cdot d$ aus den gegenüberliegenden Seiten. Diese Wahrheit ist unter dem Namen des Ptolemäischen Lehrsatzes bekannt.

295. Aufgabe. Die Diagonalen eines Vierecks im Kreise, p und q, in die vier Seiten desselben a, b, c und d auszudrücken.

Auflösung. Mit Hülfe der bereits gefundenen Gleichungen

$$\text{I. } \frac{p}{q} = \frac{a\,d + b\,c}{a\,b + c\,d} \quad \text{II. } \frac{q}{p} = \frac{a\,b + c\,d}{a\,d + b\,c}$$

$$\text{und III. } p\,q = a\,c + b\,d$$

läßt sich die Aufgabe sofort lösen. Wird nämlich die I. mit der III. multiplicirt, und dann die Quadratwurzel ausgezogen, so ergibt sich

$$p = \sqrt{\frac{(a\,c + b\,d)\,(a\,d + b\,c)}{a\,b + c\,d}}.$$

Auf dieselbe Weise findet sich aus der II. und III.

$$q = \sqrt{\frac{(a\,b + c\,d)\,(a\,c + b\,d)}{a\,d = b\,c}}.$$

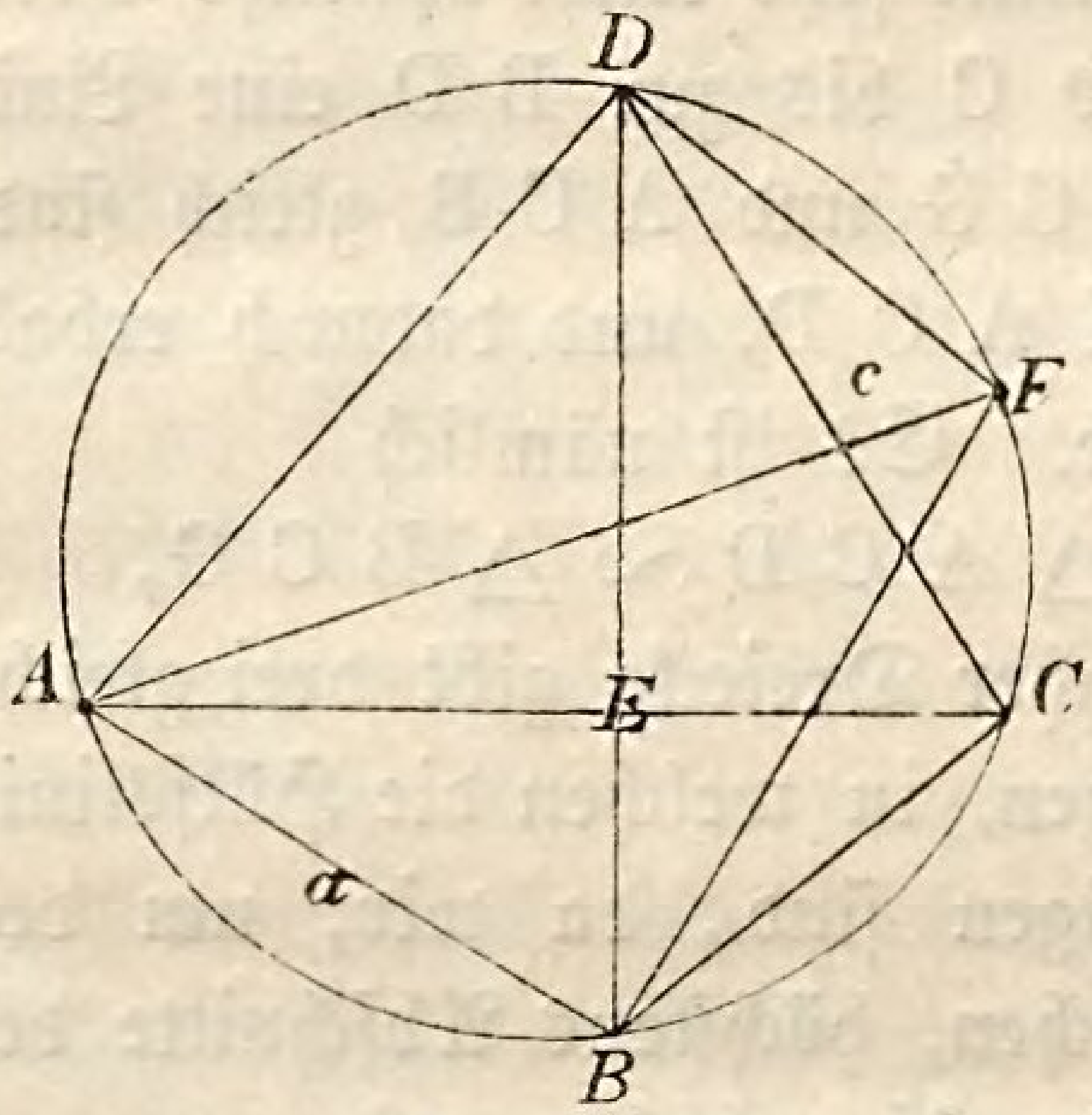


Fig. 196.

296. **Aufgabe.** Von einem Viereck im Kreise, A B C D, dessen Diagonalen sich rechtwinkelig schneiden sollen, sind die Winkel und zwei einander gegenüberliegende Seiten A B = a und C D = c bekannt; man soll den Durchmesser des umschriebenen Kreises A F = d finden.

Auflösung. Es sei A B C D das Viereck mit den gegebenen Stücken, und A F = d der Durchmesser des umschriebenen Kreises, so ist

Winkel A B F = Winkel A E D (als Rechte),

Winkel A F B = Winkel A D B (als Peripheriewinkel auf demselben Bogen)

und daher △ A B F ∾ △ A D E,

folglich Winkel B A F = Winkel C A D,

die als Peripheriewinkel auf gleichen Bogen oder auf gleichen Sehnen stehen müssen.

Es ist also D C = B F, und da in dem rechtwinkeligen Dreieck A B F

$$A\,F^2 = A\,B^2 + B\,F^2$$

ist, so findet sich sogleich

$$A\,F^2 = A\,B^2 + C\,D^2,$$

d. h. $d^2 = a^2 + c^2$

und $d = \sqrt{a^2 + c^2}$.

297. Aufgabe. Zwischen dem Durchmesser des Kreises und den vier Abschnitten der sich senkrecht schneidenden Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks eine Gleichung herzuleiten.

Auflösung. Wird in der vorigen Figur noch die Hülfslinie D F gezogen, so ergibt sich, weil die aus bezüglich denselben Theilen bestehenden Winkel B A C und D A F gleich sind,

$$B\,C = D\,F.$$

Es ist aber $A\,F^2 = A\,D^2 + D\,F^2 = A\,D^2 + B\,C^2$, und da man hat

$$A\,D^2 = A\,E^2 + D\,E^2$$

$$\text{und } B\,C^2 = B\,E^2 + C\,E^2,$$

$$\text{so findet sich } A\,F^2 = A\,E^2 + B\,E^2 + C\,E^2 + D\,E^2,$$

d. h. das Quadrat des Durchmessers ist gleich der Summe der Quadrate aus den vier Abschnitten der Diagonalen, oder, wie in der vorigen Aufgabe gefunden worden, gleich der Summe der Quadrate aus je zwei einander gegenüberliegenden Seiten.

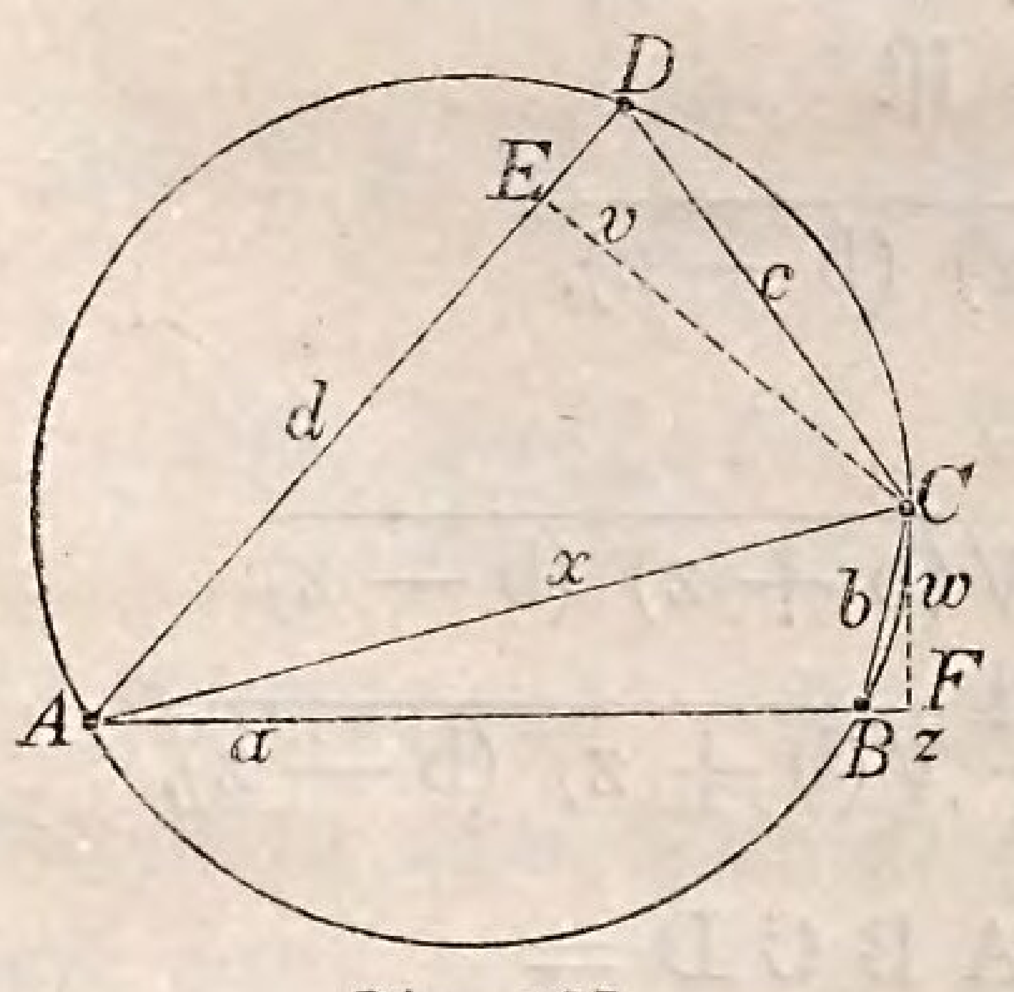


Fig. 197.

298. Aufgabe. Aus den vier Seiten eines im Kreise beschriebenen Vierecks den Flächeninhalt F zu finden.

Auflösung. Es sei A B = a, B C = b, C D = c und A D = d gegeben. Werden aus einem Punkt C des Umfangs Lothe nach E und F auf A D und A B oder deren Verlängerung gefällt, so sind die Dreiecke B F C und D E C einander ähnlich, weil sie außer dem rechten Winkel noch einen gleichen Winkel haben, nämlich Winkel C B F = A D C, von denen jeder den Winkel A B C zu 180° ergänzt. Bezeichnen wir das Stück B F mit z, so geben die beiden ähnlichen Dreiecke B C F und C D E die Proportion:

$$b : z = c : D\,E,$$

woraus sich findet $D\,E = \dfrac{c\,z}{b}$.

Wird ferner der Kürze wegen $AC = x$, $CF = w$ und $CE = v$ gesetzt, so können wir jedes der beiden Lothe w und v zweimal ausdrücken. Es ist nämlich

$$\text{I.}\quad v^2 = x^2 - (d - DE)^2 = c^2 - DE^2,$$

$$\text{II.}\quad w^2 = x^2 - (a + z)^2 = b^2 - z^2,$$

woraus folgt

$$\text{III.}\quad x^2 = c^2 + d^2 - 2\,d \cdot DE \quad \text{und} \quad \text{IV.}\quad x^2 = b^2 + a^2 + 2az.$$

Der Werth von $DE = \frac{cz}{b}$, in III. substituirt, gibt

$$\text{V.}\quad x^2 = c^2 + d^2 - \frac{2cdz}{b}.$$

Aus IV. und V. folgt unmittelbar die Gleichung

$$\text{VI.}\quad c^2 + d^2 - \frac{2cdz}{b} = b^2 + a^2 + 2az,$$

und hieraus erhält man

$$\text{VII.}\quad z = \left(\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{ab + cd}\right) \cdot \frac{b}{2}.$$

Ferner ist $w^2 = b^2 - z^2 = (b + z)(b - z)$,

$$\text{also VIII.}\quad w = \sqrt{(b + z)(b - z)};$$

und da $b : w = c : v$ sich verhält, so ist

$$\text{IX.}\quad v = \frac{cw}{b} = \frac{c}{b}\sqrt{(b + z)(b - z)}.$$

Dann findet sich auch

$$\text{Dreieck } ABC = \tfrac{1}{2}\,aw = \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{(b + z)(b - z)}$$

$$\text{und Dreieck } ACD = \tfrac{1}{2}\,dv = \tfrac{1}{2}\,\frac{cd}{b}\sqrt{(b + z)(b - z)},$$

folglich der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD =$

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{ab + cd}{b} \cdot \sqrt{(b + z)(b - z)}.$$

Wird in diese Formel der Werth von z aus VII. gesetzt, so findet sich zunächst

$$b + z = b\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{ab + cd}\right)\right]$$

$$= b\left(\frac{2ab + 2cd + c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)}\right),$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{ab + cd}\right) = \frac{b}{2}\left[\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{ab + cd}\right];$$

$$\text{und } b - z = b\left[\frac{1-(c^2+d^2-a^2-b^2)}{2(ab+cd)}\right]$$
$$= b\left(\frac{2ab+2cd-c^2-d^2+a^2+b^2}{2(ab+cd)}\right),$$
$$= \frac{b}{2}\left[\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{ab+cd}\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{ab+cd}\right).$$

Die letzten Ausdrücke für $b+z$ und $b-z$ ergeben sich, wenn man die Summen und Differenzen der angezeigten Quadrate in Factoren zerlegt, was bei sorgfältiger Beachtung der Vorzeichen nicht schwer auszuführen ist.

Zieht man nun aus $(b+z)(b-z)$ die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$\sqrt{b^2-z^2} = \frac{b}{2(ab+cd)}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

und daher findet sich

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)},$$

welche Formel, wenn $a+b+c+d=u$ gesetzt wird, sich verwandelt in

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(u-2a)(u-2b)(u-2c)(u-2d)},$$

$$\text{oder } F = \sqrt{\left(\frac{u}{2}-a\right)\left(\frac{u}{2}-b\right)\left(\frac{u}{2}-c\right)\left(\frac{u}{2}-d\right)}.$$

299. **Aufgabe.** Den Halbmesser r eines Vierecks im Kreise aus den vier Seiten zu bestimmen. (Fig. 195.)

Auflösung. Durch die Diagonale $AC = p$ wird das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, von denen jedes seinem Inhalt nach durch den Radius des umschriebenen Kreises, die Diagonale p und zwei Seiten des Vierecks genau bestimmt ist. Man hat nämlich

$$\triangle ABC = \frac{abp}{4r},$$

$$\triangle ACD = \frac{cdp}{4r}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen ergibt sich der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD =$

$$F = \frac{(ab+cd)p}{4r};$$

und daraus findet man $r = \frac{(a\,b + c\,d)\,p}{4\,F}$.

Durch Substitution der Werthe von F (aus Nr. 298) und p (aus Nr. 295) verwandelt sich diese Gleichung in

$$r = \sqrt{\frac{(a\,b + c\,d)\,(a\,c + b\,d)\,(a\,d + b\,c)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}.$$

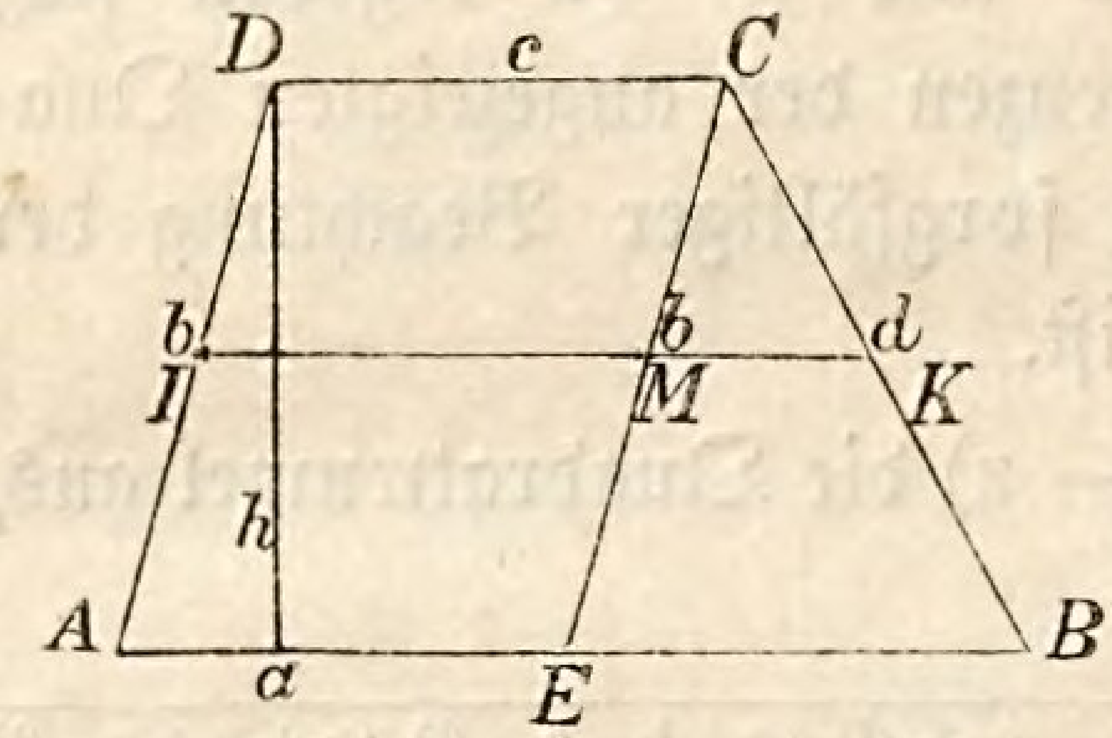


Fig. 198.

300. Aufgabe. Aus den vier Seiten eines Trapezes, a, b, c und d den Inhalt I zu finden.

Auflösung. Da C D || E A sein muß, so erhält man, wenn EC || AD gezogen wird, ein Parallelogramm A E C D und ein Dreieck B C E, in welchem letztern B E = a — c, B C = d und E C = b ist. Demnach ist der Inhalt dieses Dreiecks (nach Nr. 228) =

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a-c+b+d)\,(a-c+b-d)\,(a-c-b+d)\,(-a+c+b+d)},$$

und da stets der Inhalt F gefunden wird, wenn man das Product aus der Höhe und der halben Grundlinie bestimmt, so ergiebt sich die Höhe des Dreiecks, also auch des Trapezes =

$$h = \frac{2\,F}{a - c},$$

und der Inhalt des Trapezes =

$$I = \tfrac{1}{2}\,(a + c)\,h = \left(\frac{a + c}{a - c}\right)F.$$

Daher ist

$$I = \frac{(a+c)}{4(a-c)}\sqrt{(a-c+b+d)\,(a-c+b-d)\,(a-c-b+d)\,(-a+c+b+d)}.$$

Zusatz. Der Inhalt des Trapezes wird allemal gefunden, wenn man die Höhe h des Trapezes mit dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Parallelen A B und C D multiplicirt. Halbirt man A D und E C in I und M, so ist I M mit A E und C D parallel und, weil E C || A D ist, I M = C D und K M = ½ B E, folglich I K = C D + ½ (A B — A E) = C D + ½ (A B — C D) = ½ (C D + A B), und daher der Inhalt des Trapezes = I K · h.

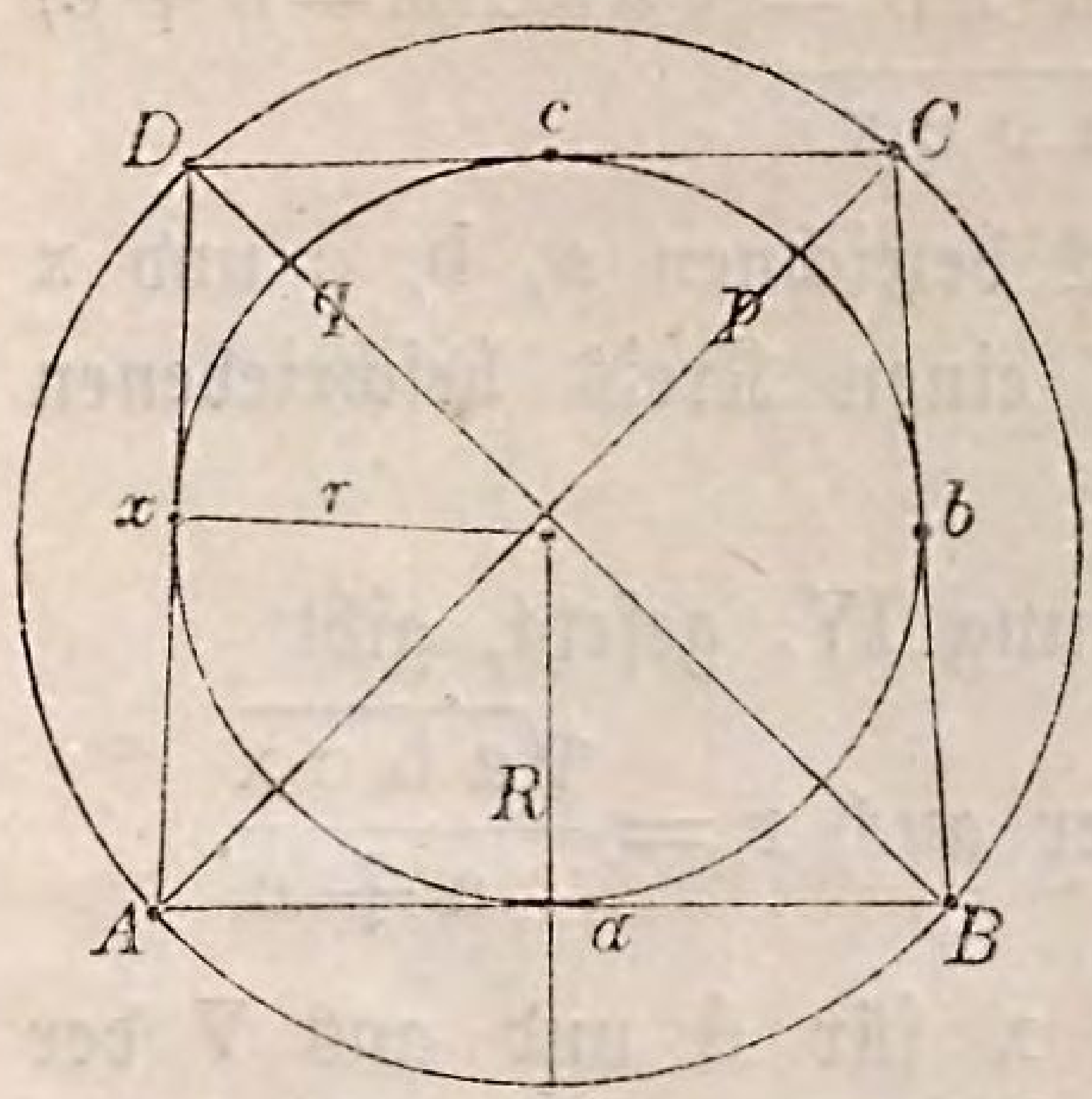


Fig. 199.

301. Aufgabe. Von einem Viereck A B C D, das um und in einen Kreis beschrieben ist, sind drei Seiten $AB = a$, $BC = b$ und $CD = c$ gegeben; man soll die vierte Seite x, den Inhalt des Vierecks $= F$, den Radius r des eingeschriebenen und den Radius R des umschriebenen Kreises, sowie die Diagonalen $AC = p$ und $BD = q$ bestimmen.

Auflösung. Weil die beiden Paare gegenüberstehender Seiten in jedem Viereck um den Kreis einander gleich sein müssen, so hat man zunächst

$$b + x = a + c,$$

woraus sogleich

$$\text{I. } x = a + c - b,$$

gefunden wird.

Zieht man ferner nach den Berührungspunkten der Seiten mit der Peripherie des eingeschriebenen Kreises den Radius r, so wird dadurch das Viereck in vier Dreiecke zerlegt, deren Höhe $= r$ ist, sodaß man erhält

$$\text{II. } (a + b + c + x)\, r = 2\, F.$$

Durch Substitution des Werthes von x (aus I) verwandelt sich diese Gleichung in

$$\text{III. } (a + c)\, r = F,$$

woraus

$$\text{IV. } r = \frac{F}{a + c}$$

gefunden wird.

Da das Viereck auch im Kreise beschrieben ist, so ist sein Inhalt

$$F = \tfrac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+x)\ (a-b+c+x)\ (a+b-c+x)\ (a+b+c-x)},$$

welche Gleichung, wenn der Werth von x aus I. substituirr wird, gibt

$$\text{V. } F = \tfrac{1}{4}\sqrt{2c(2a-2b+2c)\,2a\cdot 2b} = \sqrt{abc(a-b+c)}$$
$$= \sqrt{abcx.}$$

In diesem letztern Wurzelausdruck bezeichnen a, b, c und x die vier Seiten eines in und um einen Kreis beschriebenen Vierecks.

Der Werth von F, in die Gleichung IV. gesetzt, gibt

$$\text{VI. } r = \frac{\sqrt{abc(a-b+c)}}{a+c}, \text{ oder auch } r = \frac{\sqrt{abcx}}{a+c}.$$

Nach Aufgabe 299 ist hier, wenn x für d und aus V der Werth von F in die Formel gesetzt wird,

$$\text{VII. } R = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ax+bc)(ab+cx)(ac+bx)}{abcx}},$$

während nach I.

$$x = a + c - b$$

bekannt ist.

Nach Aufgabe 295 findet sich endlich noch:

$$\text{VIII. } p = \sqrt{\frac{(ax+bc)(ac+bx)}{ab+cx}}$$

$$\text{und IX. } q = \sqrt{\frac{(ab+cx)(ac+bx)}{ax+bc}}.$$

Wird in die Formeln für R, p und q der angegebene Werth von x substituirt, so erhält man

$$R = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(a^2+ac-ab+bc)(ab+ac-bc+c^2)(ab+ac+bc-b^2)}{abc(a-b+c)}},$$

$$p = \sqrt{\frac{(a^2-ab+ac+bc)(ab+ac-b^2+bc)}{ab+ac-bc+c^2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{(ab+ac-bc+c^2)(ab+ac-b^2+bc)}{a^2-ab+ac+bc}}.$$

Somit wären jetzt alle gesuchten Stücke in die drei Seiten a, b und c ausgedrückt. Die Vergleichung der letzten drei Formeln mit den bereits gefundenen, in denen der Ausdruck x vorkommt, zeigt, daß es bequemer ist, denselben in den Formeln beizuhalten, selbst nach dem x = a — b + c gefunden worden.

Anmerkung. Ist $a = 8$, $b = 6$, $c = 1$ gegeben, so ist $x = 8 + 1 - 6 = 3$; der Flächeninhalt $F = \sqrt{8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12$; der Radius des eingeschriebenen Kreises $r = \frac{12}{8 + 1} = \frac{4}{3}$ und der Radius des umschriebenen Kreises $R = \frac{1}{48} \sqrt{(24 + 6)\ (48 + 3)\ (8 + 18)} = \frac{1}{48} \sqrt{30 \cdot 51 \cdot 26} = \frac{1}{8} \sqrt{5 \cdot 17 \cdot 13}$, während für die Diagonalen $p = \sqrt{\frac{(24 + 6)\ (8 + 18)}{48 + 3}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 26}{51}} = 2\sqrt{\frac{5 \cdot 13}{17}}$ und $q = \sqrt{\frac{(48 + 3)\ (8 + 18)}{24 + 6}} = \sqrt{\frac{51 \cdot 26}{30}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 13}{5}}$ gefunden wird.

302. Aufgabe. Es ist gegeben eine Figur, sowie der Flächeninhalt derselben $= I$; man soll die Linie x finden, die als Maß zu Grunde gelegt worden ist.

Auflösung. Um einen zweiten Ausdruck für den Inhalt I zu erhalten, nehmen wir eine beliebige Linie a als Einheit des Längenmaßes an, also a^2 als Einheit für das Flächenmaß, und bestimmen damit den Flächeninhalt der Figur. Angenommen, derselbe sei $= F \cdot a^2$, so ist

$$I\,x^2 = F\,a^2;$$

$$\text{also } x = a\sqrt{\frac{F}{I}}.$$

Anmerkung. Wenn $I = 10000$ gegeben und $F = 529$ gefunden worden, so ist $\sqrt{\frac{F}{I}} = \sqrt{\frac{529}{10000}} = \frac{23}{100}$; also das Maß $x = \frac{23}{100}\,a$; d. h. man hat, um den Maßstab zu erhalten, für welchen der Inhalt der Figur gerade I wird, die angenommene Linie a in 100 Theile zu theilen und 23 derselben als Einheit für das Längenmaß zu nehmen.

Zehnter Abschnitt.

Von einigen mechanischen Constructionen, die nur zum Theil auf geometrischen Wahrheiten beruhen.

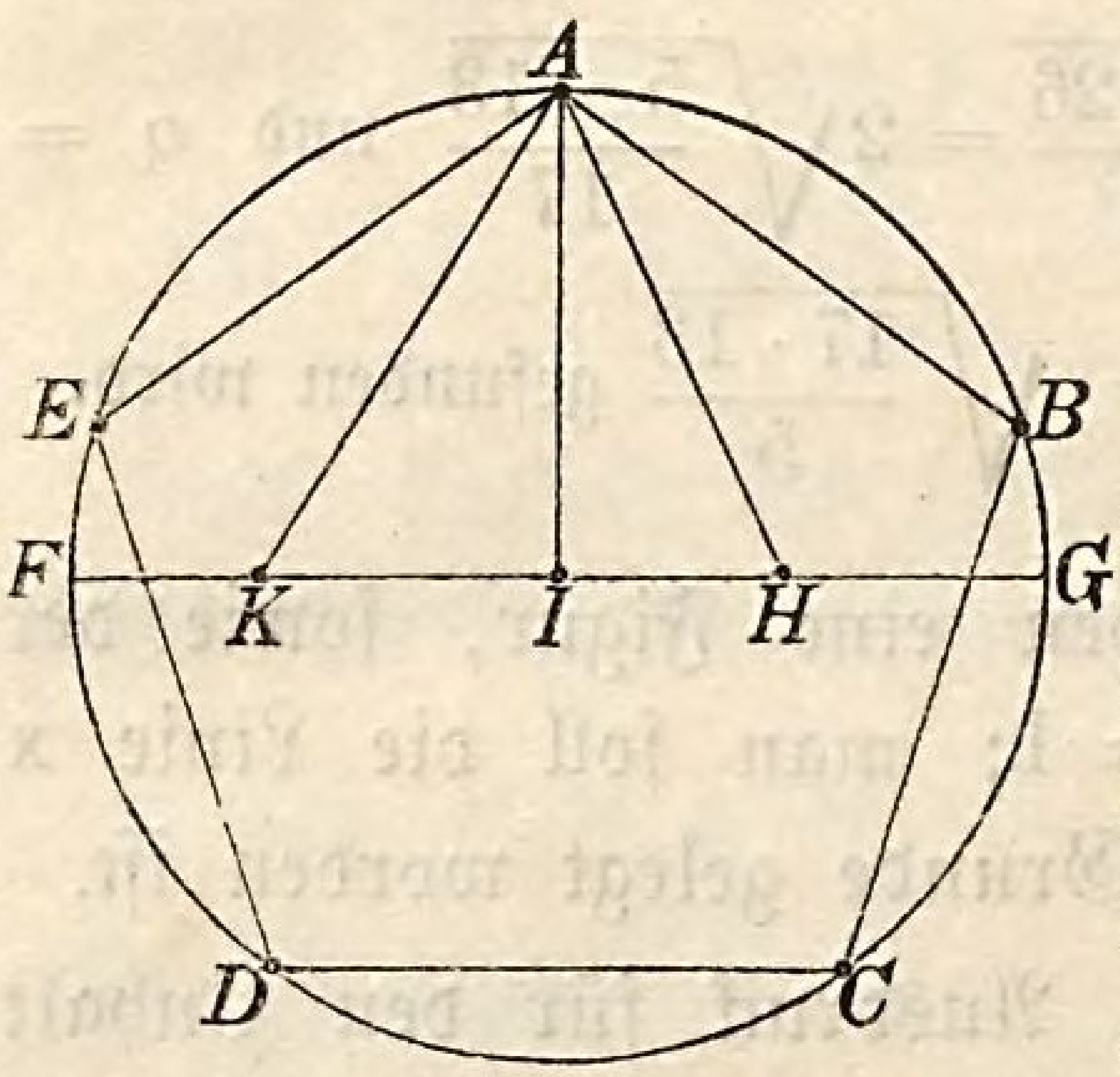


Fig. 200.

303. Aufgabe. Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis einzuschreiben.

Construction. Man ziehe den Durchmesser F G, errichte auf der Mitte von F G senkrecht den Radius A I, halbire den Radius I G in H, verbinde H mit A und schneide von H aus K H = A H ab und ziehe A K; so ist K A die Seite des gesuchten Fünfecks.

Beweis. Wird der Radius des Kreises $= r$ gesetzt, so ist sowol A I als auch $G I = r$ und (per constr.) $H I = \frac{1}{2} r$. Demnach findet sich in dem rechtwinkeligen Dreieck A I H die Hypotenuse $A H = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$; und da $K H = A H$ gemacht worden, so ist auch $H K = \frac{r}{2}\sqrt{5}$. Ferner ist $I K = H K - H I = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$; folglich in dem rechtwinkeligen Dreiecke A I K die Hypotenuse $A K = \sqrt{A I^2 + K I^2} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} r^2 (-1 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} r^2 (6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; und dies ist der bereits in Aufgabe 185 gefundene Ausdruck für die Seite des eingeschriebenen regulären Fünfecks.

304. Aufgabe. Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, von welchem die Seite = C D gegeben ist.

Construction. Man errichte auf der Mitte von C D ein Loth $F H = C D$, verlängere die Linie C D um so viel, daß

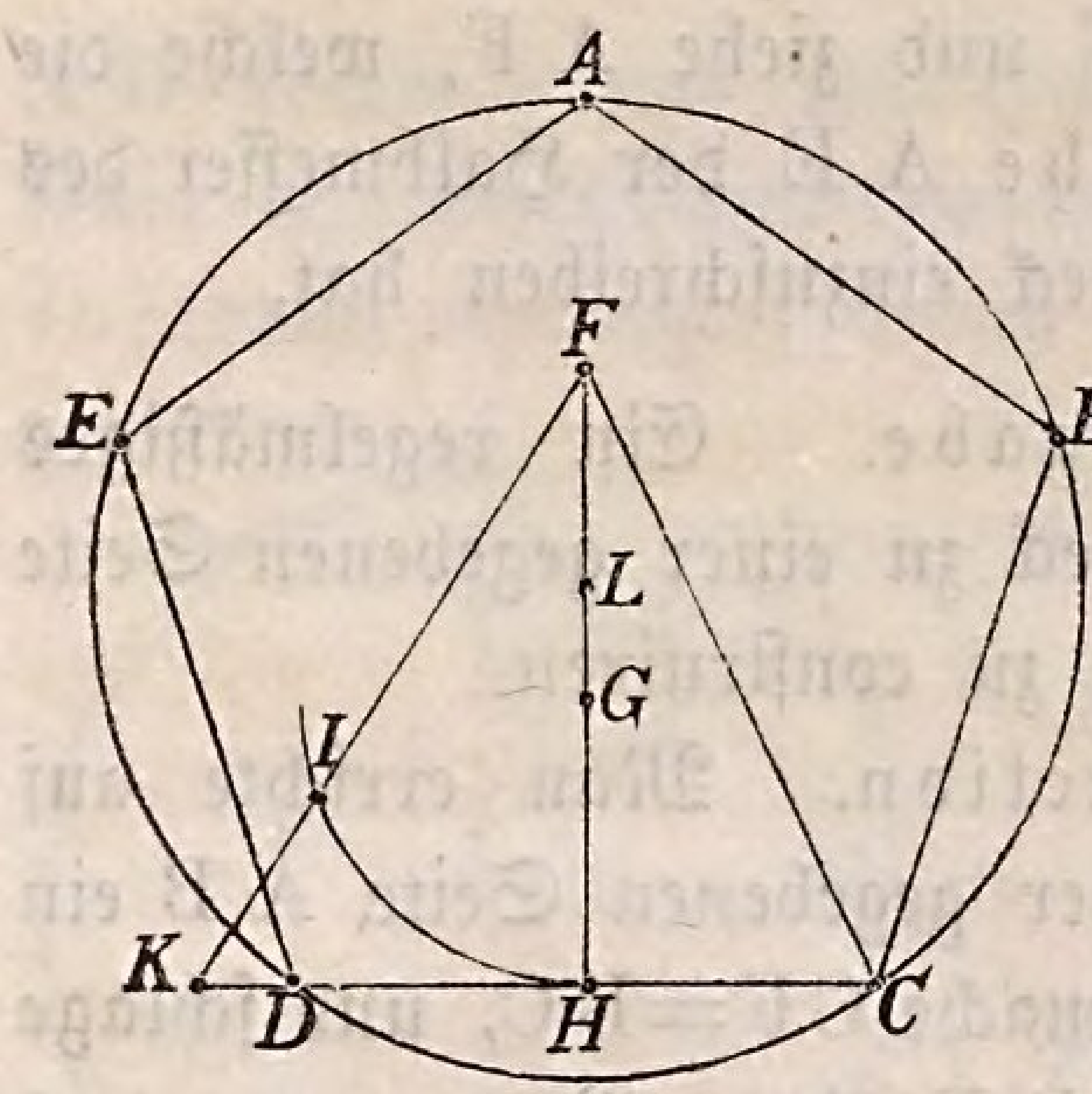


Fig. 201.

C K = C F wird, verbinde K mit F, schneide von H aus GH = DH ab und schneide damit von G aus die F K in I, so ist F I der Radius des Kreises, in welchen das Fünfeck zu zeichnen ist. Um den Mittelpunkt L des Kreises zu finden, construire man mit I F über C D ein gleichschenkeliges Dreieck D L C.

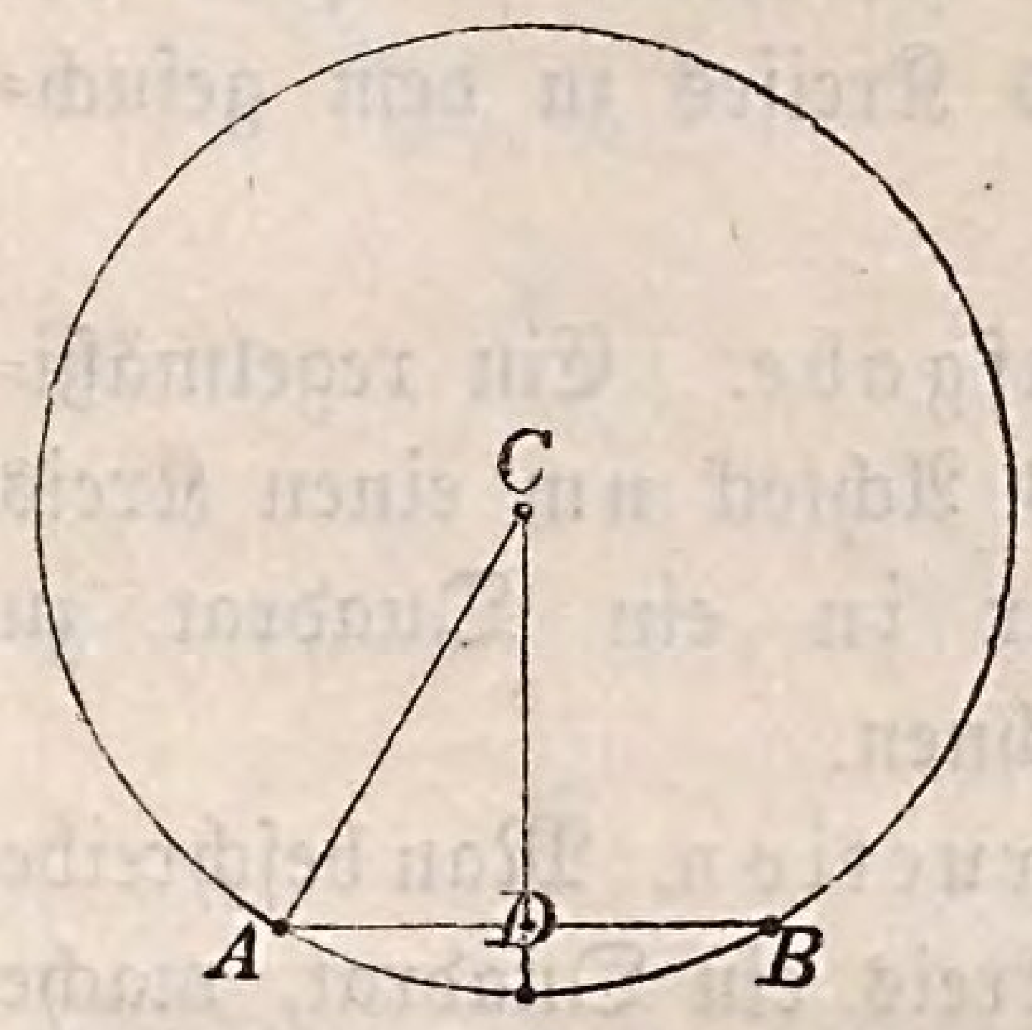


Fig. 202.

305. Aufgabe. Ein regelmäßiges Siebeneck in einen Kreis zu zeichnen.

Auflösung. Man trage den Radius A C in die Peripherie, d. h. man zeichne eine Sehne A B = A C, und errichte in der Mitte von AB ein Loth bis zum Mittelpunkt C, so ist C D nahezu die Seite des verlangten Siebenecks.

306. Aufgabe. Auf einer gegebenen Seite ein regelmäßiges Siebeneck zu errichten.

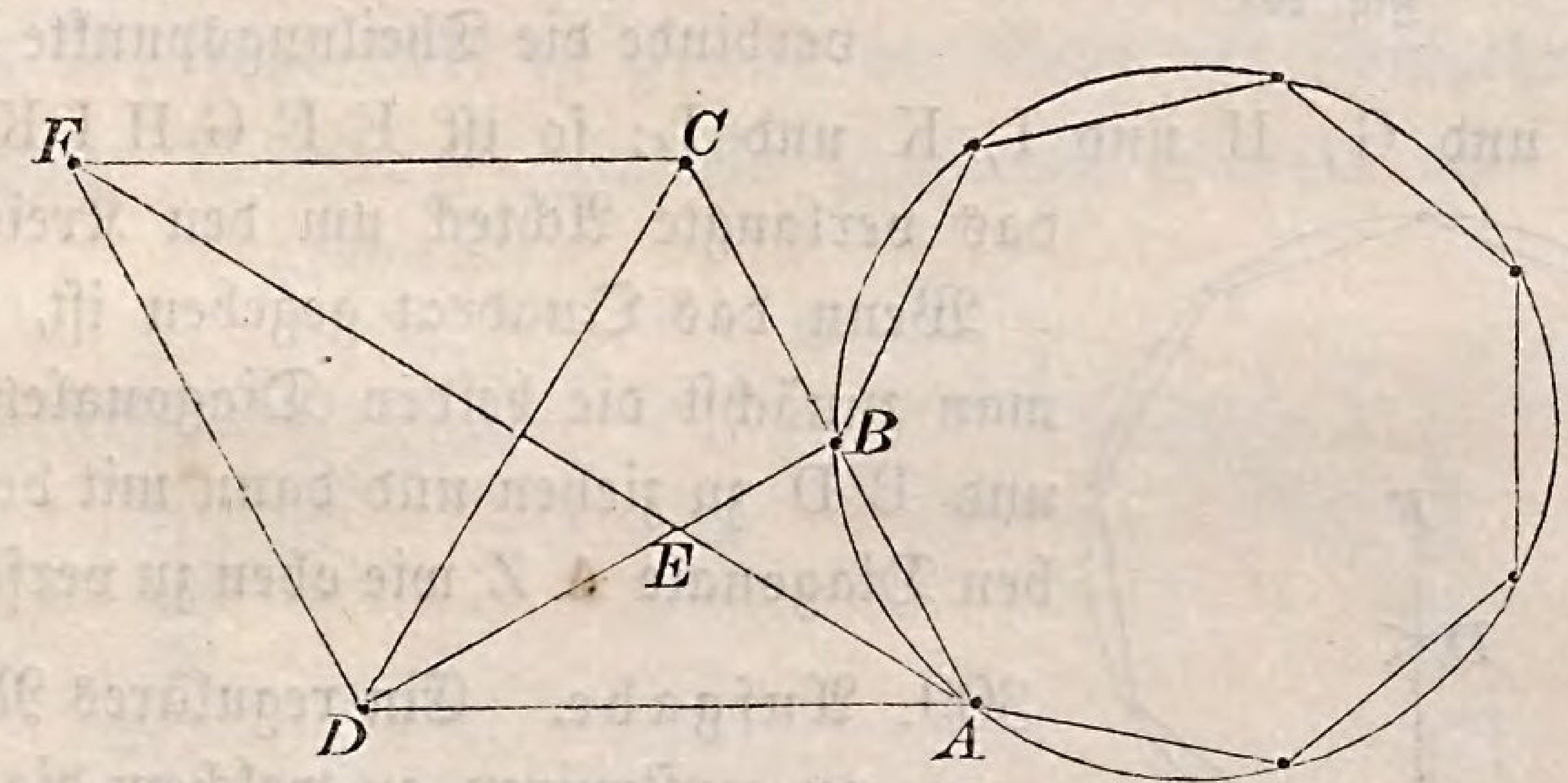


Fig. 203.

Construction. Man verlängere die gegebene Seite A B um sich selbst, sodaß A C = 2 × A B ist, errichte über A C ein gleichseitiges Dreieck A C D, verbinde B mit D, errichte über

C D ein gleichseitiges Dreieck C D F und ziehe A F, welche die B D in E schneidet: so ist sehr nahe A E der Halbmesser des Kreises, in welchen man das Siebeneck einzuschreiben hat.

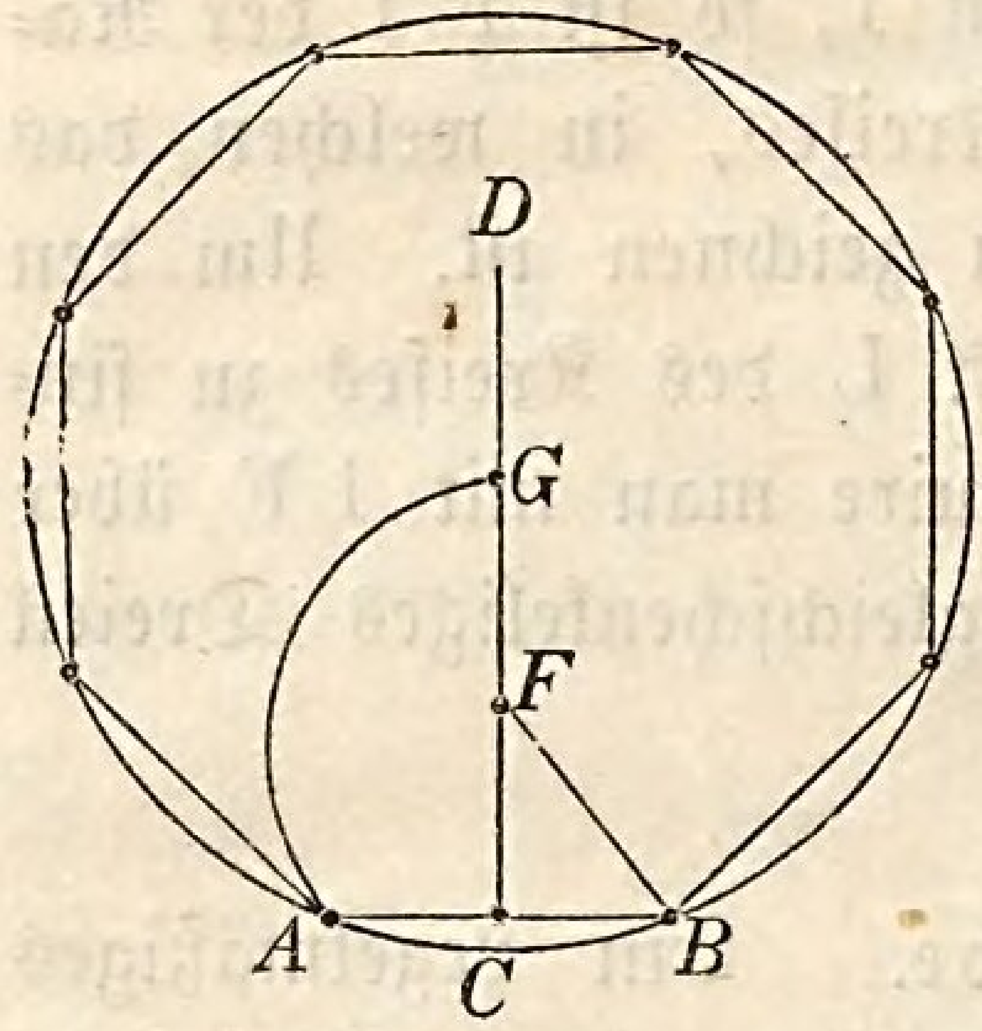


Fig. 204.

307. Aufgabe. Ein regelmäßiges Achteck zu einer gegebenen Seite A B zu construiren.

Construction. Man errichte auf der Mitte der gegebenen Seite A B ein Loth C D, mache CF=BC, und schlage aus F mit B F einen Bogen, der das Loth C D in G schneidet: so ist G der Mittelpunkt des Kreises zu dem gesuchten Achteck.

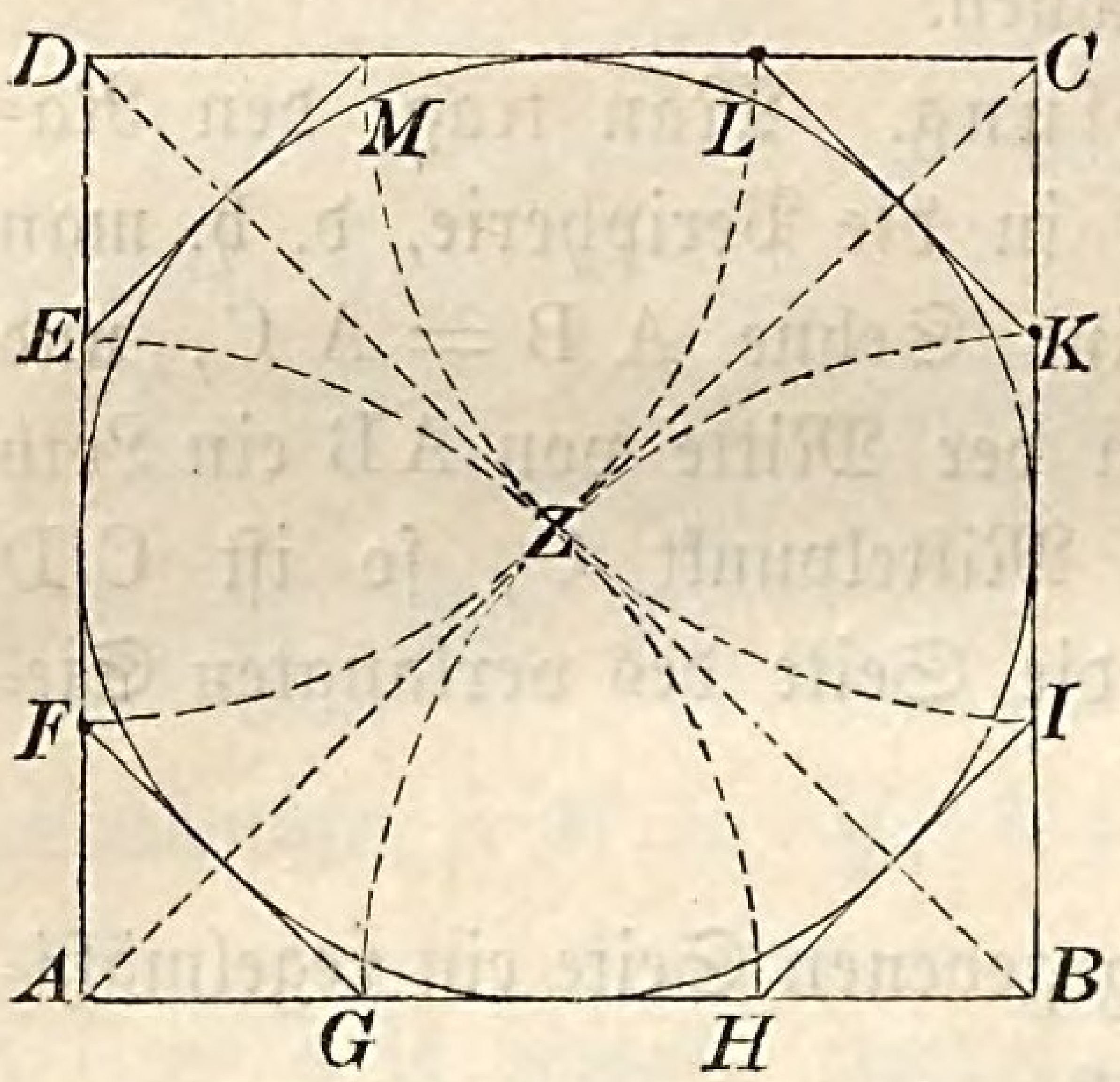


Fig. 205.

308. Aufgabe. Ein regelmäßiges Achteck um einen Kreis oder in ein Quadrat zu zeichnen.

Construction. Man beschreibe um den Kreis ein Quadrat, mache aus den Ecken desselben, A, B, C und D, mit dem Radius A Z auf die der jedesmaligen Ecke anliegenden beiden Seiten Einschnitte und verbinde die Theilungspunkte E und M, F und G, H und I, K und L: so ist E F G H I K L M das verlangte Achteck um den Kreis.

Wenn das Quadrat gegeben ist, so hat man zunächst die beiden Diagonalen A C und B D zu ziehen und dann mit der halben Diagonale A Z wie oben zu verfahren.

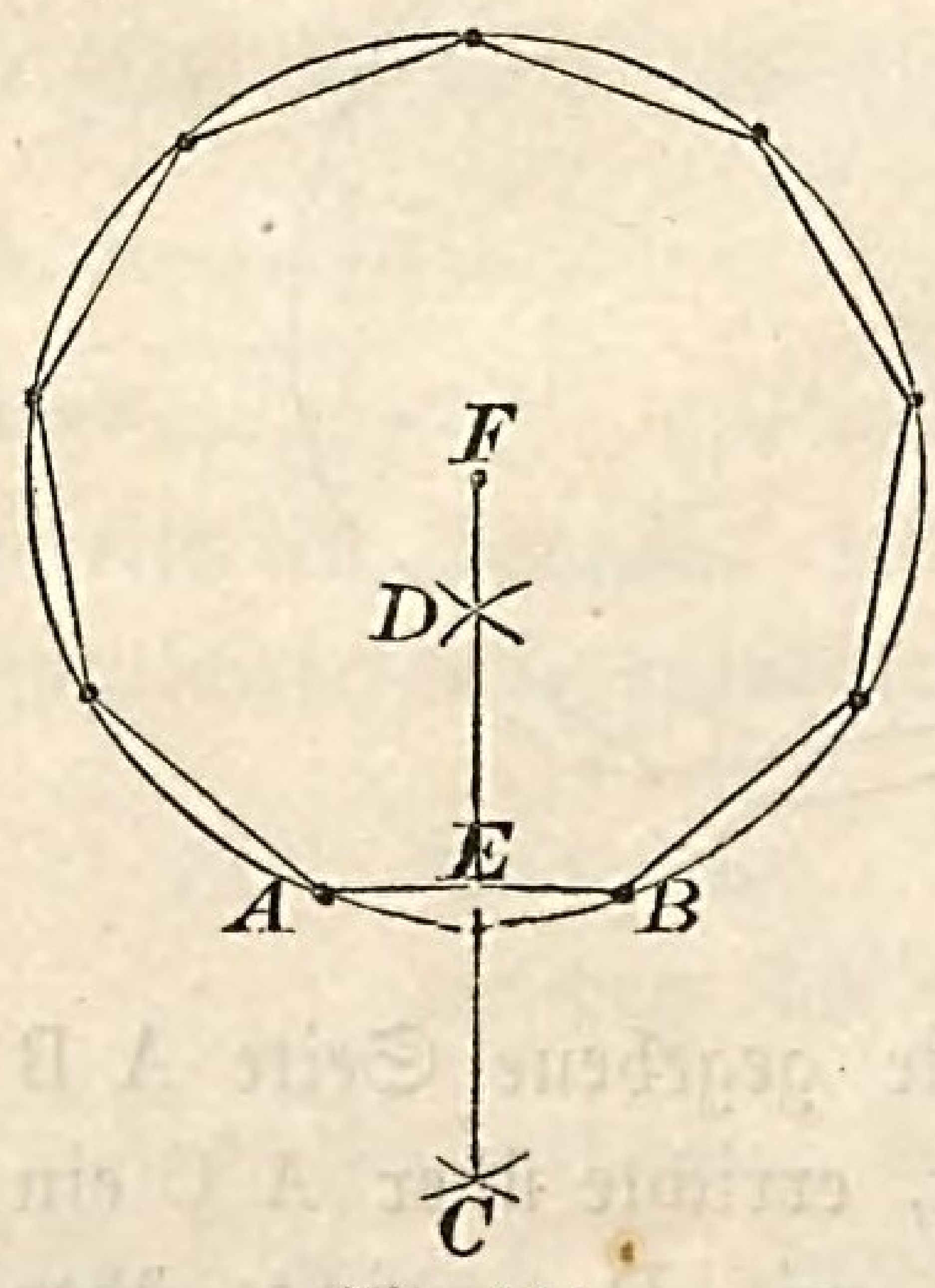


Fig. 206.

309. Aufgabe. Ein reguläres Neuneck zu construiren, zu welchem die Seite gegeben ist.

Construction. Man halbire die gegebene Seite A B in E, indem man aus A und B mit einer Zirkelöffnung AD=

A B oberhalb und unterhalb der A B Bogen schlägt, und verbinde die Durchschnittspunkte C und D. Wird hierauf D E über D hinaus verlängert, sodaß D F = B E wird, so ist B F nahezu (ein wenig zu klein) der Radius des Kreises zum verlangten Neuneck.

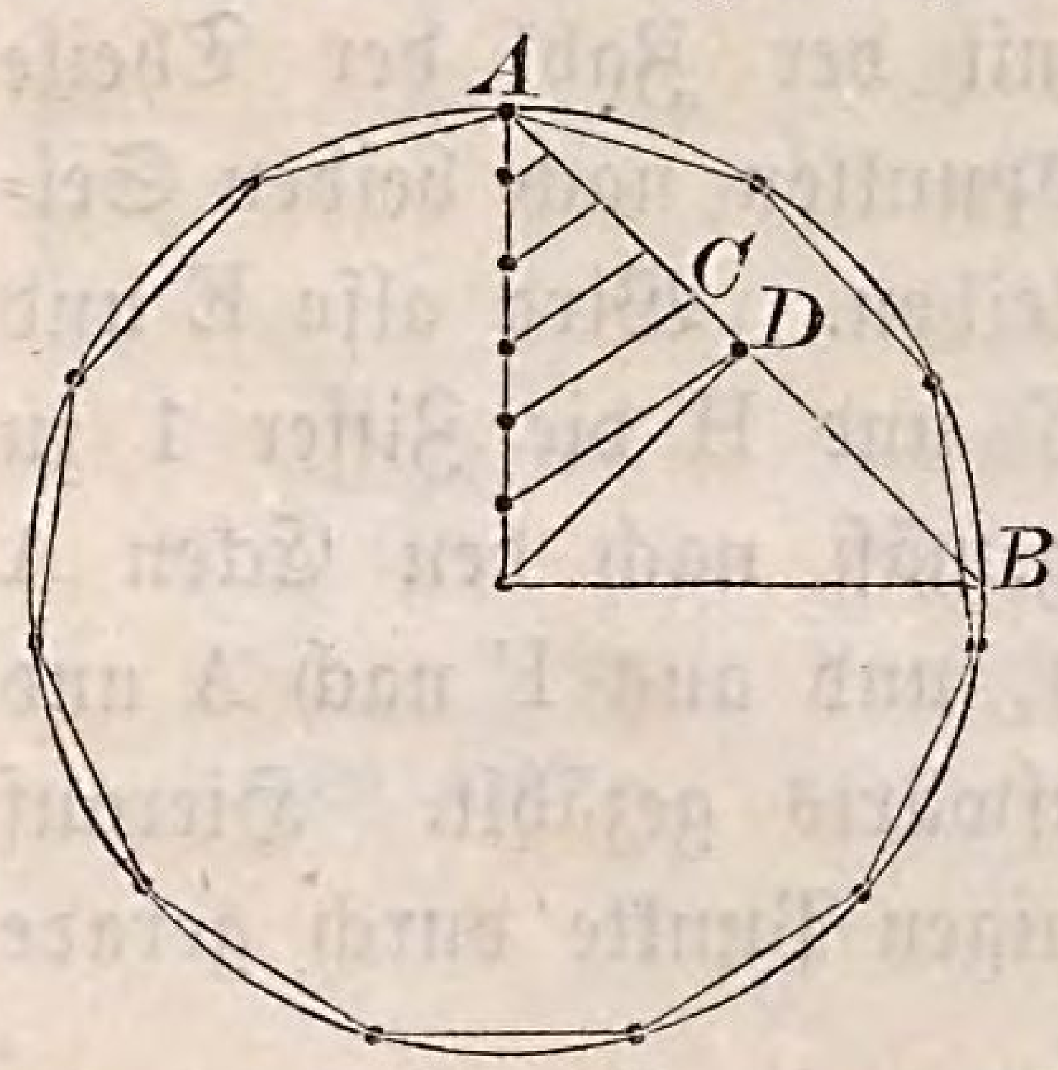


Fig. 207.

310. Aufgabe. Ein regelmäßiges Elfeck zu zeichnen.

Auflösung. Man ziehe A B, die Sehne des Quadranten, halbire sie in D und theile A D in fünf gleiche Theile, so ist A C oder $\frac{4}{5} \times$ A D ziemlich genau die Seite des gesuchten Elfecks.

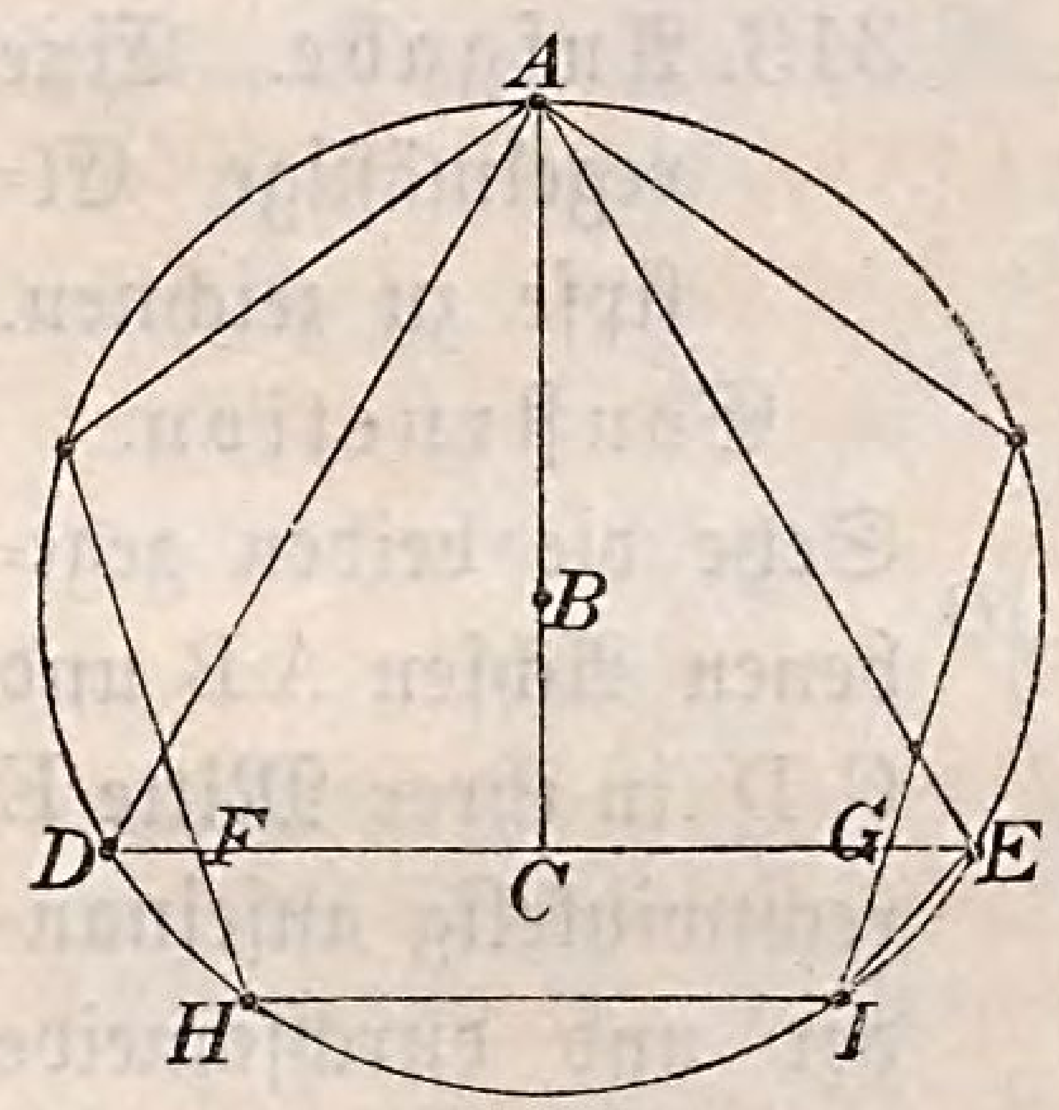


Fig. 208.

311. Aufgabe. Die Seite des regelmäßigen Neunecks und Funfzehnecks im gegebenen Kreise zu finden.

Construction. Man zeichne in den Kreis ein regelmäßiges Dreieck und Fünfeck, sodaß sie mit einer Ecke A zusammentreffen, und ziehe aus A durch den Kreismittelpunkt B auf die Grundlinie des regulären Dreiecks, D E, die Linie A C, so ist F C oder C G ziemlich genau die Seite des verlangten Neunecks (nur etwas zu groß). Jedoch E I oder D H ist genau die Seite des Funfzehnecks.

312. Aufgabe. In ein gegebenes Rechteck eine Ellipse zu zeichnen.

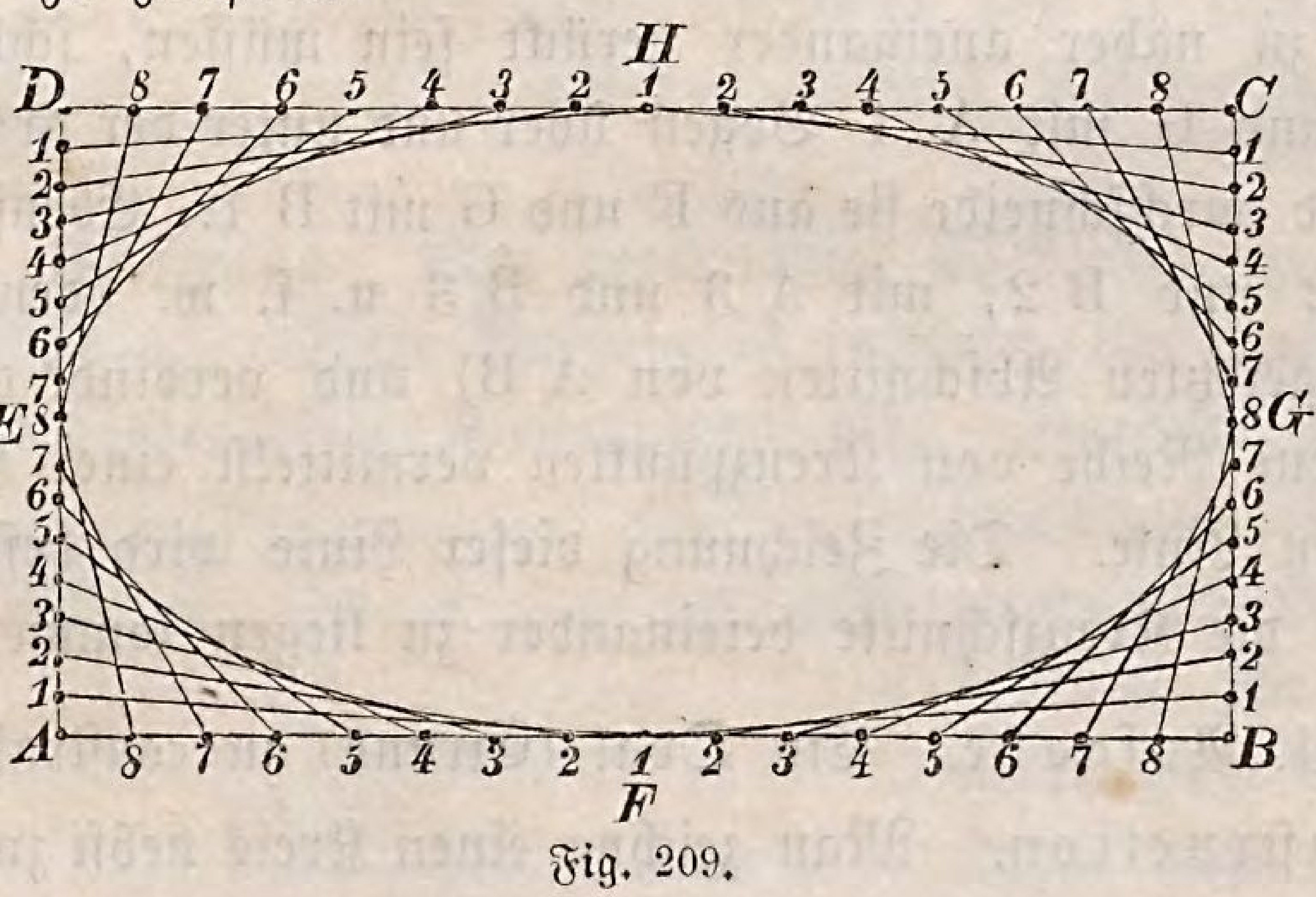


Fig. 209.

Ausführung. Halbire die Rechtecksseiten in E, F, G und H, theile jede Hälfte derselben in eine beliebige Anzahl (z. B. 8) gleicher Theile, und numerire sie, bei dem einen Seitenpaare mit 1 aufsteigend und bei dem andern mit der Zahl der Theile (z. B. 8) absteigend aus den Theilungspunkten nach beiden Seiten der Ecken zu, die ohne Nummer bleiben. Wird also E und G mit 8 bezeichnet, so hat man zu F und H die Ziffer 1 zu setzen. Von E und G aus wird demgemäß nach den Ecken A und D, bezüglich B und C hin abwärts, und aus F nach A und B, sowie aus H nach C und D zu aufwärts gezählt. Hierauf verbinde in jedem Viertel die gleichnamigen Punkte durch gerade Linien, so entsteht die verlangte Ellipse.

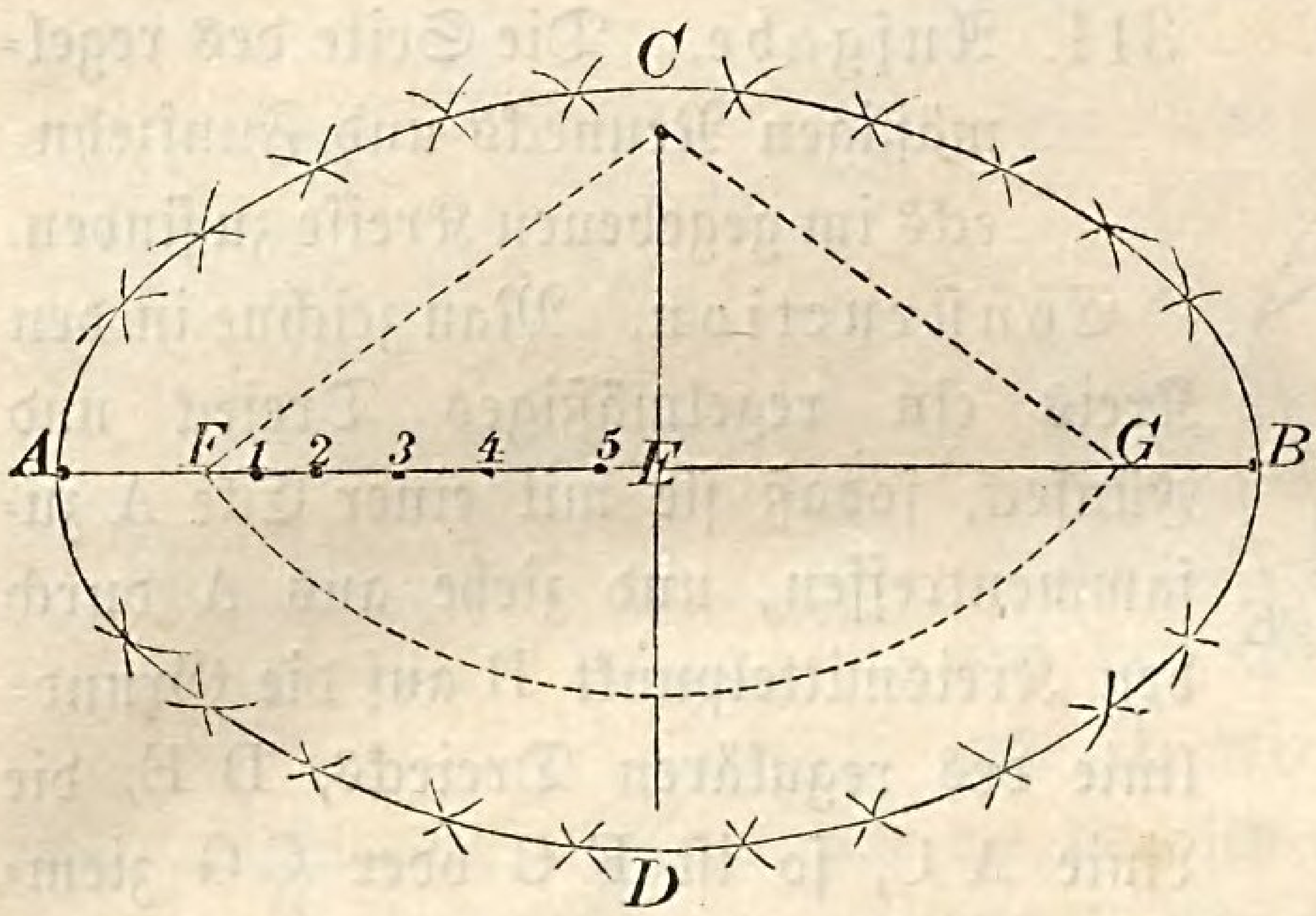


Fig. 210.

313. Aufgabe. Eine regelmäßige Ellipse zu zeichnen.

Construction. Setze die beiden gegebenen Achsen AB und CD in ihrer Mitte E rechtwinkelig aufeinander und durchschneide mit der halben großen Achse AE, aus einem Endpunkt C der kleinen Achse, die Linie AB in F und G, welche Punkte Brennpunkte genannt werden. Zwischen F und E bestimme eine beliebige Anzahl Punkte: 1, 2, 3 u. s. w., die jedoch nach F zu näher aneinander gerückt sein müssen, schlage dann aus F und G mit A 1 Bogen über und unter der großen Achse AB, und durchschneide sie aus F und G mit B 1. Ebenso verfahre mit A 2 und B 2, mit A 3 und B 3 u. s. w. (den jedesmal entgegengesetzten Abschnitten von A B) und verbinde die dadurch entstandene Reihe von Kreuzpunkten vermittelst einer fortlaufend gebogenen Linie. Die Zeichnung dieser Linie wird desto leichter, je näher die Kreuzschnitte beieinander zu liegen kommen.

314. Aufgabe. Ein Oval (Eirund) zu construiren.

Construction. Man zeichne einen Kreis nebst zwei Durch-

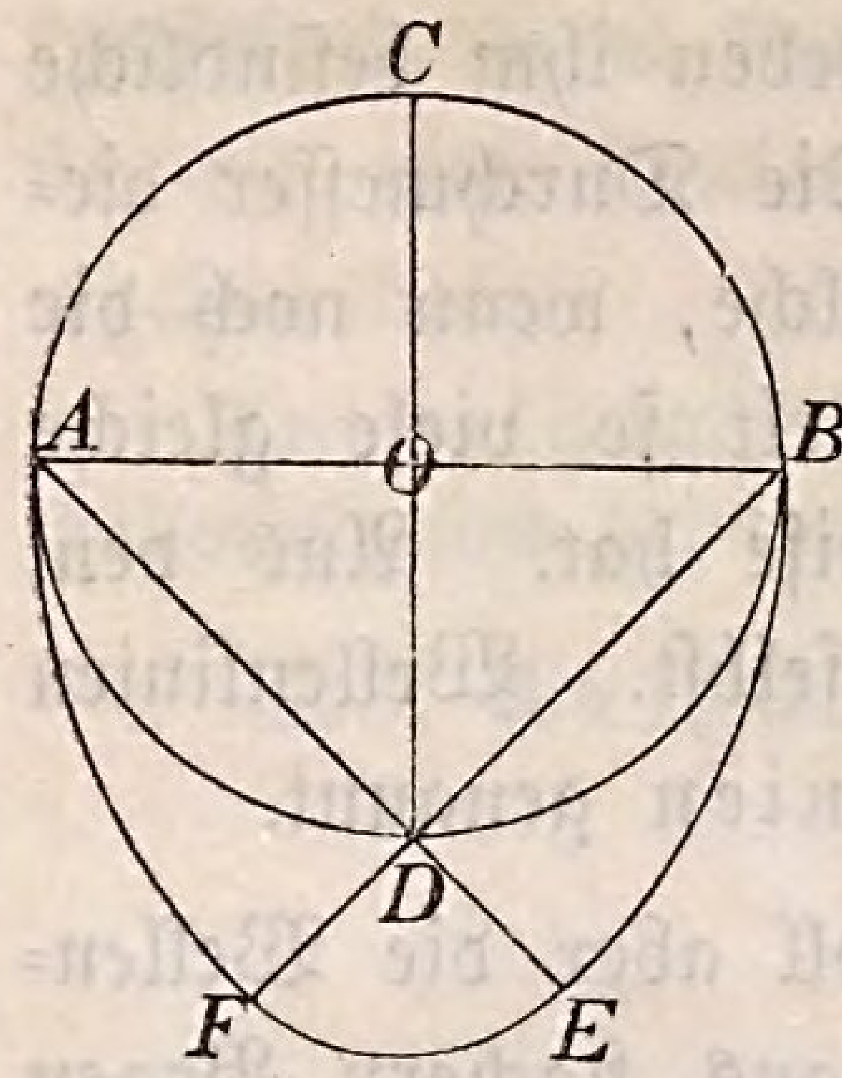


Fig. 211.

messern A B und C D, die sich in O rechtwinkelig schneiden, und verbinde A und B mit D. Hierauf beschreibe man mit A B von A und B aus die Bogen B E und A F, von denen ersterer die verlängerte A D in E, und letzterer die verlängerte B F in F trifft. Endlich nehme man D E in den Zirkel und schlage aus D den Bogen E F, mit welchem das verlangte Oval vollendet ist.

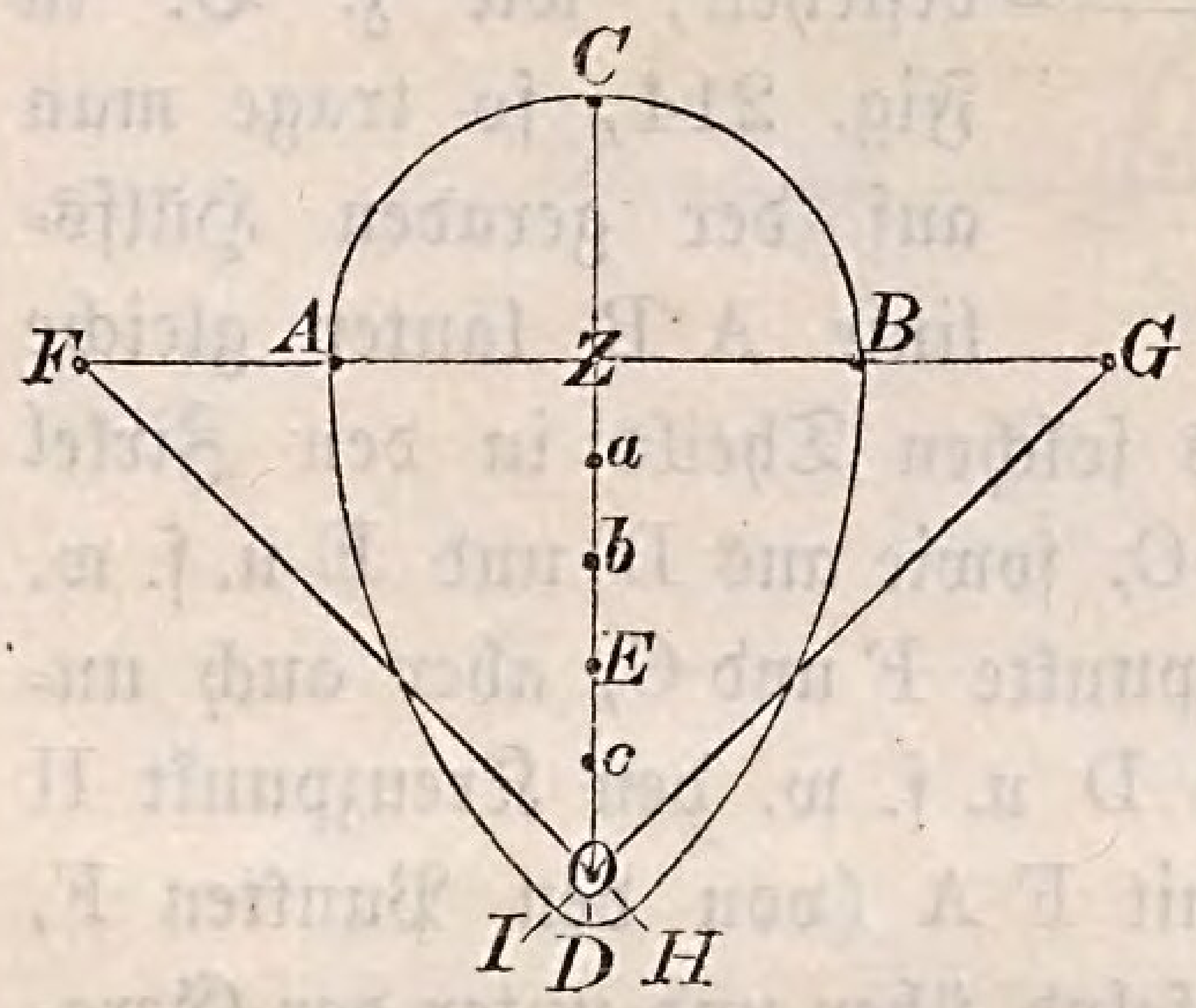


Fig. 212.

315. Aufgabe. Ein Oval zu zeichnen, dessen beide Achsen (Durchmesser) gegeben sind.

Construction. Man beschreibe über der kleinern Achse AB einen Halbkreis, halbire A B in Z und errichte hierselbst rechtwinkelig den Radius C Z. Alsdann verlängere man C Z über Z hinaus, bis C D der gegebenen größern Achse gleich ist; schneide von D aus auf der C D ein Stück DE = A Z ab; theile EZ in drei gleiche Theile und mache EO zweien solcher Theile gleich. Hierauf verlängere man A B auf beiden Seiten, bis Z F und auch Z G der Linie Z O gleich sind, und beschreibe mit B F (oder A G) aus F und G Bogen, welche die Verlängerungen der Linien F O und G O bezüglich in H und I treffen. Zuletzt beschreibe man mit O D aus O einen Bogen, der die Punkte H und I verbindet, wodurch das verlangte Oval vollendet wird.

316. Aufgabe. Eine regelmäßige Wellenlinie zu zeichnen.

Auflösung. Diese Aufgabe ist insofern eine unbestimmte, als es verschiedenartige Wellenlinien gibt. Zunächst kann eine solche Linie, wie Fig. 213 zeigt, aus Halbkreisen bestehen, die derartig miteinander verbunden sind, daß stets der

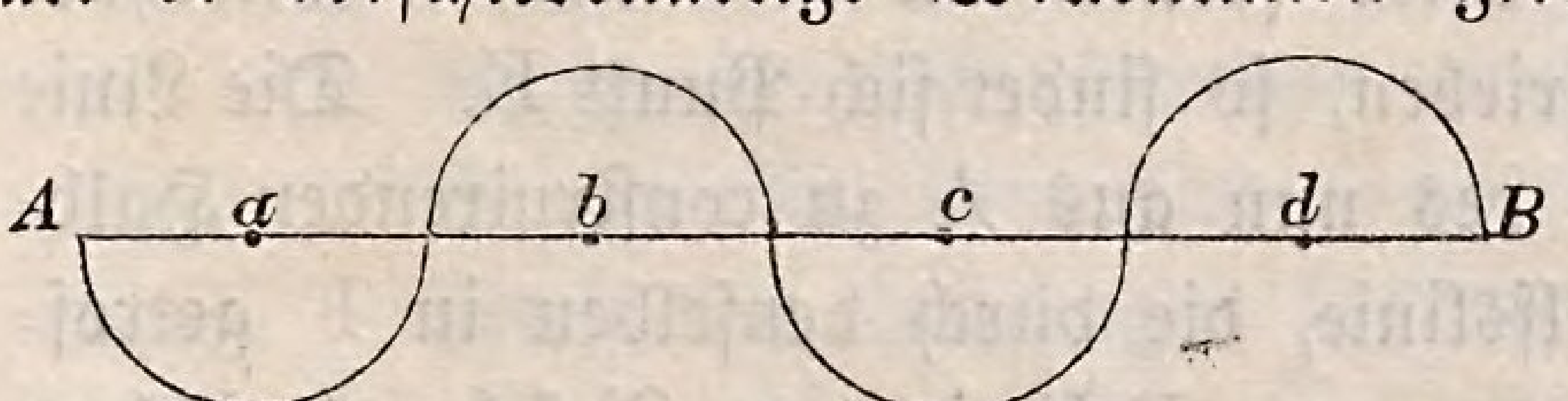


Fig. 213.

eine nach oben geöffnet ist, während der neben ihm befindliche seine Oeffnung nach unten gerichtet hat. Die Durchmesser dieser Halbkreise bilden eine gerade Linie, welche, wenn noch die Kreismittelpunkte bezeichnet werden, in doppelt so viele gleiche Theile zerfällt, als die Wellenlinie Halbkreise hat. Aus dem Gesagten ergibt sich die Construction von selbst. Wellenlinien dieser Art werden gewöhnlich Schlangenlinien genannt.

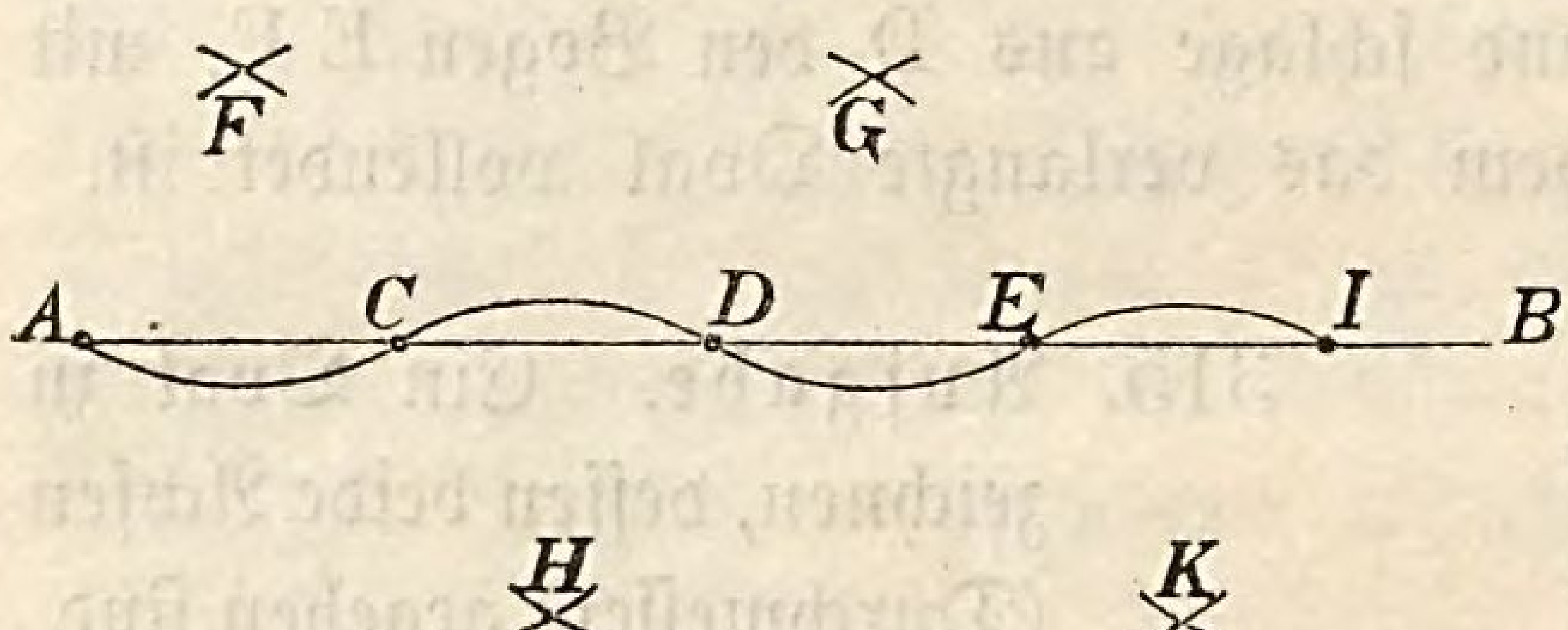


Fig. 214.

Soll aber die Wellenlinie aus flachern Bogen bestehen, wie z. B. in Fig. 214, so trage man auf der geraden Hülfslinie A B lauter gleiche Theile ab, nehme die Länge eines solchen Theils in den Zirkel und beschreibe damit aus A und C, sowie aus D und E u. s. w. oberhalb der Linie AB, die Kreuzpunkte F und G, aber auch unterhalb der Hülfslinie aus C und D u. s. w. den Kreuzpunkt H u. s. w. Alsdann schlage man mit F A (von den Punkten F, G, H u. s. w. ausgehend) abwechselnd über und unter der Geraden A B die Bogen, welche in den Theilpunkten derselben zusammentreffen.

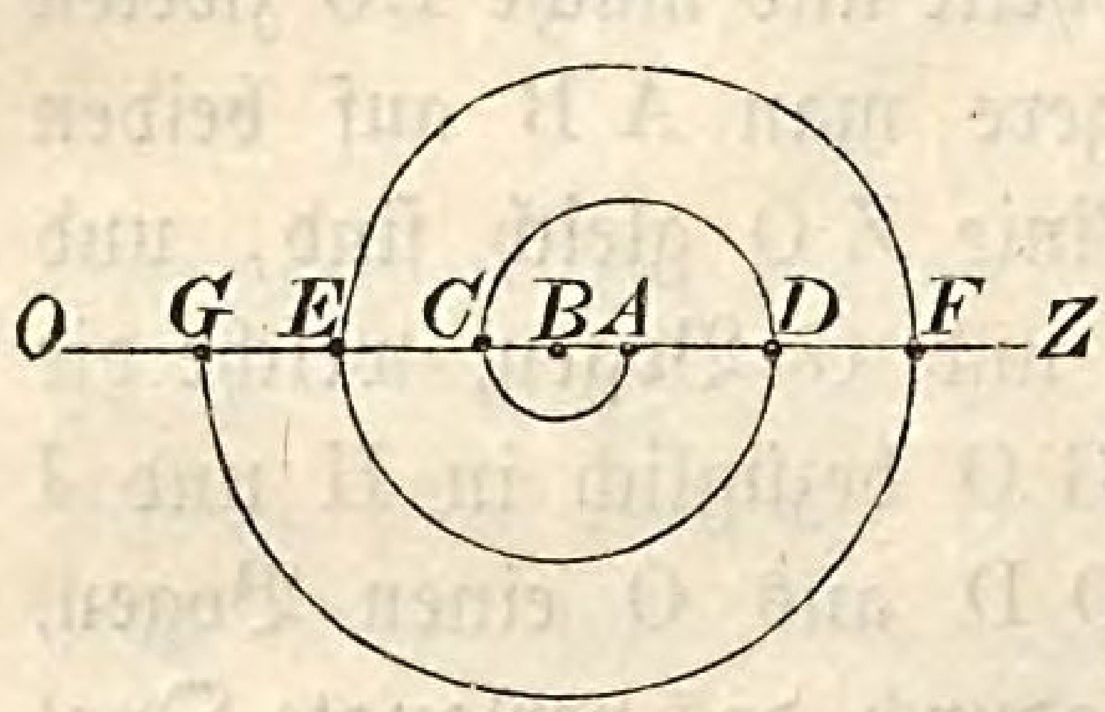


Fig. 215.

317. Aufgabe. Construction der Spirallinie.

Man zeichne eine gerade Hülfslinie O Z, schneide ungefähr in der Mitte derselben ein nicht zu großes Stück A B ab und schlage mit A B aus B unterhalb O Z einen Halbkreis, der die genannte Hülfslinie in C schneidet. Hierauf beschreibe man mit A C aus A oberhalb O Z einen Halbkreis, wodurch sich Punkt D auf letzterer ergibt. Wird ferner mit B D aus B unterhalb O Z ein Halbkreis beschrieben, so findet sich Punkt E. Die Linie E A ist der Halbmesser des nun aus A zu construirenden Halbkreises oberhalb der Hülfslinie, die durch denselben in F getroffen wird. Hierauf nehme man B F in den Zirkel und schlage damit unterhalb O Z von B aus einen Halbkreis, der die gerade

Hülfslinie in G schneidet. In dieser Weise fährt man fort, bis sich die etwa verlangte Anzahl der Windungen der Spirallinie ergeben hat.

Anmerkung. Die Halbkreise auf derselben Seite der geraden Hülfslinie sind bei der Spirallinie stets parallel.

318. Aufgabe. Construction der Schneckenlinie.

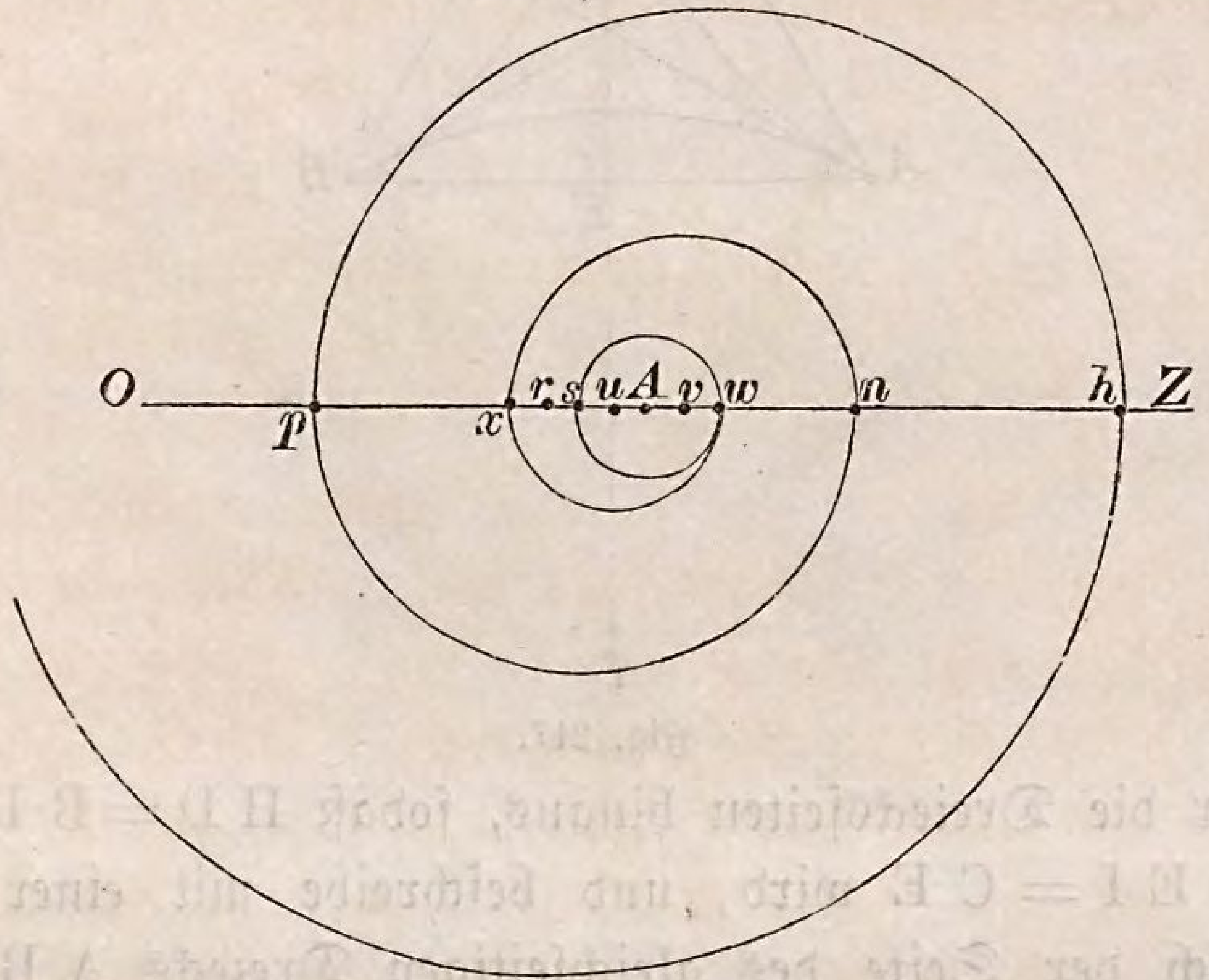


Fig. 216.

Hier wird wieder von einer geraden Hülfslinie O Z ausgegangen, in welcher man ungefähr in der Mitte einen Punkt A annimmt. Nachdem man von A aus auf O Z eine beliebige Anzahl gleicher, aber kleiner Theile — die Theilpunkte seien r, s, u, v und w — abgeschnitten hat, beschreibt man mit A w um A einen Kreis, alsdann mit u w um u unterhalb den Halbkreis w x, mit v x um v oberhalb den Halbkreis x n, mit s n um s unterhalb den Halbkreis n p, mit p w um w oberhalb den Halbkreis p h u. s. f.

Anmerkung. Die auf derselben Seite der Hülfslinie liegenden Halbkreise können nicht parallel sein, weil die Windungen der Schneckenlinie immer weitere Dimensionen annehmen.

319. Aufgabe. Construction eines regelmäßigen krummlinigen Dreiecks, das von drei gleichen, nach außen geöffneten Kreisbogen begrenzt wird.

Man zeichne ein geradliniges gleichseitiges Dreieck A B C; halbire die Seiten desselben in D, E und F; verbinde die Hal-

birungspunkte mit den ihnen gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks; verlängere jede der drei Verbindungslinien um sich

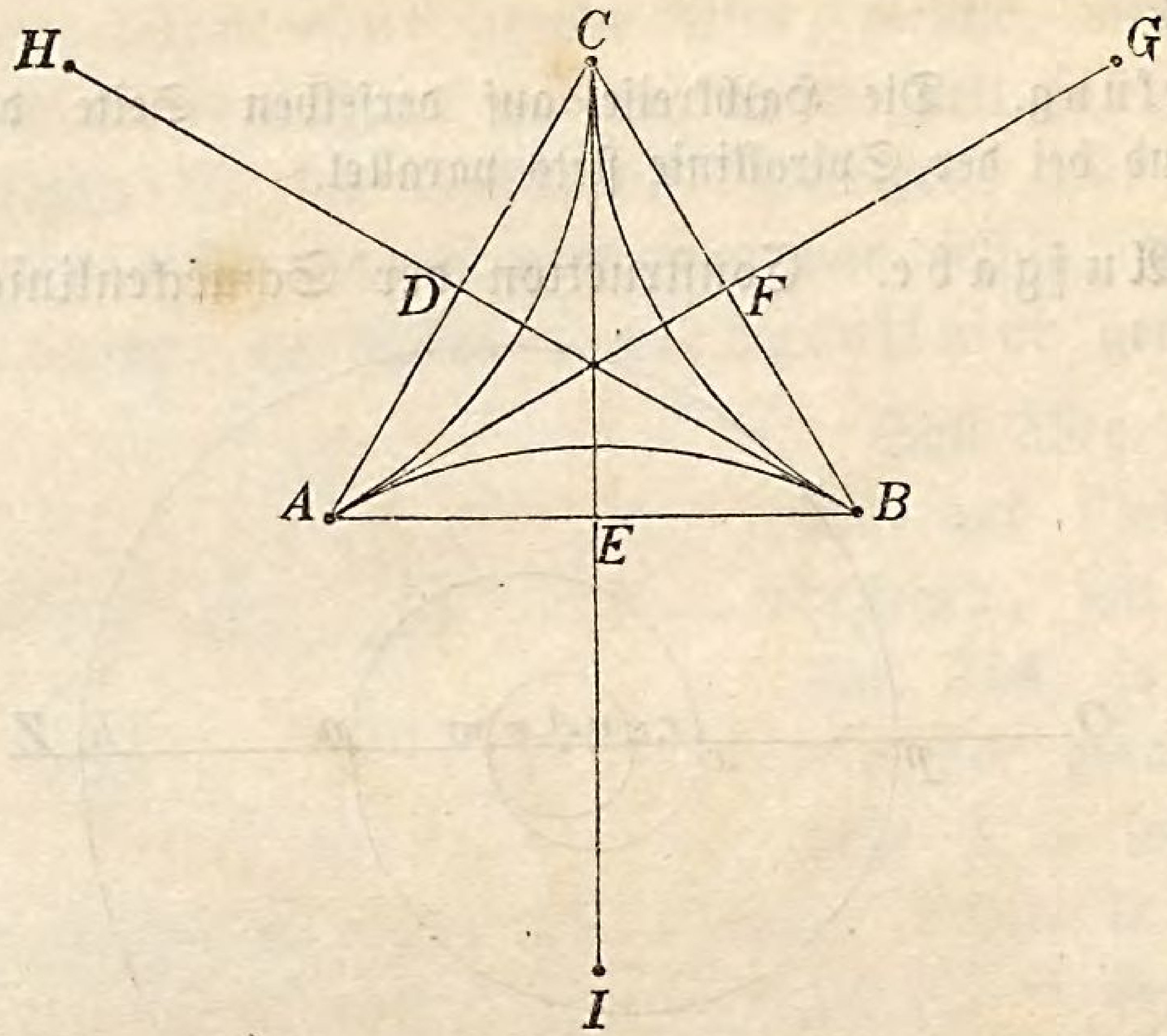


Fig. 217.

selbst über die Dreiecksseiten hinaus, sodaß H D = B D, F G = A F und E I = C E wird, und beschreibe mit einer Zirkelöffnung gleich der Seite des gleichseitigen Dreiecks A B C aus I, G und H bezüglich die Bogen A B, B C und A C.

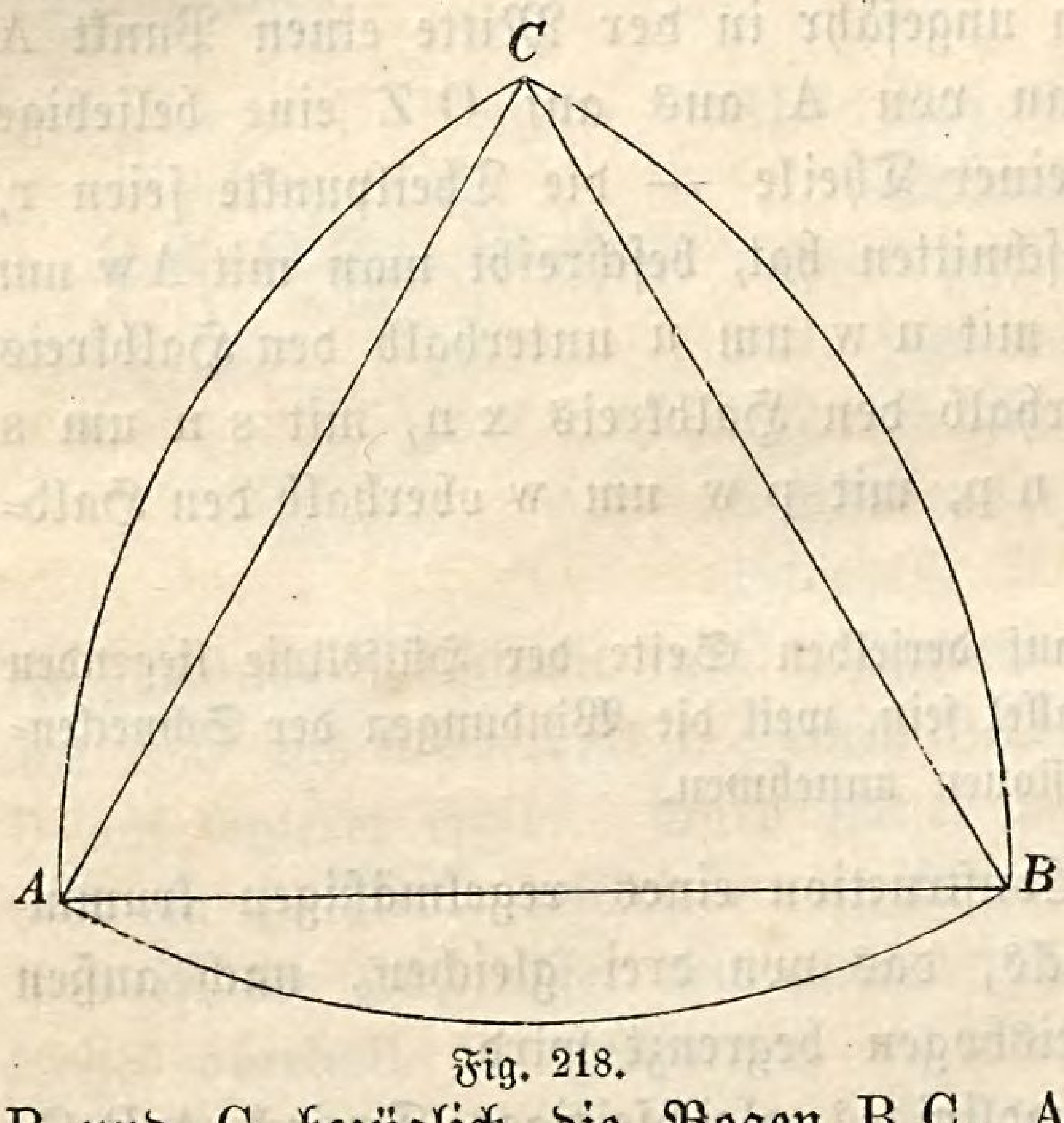


Fig. 218.

320. Aufgabe. Construction einer symmetrischen krummlinigen Figur, die von drei gleichen und nach innen geöffneten Kreisbogen begrenzt wird.

Man zeichne wieder zunächst ein geradliniges gleichseitiges Dreieck A B C und schlage mit einer Zirkelöffnung = A B aus den Ecken A, B und C bezüglich die Bogen B C, A C und A B: so ist die von denselben begrenzte Figur die verlangte.

321. Aufgabe. Ein symmetrisches krummliniges Viereck zu zeichnen, dessen einschließende Seiten vier gleiche, nach außen geöffnete Kreisbogen sind.

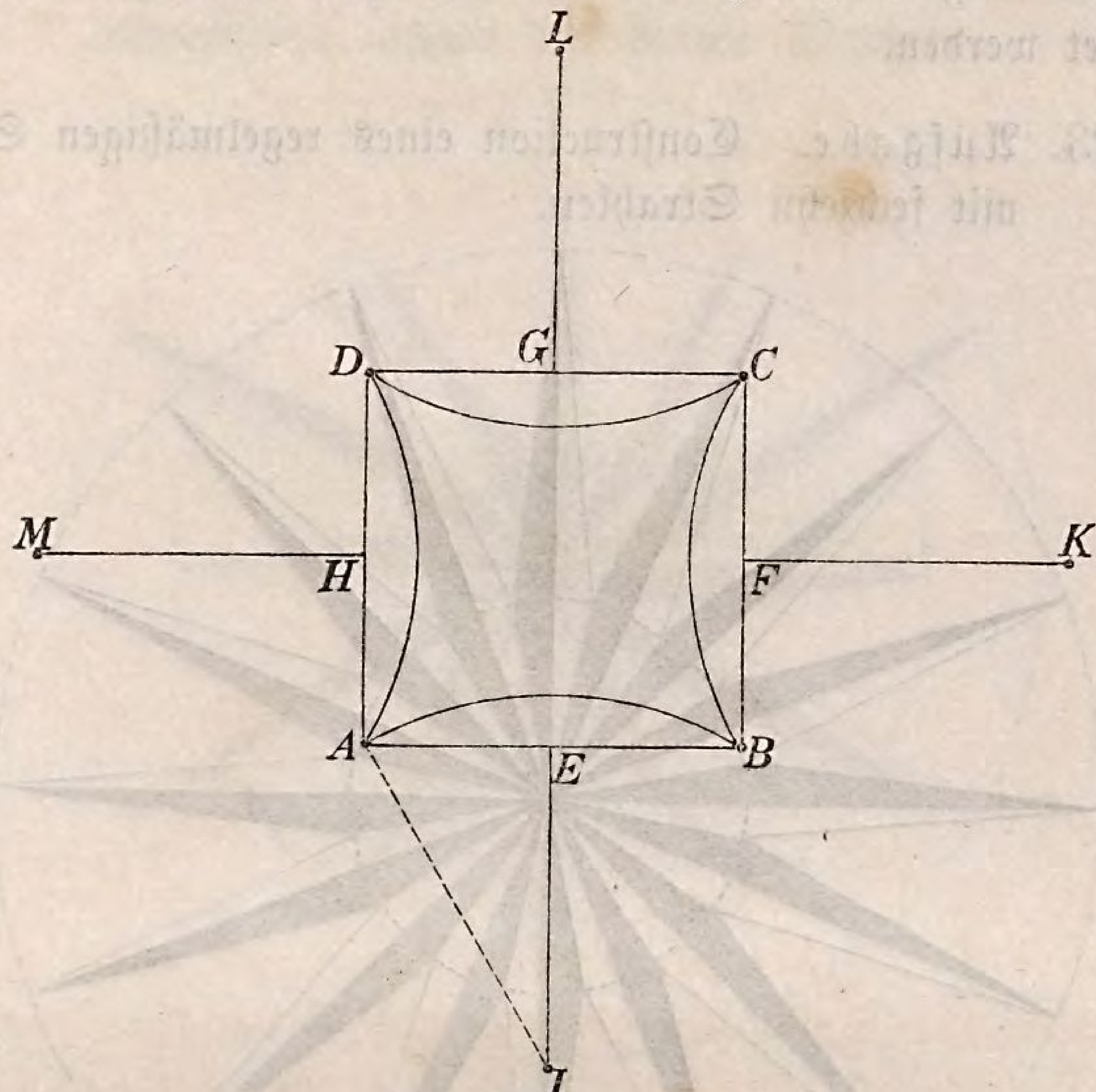


Fig. 219.

Man lege ein Quadrat A B C D zum Grunde, halbire die Seiten desselben durch die Lothe E I, F K, G L und H M, die unter sich gleich sein müssen, und beschreibe mit der Zirkelöffnung A I (= B K = C L = D M) aus I, K, L und M bezüglich die Bogen A B, B C, C D und D A.

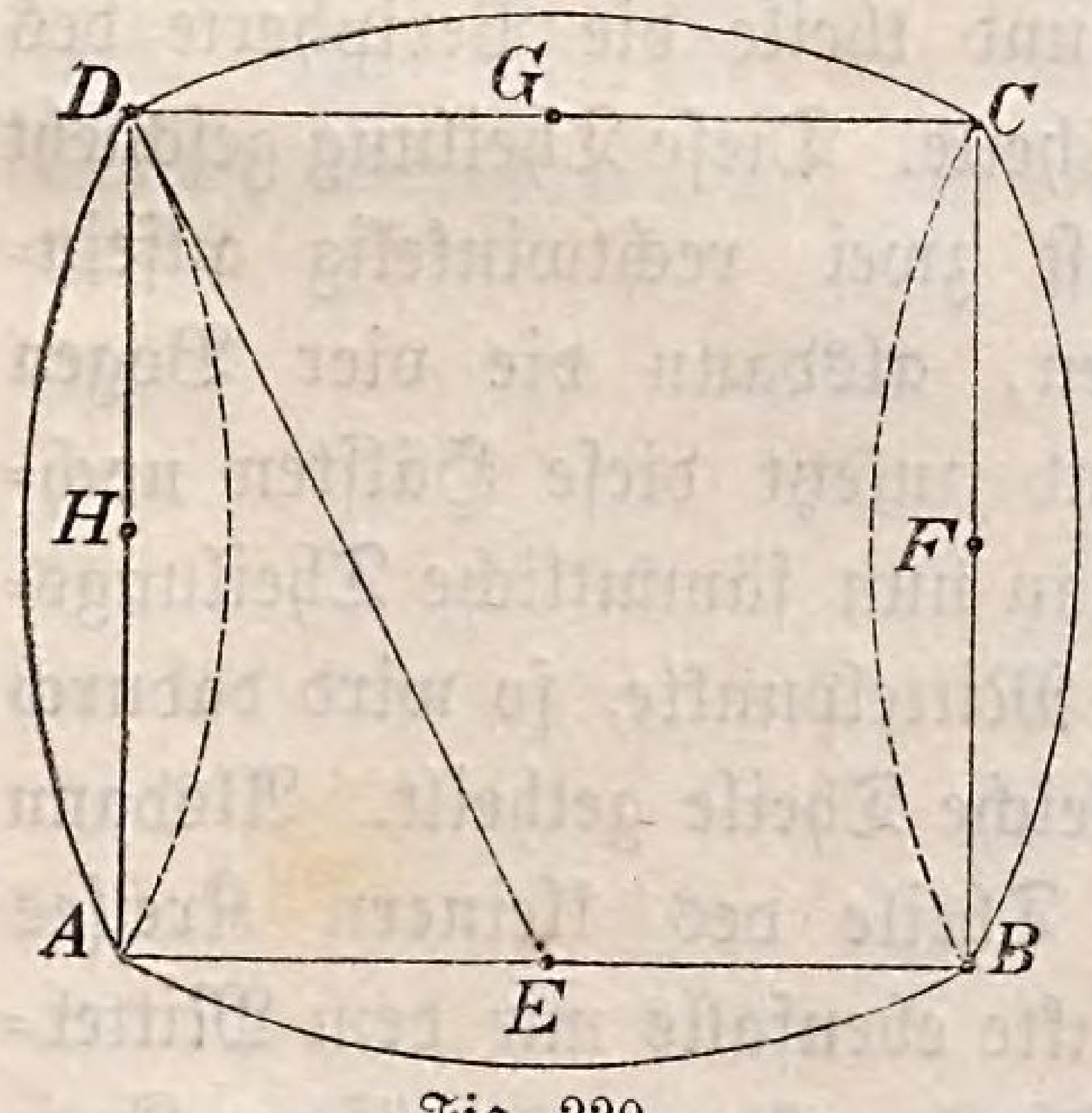


Fig. 220.

322. Aufgabe. Das zu zeichnende Viereck soll diesmal von vier nach innen geöffneten gleichen Kreisbogen begrenzt werden.

Man halbire die Seiten des Quadrats A B C D in E, F, G und H, und beschreibe von diesen Punkten aus mit der Zirkelöffnung DE bezüglich die Bogen CD, AD, AB und BC.

Zusatz. Eine ebenfalls symmetrische Figur ergibt sich, wenn von den vier Kreisbogen zwei gegenüberstehende (hier z. B. die punktirten Bogen A D und B C) mit der Oeffnung nach außen gezeichnet werden.

323. Aufgabe. Construction eines regelmäßigen Sternes mit sechzehn Strahlen.

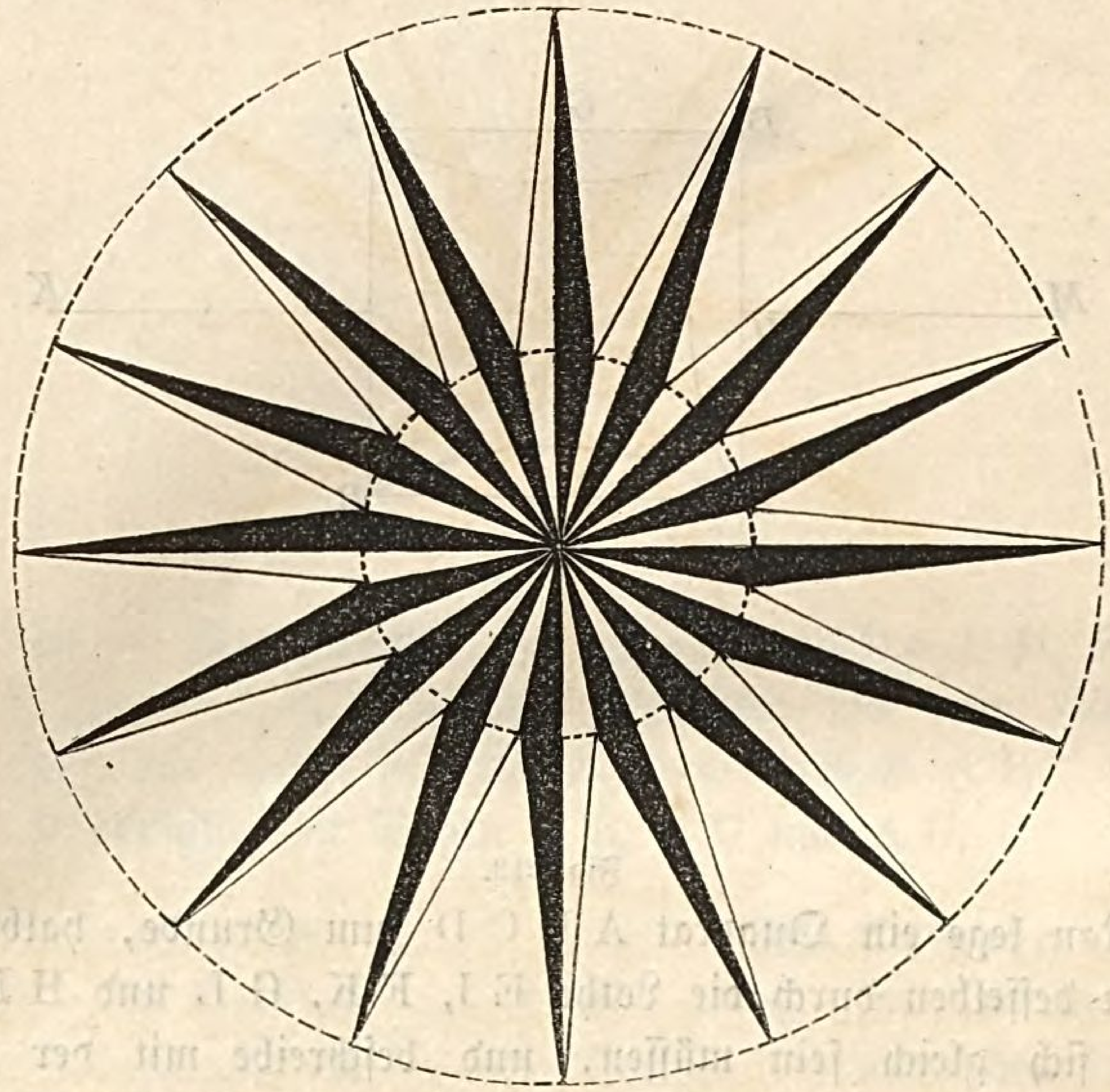


Fig. 221.

Man zeichne zwei concentrische Kreise, jedoch so, daß der Kreisring nicht zu schmal werde, und theile die Peripherie des größern Kreises in sechzehn gleiche Theile. Diese Theilung geschieht am einfachsten dadurch, daß zunächst zwei rechtwinkelig aufeinander stehende Durchmesser gezogen, alsdann die vier Bogen zwischen den Halbmessern halbirt und zuletzt diese Hälften nochmals halbirt werden. Verbindet man nun sämmtliche Theilungspunkte durch gerade Linien mit dem Mittelpunkte, so wird dadurch auch der innere Kreis in sechzehn gleiche Theile getheilt. Alsdann halbire man nochmals jeden dieser Theile des kleinern Kreises und verbinde die erhaltenen Theilpunkte ebenfalls mit dem Mittelpunkte, aber auch mit den sechzehn Theilpunkten des größern Krei=

ses, so ergeben sich die sechzehn gleichen Strahlen des verlangten Sternes.

324. Aufgabe. Construction einer Sternfigur mit zwölf abwechselnd langen und kurzen Strahlen.

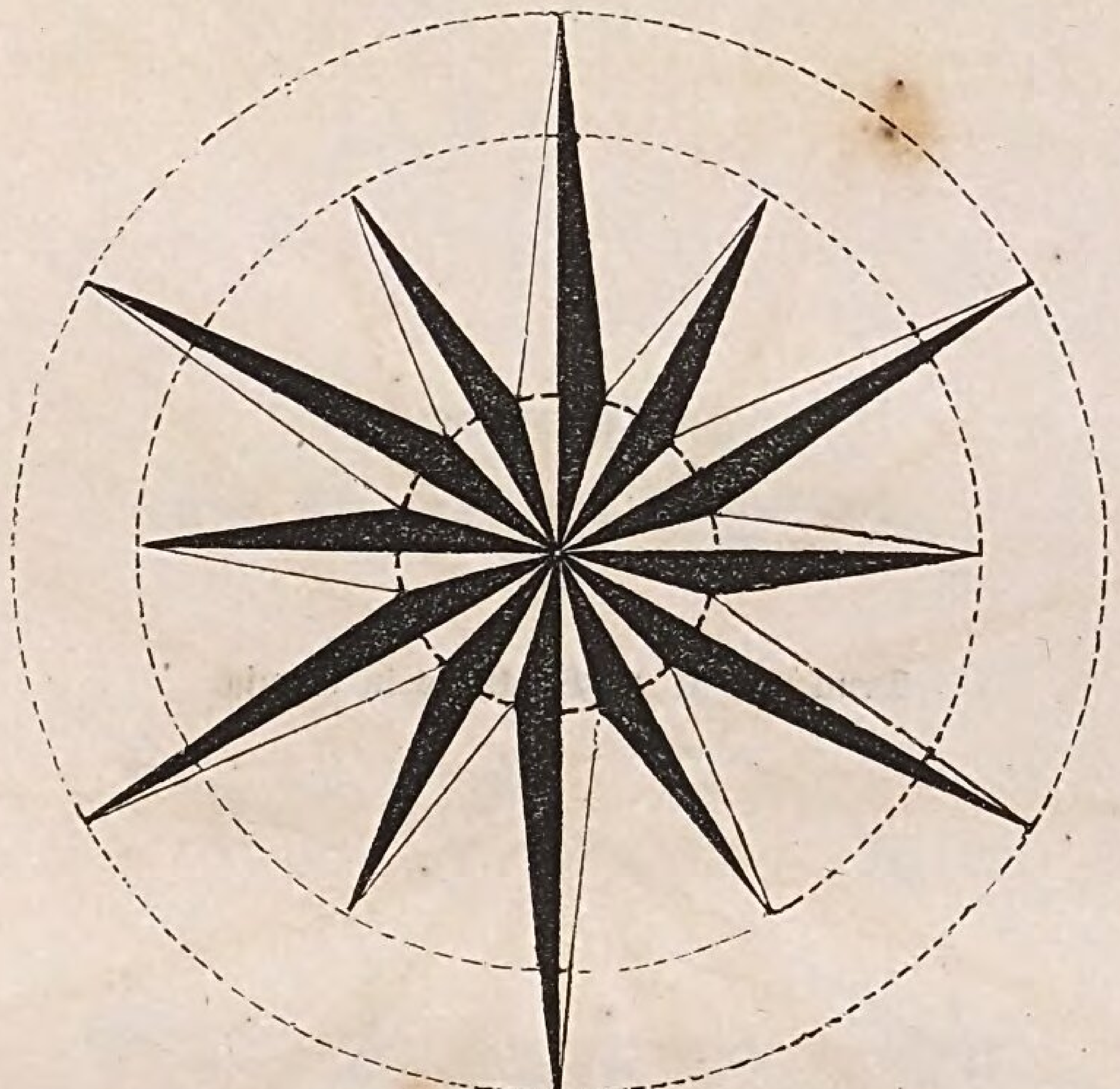


Fig. 222.

Man zeichne drei concentrische Kreise, theile die Peripherie des äußern in sechs, die des mittlern (durch die entsprechende Halbirung derselben) in zwölf gleiche Theile und ziehe von den Theilpunkten gerade Linien nach dem Mittelpunkte, wodurch auch der Umfang des kleinsten Kreises in zwölf gleiche Theile zerfällt. Das weitere Verfahren gleicht dem in voriger Aufgabe angedeuteten, außer daß hier die langen Spitzen in den größten Umkreis und die kurzen Spitzen in den mittlern fallen.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Berichtigung
von Fig. 141 auf Seite 158.

